Hola, soy la esfera

Luis Balbuena Castellano

A Ricardo Lorenzo, in memoriam

Parece mentira que viviendo los terrícolas en una esfera (bueno, casi), sin embargo, me conozcan tan poco. Aún no he llegado a entender bien por qué Euclides, tan sabio como fue, dedicó tanto esfuerzo a que la gente conociera la geometría plana y abandonara a mi familia, las esferas.

Es posible que no tuviera asumido del todo que él vivía en una esfera, lo cual resulta un poco raro puesto que vivió en el siglo III a. c. y en esa época ya éramos conocidas, pues Aristóteles hizo un modelo de universo con esferas y más esferas.

Lo cierto es que Euclides, con su famosa obra conocida como "Los Elementos", consiguió que la mente de las personas se cuadriculara de tal forma que la mayoría no ve más allá de lo que ocurre en el plano. No conciben, por ejemplo, que puedan existir modelos de geometrías en las que se puedan construir triángulos tales que si se suma el valor de sus ángulos el resultado no sea 180°. Y no digamos nada si se les dice que esa suma ni siquiera tiene un valor fijo sino que oscila entre dos valores.

Pues bien, si quiere hacer una pequeña incursión por ese aparentemente extraño mundo y conocer una geometría distinta de la que usted conoce de toda la vida, siga leyendo y espero que sepa sorprenderse por lo que le voy a contar de mí, la esfera.

Con el fin de entendernos mejor, le recordaré lo que usted conoce del plano y trataré de explicarle cómo se traduce ese concepto sobre mi superficie.

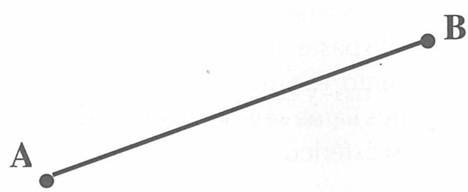

Figura 1. El segmento AB es la distancia más corta entre los puntos A y B del plano.

En la figura 1 le muestro que, en el plano, la distancia más corta entre dos puntos A y B la marca el trozo de recta que pasa por ellos y que, como sabe, es lo que se denomina segmento AB. Pues bien, sobre mí no existen trozos rectos ya que todos son curvos. ¡Primera gran diferencia!

Ahora fijemos la atención en dos puntos P y Q sobre mi superficie. Como puede ver en la figura 2, para ir de uno a otro tengo muchas posibilidades, pero ¿cuál es la línea que da la mínima distancia?

