NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas

http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 94, marzo de 2017, páginas 107-115

Demostraciones geométricas automáticas en GeoGebra: Casos prácticos

Carlos Ueno Jacue (Kodály Zoltán Gimnázium, Pécs, Hungría)

Resumen En este artículo presentamos algunos ejemplos del uso de los comandos Comprueba[] y CompruebaDetalles[] que GeoGebra incorpora en sus nuevas versiones, analizando su eficacia a la hora de resolver problemas geométricos de diversa dificultad. También comprobamos la importancia del modo en que se realizan las construcciones geométricas a la hora de aplicar dichos comandos.

Palabras clave Geometría plana, GeoGebra, Demostración geométrica, Demostración automática.

Title **Automatic geometric proofs in GeoGebra: Practical cases.**

Abstract In this article we introduce some examples of the use of the Prove[] and ProveDetails[] commands that GeoGebra incorporates in its latest versions, analyzing its efficacy when solving geometric problems of diverse levels of difficulty. We also check the importance of the way we make our constructions in order to apply the aforementioned commands.

Keywords Plane Geometry, GeoGebra, Geometric proof, Automatic proof.

"It's hard to guess how smart the machines are, but a good rule of thumb is that they're always smarter than you think."

Daniel H. Wilson, Robogenesis

1. Introducción

En (Ueno 2016) expusimos algunos de los principios básicos sobre los que se apoya la demostración automática de teoremas geométricos, y tomamos contacto con los comandos que implementan esta capacidad en el software GeoGebra. Propusimos al lector una serie de actividades para investigar esta nueva posibilidad que ofrece el programa.

En este artículo comentamos esas actividades y exploramos los resultados que obtenemos, con el objetivo de familiarizarnos mejor con los comandos Comprueba[] y CompruebaDetalles[], y de verificar su funcionamiento con casos prácticos concretos. Veremos que, en algunas ocasiones, la respuesta de GeoGebra a nuestras preguntas plantea nuevos interrogantes, y que a menudo las demostraciones automáticas que genera son muy sensibles a las construcciones que se pueden realizar para ilustrar un problema geométrico determinado, y que incluso dependen de la versión de GeoGebra que estemos utilizando o de la potencia de nuestro ordenador.

MUNDO GEOGEBRA
Coordinador: Carlos Ueno

2. Primera propuesta

El primer problema que propusimos en nuestro artículo anterior recibe el nombre de *Teorema de Varignon*. Se trata de todo un clásico de la geometría plana elemental (Oliver 2001), y una propuesta sencilla para iniciarse en el uso de los demostradores automáticos.

Problema 1: *Demostrar que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera ABCD forman un paralelogramo.*