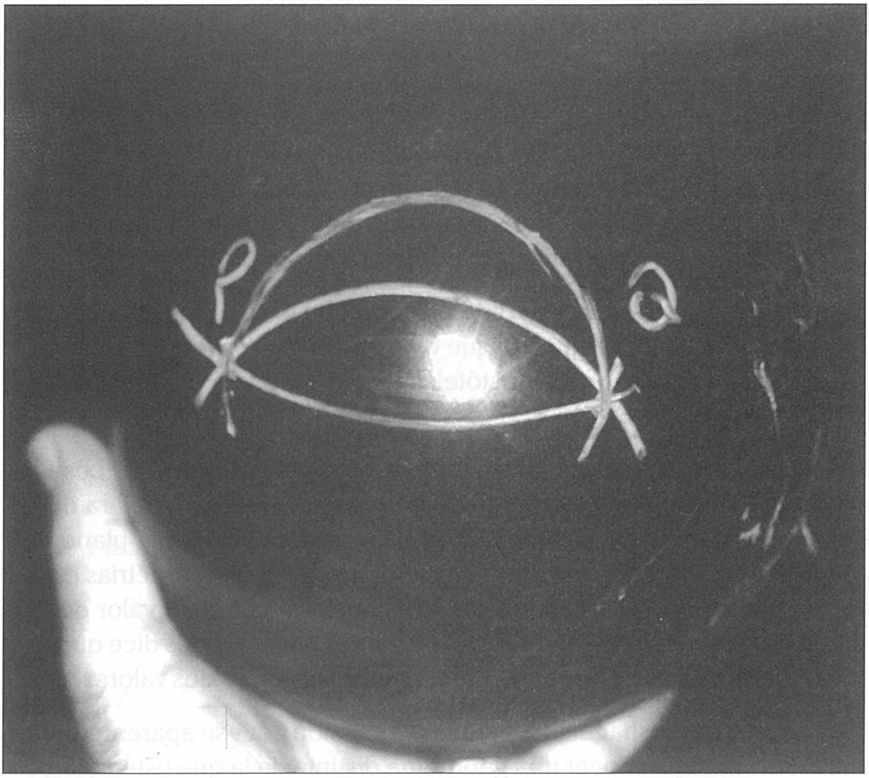

Figura 2. Existen muchos modos de ir de P a Q.

En la figura 3 se ha hecho pasar un elástico por P y luego se ha tensado para hacerlo pasar por Q. La línea que buscamos es la que forma el elástico. Por lo tanto, ese trozo de línea curva que va de P a Q es equivalente a lo que Euclides llama segmento en el plano. Sobre mi superficie le llamamos "segmento esférico»

Pero si deseamos mantener la traducción, la línea que marca el elástico en la figura 3, que es sobre la que se encuentra el segmento esférico, es la equivalente a la recta euclídea así que la llamaremos "recta esférica". Y una pregunta fundamental surge en este momento: ¿cómo es la recta esférica?

Ya ve que se construye prolongando a un lado y a otro el segmento esférico PQ. Si lo hace con el elástico sobre una esfera, comprobará que la recta esférica es lo que muchos de mis biógrafos llaman "circunferencia máxi-

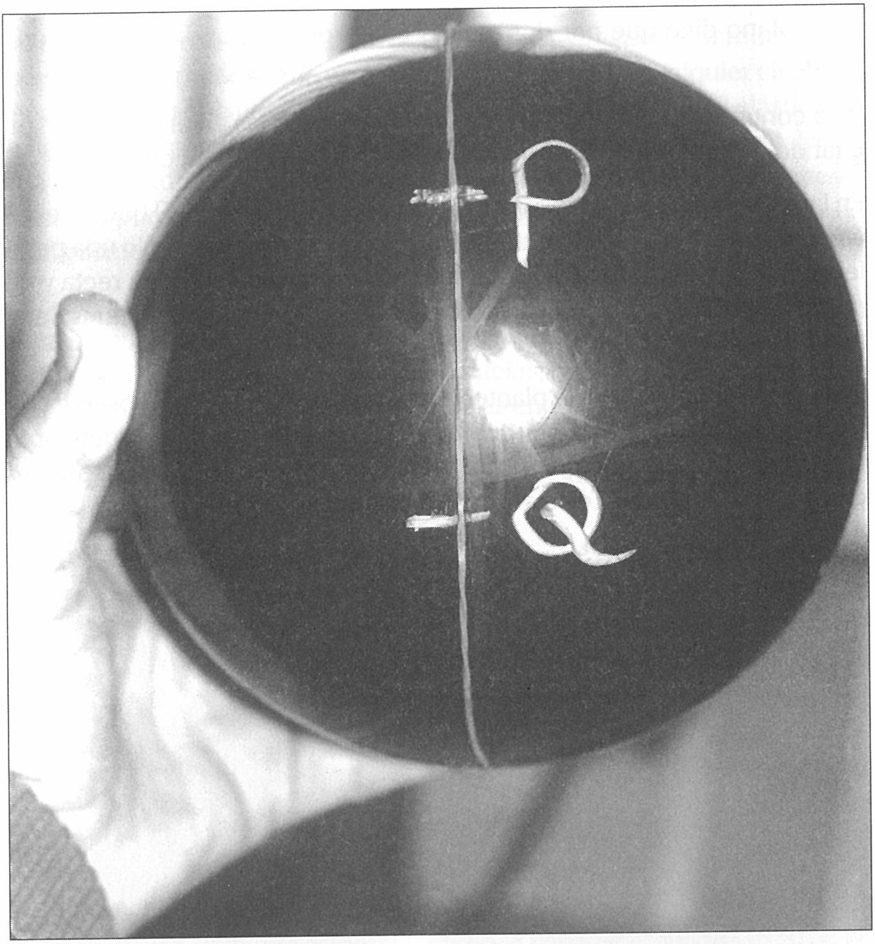

Figura 3. La distancia más corta entre los puntos P y Q
es el arco de circunferencia máxima que pasa por P y Q.

ma" porque, en efecto, se trata de la mayor circunferencia que se puede trazar sobre mi superficie, bueno, una de las infinitas que hay. Como ve, se trata de algo interesante y que va a jugar un papel importante en lo que le contaré a continuación. Por eso lo destaco: *las circunferencias máximas en la esfera hacen las veces de las rectas en el plano.*

Por si acaso puede parecerle que falta algo así como una definición de circunferencia máxima, le propongo la siguiente: llamaremos circunferencia máxima a la línea que resulta de la intersección de la superficie esférica con un plano que pasa por el centro de la esfera.

Le será fácil comprobar que por dos puntos cualesquiera de mi superficie pasa una y sólo una circunferencia máxima, resultado equivalente al que en el plano dice que por dos puntos cualesquiera pasa una y sólo una recta.

Para continuar le recuerdo la idea de rectas paralelas en el plano. Lo son cuando por mucho que se prolonguen nunca llegan a encontrarse.

En la geometría euclidiana existe un famoso postulado (el V) que dice, en esencia, que por un punto exterior a una recta *r* pasa una y sólo una paralela a *r*. ¿Quién se atreve a discutirlo? Dibuje usted mismo una recta y un punto que no esté sobre ella y comprobará fácilmente que Euclides tiene razón.

Pero ahora aparezco yo y le planteo el problema en la figura 4: observe que el punto P no está sobre la circunferencia máxima y surge la inquietante pregunta: ¿se mantiene que por P pasa una y sólo una paralela a esa circunferencia máxima? Tómese un tiempo para pensarlo.

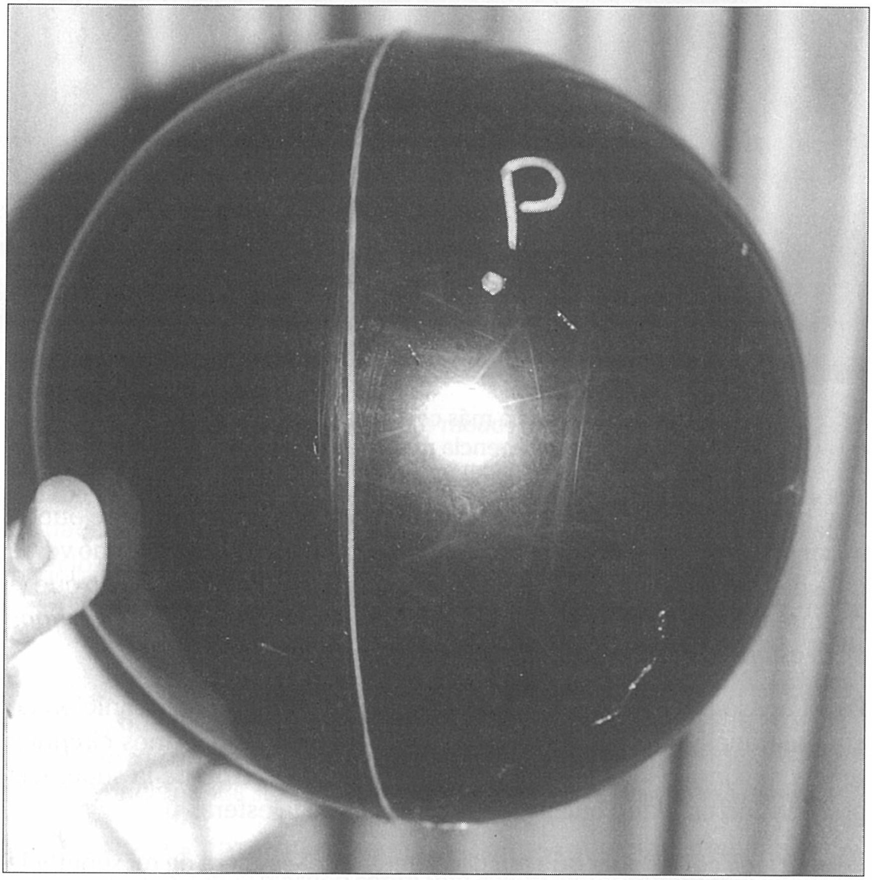

Figura 4. Por un punto exterior a una recta esférica ¿cuántas paralelas pasan?.

No se esfuerce más, la respuesta es que *no pasa ninguna*. Por mucho que lo intente, comprobará que esté donde esté el punto P, cualquier circunferencia máxima que pase por P cortará a la representada por el elástico en la figura 4 y por tanto, no son paralelas según la definición de paralelismo que hemos admitido. Es un sorprendente resultado que a veces cuesta entender porque no estamos acostumbrados a que sucedan estas cosas en la geometría euclídea.

En la figura 5 se plantea y resuelve un sencillo problema euclídeo: dada la recta *r*, se trazan dos perpendiculares *s* y *t*. ¿Qué se puede decir de las rectas *s* y *t*? Efectivamente, que son paralelas, de ahí el dicho: dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí. ¿Se atrevería a afirmar que algo parecido ocurre sobre la superficie esférica? Supongo que a estas alturas al menos tendrá un cierto grado de desconfianza de que eso pueda suceder.

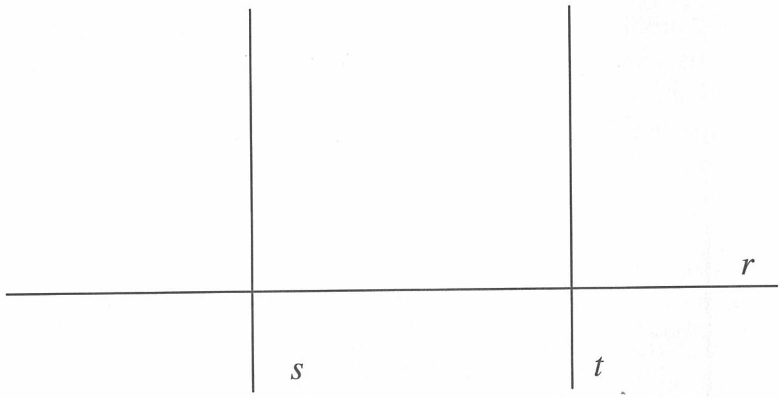

Figura 5. Dos rectas (*s* y *t*) perpendiculares a una tercera (*r*) son paralelas entre sí.

Pero antes de analizar la situación creo que es necesario que diga cómo se mide el ángulo que forman dos líneas sobre mi superficie. Esas dos líneas se cortan en un punto y cada una de ellas tiene una recta tangente en ese punto (en este caso las rectas que nombro son euclídeas). Pues bien, el ángulo que forman esas rectas es el que forman las líneas sobre mi superficie. Es como si le pidiera prestado esto a Euclides. Según esta definición, dos circunferencias máximas serán perpendiculares cuando el ángulo que formen las tangentes en el punto de intersección sea de 90º. Con el ejemplo que le propongo ahora espero que quede clara esta idea: si se considera como circunferencia máxima el ecuador de la Tierra, cualquier circunferencia máxima que pase por los polos formará un ángulo recto en el punto en el que corte al ecuador como puede apreciar en la figura 6.

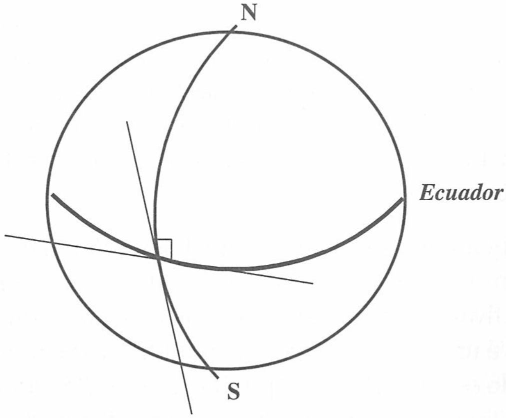

Figura 6. Ecuador cortado por una circunferencia máxima que pasa por los polos N y S.

Volvamos al problema planteado: ¿se cumple sobre la esfera que dos perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí? La figura 7 pone de manifiesto que un resultado tan evidente en el plano euclídeo no se verifica sobre la superficie esférica, ya que las rectas *d* y *f* que son perpendiculares a *c no son paralelas.*

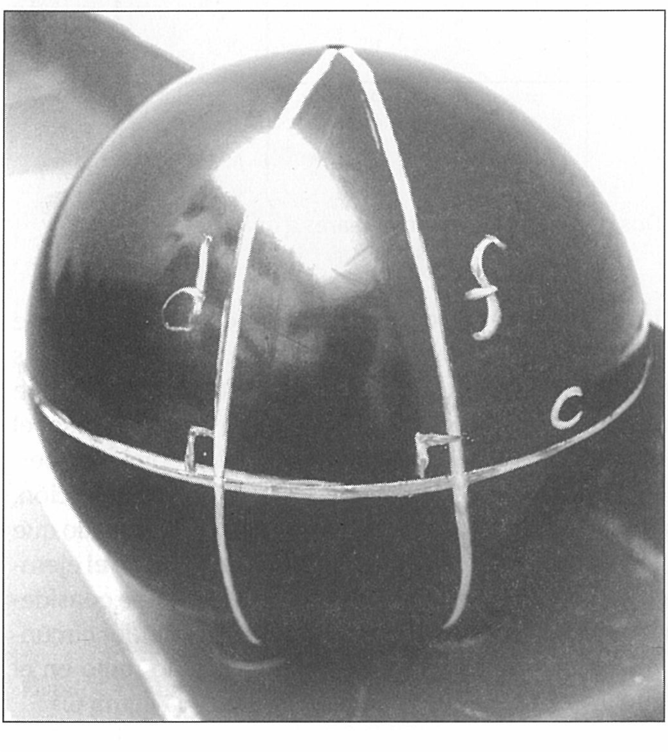

Figura 7. Sobre la esfera, dos perpendiculares a una tercera no son paralelas entre sí.

Pero las sorpresas mayores están aún por llegar. ¿Qué mentalidad euclidiana no se escandalizaría si oyera hablar de un "biángulo"? ¡Eso es imposible!, dirá. Y lo cierto es que en esa geometría lo es, ya que no es posible dibujar una figura cerrada que sólo tenga dos lados; cualquier trozo del plano limitado por segmentos ha de tener como mínimo tres lados. En mi superficie, en cambio, es bien sencillo formar un biángulo y espero que no se escandalice por la existencia de esa "extraña" posibilidad. La figura 8 representa un biángulo y si desea entretenerse le propongo que trate de averiguar cuánto vale la suma de los ángulos de una de estas figuras.

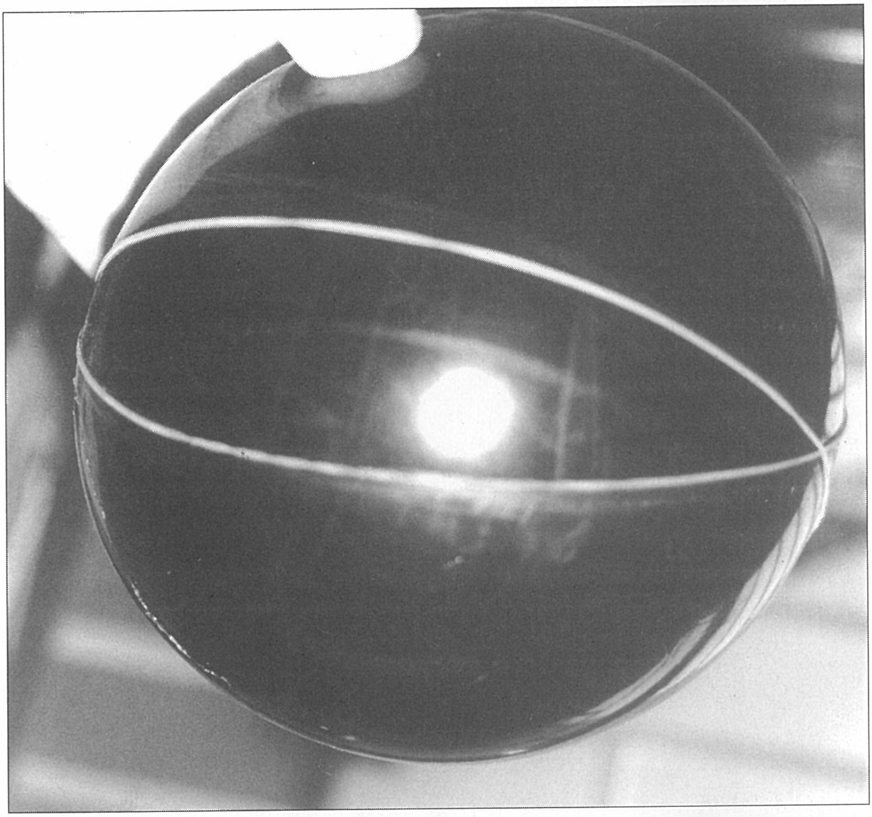

Figura 8. Un biángulo esférico.

En la figura 9 está reproducida la venerada demostración de que la suma de los ángulos de un triángulo plano es igual a 180°. Es una bella demostración visual imposible de rebatir.

Prepare su mente ahora para entrar en contacto con un resultado sorprendente.

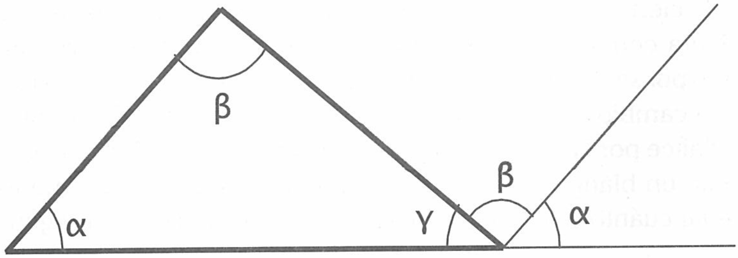

Figura 9. $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

En la figura 10 se presenta un triángulo esférico. Tiene un vértice en el polo y los otros dos en el ecuador. Si lo observa con atención, comprobará enseguida que es un triángulo "birectángulo" pues los dos ángulos señalados son rectos. Si ahora le pregunto ¿suman 180º los ángulos de este trián-

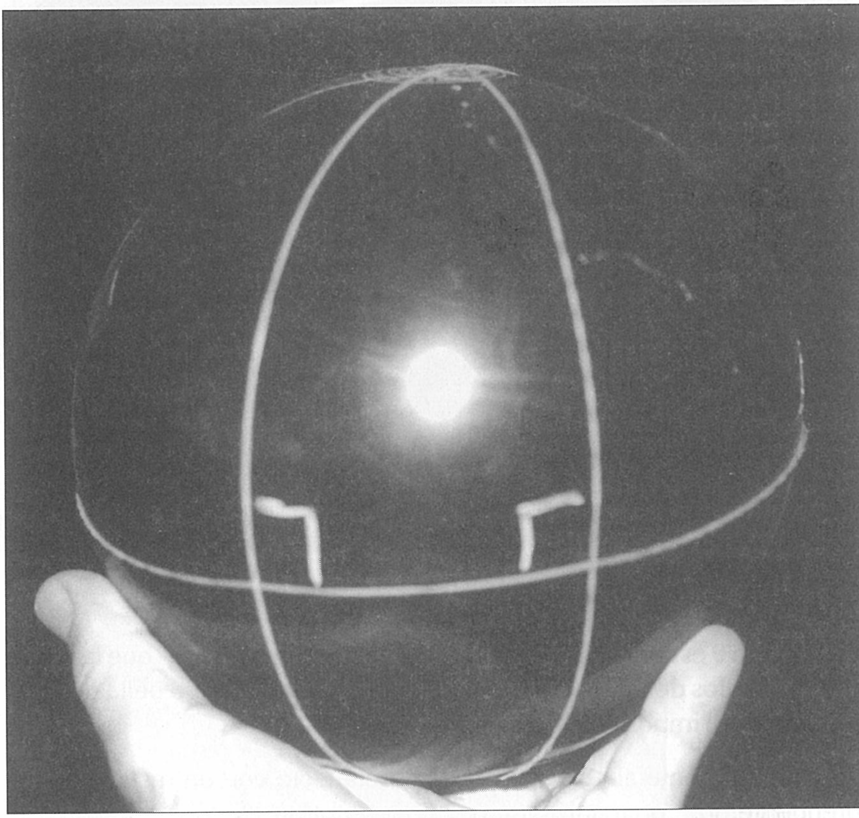

Figura 10. Triángulo «birrectángulo».

gulo? La respuesta es inmediata: no. Sólo los dos ángulos rectos ya suman esa cantidad. Por tanto, la suma de los ángulos de un triángulo esférico no es 180°. Y ahora una pregunta más fuerte aún: ¿cuánto suman? La respuesta no es inmediata porque supongo que se dará cuenta que no es una cantidad fija sino que oscila entre dos valores que debe averiguar. Lo importante de esta situación es que una vez más se vulnera un principio inquebrantable de la geometría euclidiana: la suma de los ángulos de un triángulo puede no ser igual a 180°.

Veamos una singularidad más y ya acabo porque creo que me estoy poniendo un poco pesada con mis cosas. Usted sabe que en el plano euclídeo, por dos puntos pasa una y sólo una recta. Pero fíjese en la figura 11. Si sobre mi superficie considero dos puntos diametralmente opuestos (por ejemplo, los polos Norte y Sur de la Tierra), comprobará fácilmente que por esos dos puntos pasan ¡infinitas circunferencias máximas! Y, por lo tanto, de nuevo se rompe el férreo esquema euclidiano.

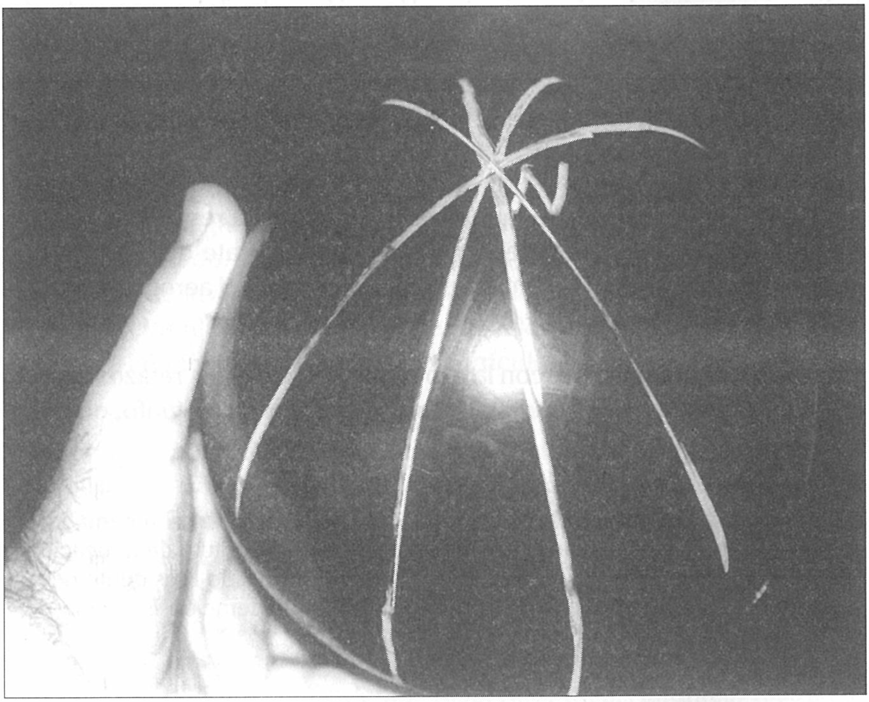

Figura 11. Infinitas circunferencias máximas.

Creo que con lo que le he relatado es suficiente para que pueda llegar a la conclusión de que la geometría guarda muchas sorpresas. En este caso ha podido comprobar que existen geometrías distintas de la que se maneja y estudia habitualmente.

Son las llamadas "geometrías no euclídeas", de las que se habló por primera vez 2000 años después de Euclides. Lo hizo en 1733 el jesuita Girolano Saccheri, en una obra titulada "Euclides ab omni naevo". Sin embargo, el mérito del descubrimiento se suele adjudicar "ex aequo" al ruso Lobachevsky, al húngaro Bolyai y al alemán Gauss.

Le propongo a continuación dos curiosos problemas para que se entretenga resolviéndolos y comprobando una vez más las singularidades de mi superficie.

1. Una persona sale de su casa y se traslada 200 km hacia el Sur. En ese momento cambia el rumbo y se desplaza 200 km hacia el Este. Llegado a este lugar, cambia de nuevo el rumbo y se dirige hacia el Norte. A lo largo de este trayecto ve un oso. Cuando recorre 200 km en esta dirección observa que llega de nuevo a su casa. La desconcertante pregunta del problema es: ¿de qué color es el oso que vio?

2. Seguimos con desplazamientos. Un avión sale del aeropuerto de Tenerife-Norte y recorre 3 000 km hacia el Norte. Allí cambia el rumbo y hace 3 000 km hacia el Este. Ahora se dirige hacia el Sur y vuela otros 3 000 km. Finalmente cambia de nuevo el rumbo, ahora hacia el Oeste y recorre 3 000 km. Tras ese largo viaje, se pregunta: ¿llegará de nuevo al aeropuerto de Tenerife-Norte? Le sugiero que haga un simulacro en alguna esfera que tenga a mano y así podrá dar una respuesta visual al problema. Si desea entretenerse un poco más, trate de demostrarlo numéricamente. Por si necesita el dato, le diré que el aeropuerto está a 28º de latitud Norte.

Y ahora sí que me despido, con la esperanza de que estos retazos que he contado de mi vida hayan sido bien transcritos por mi biógrafo, el profesor...

Luis Balbuena Castellano (Moya, Gran Canaria) es Licenciado en Matemáticas y Maestro de Primaria. Es profesor de Matemáticas del Instituto de Educación Secundaria Viera y Clavijo de La Laguna (Tenerife). Ha sido Presidente de la Sociedad Isaac Newton y Secretario General de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.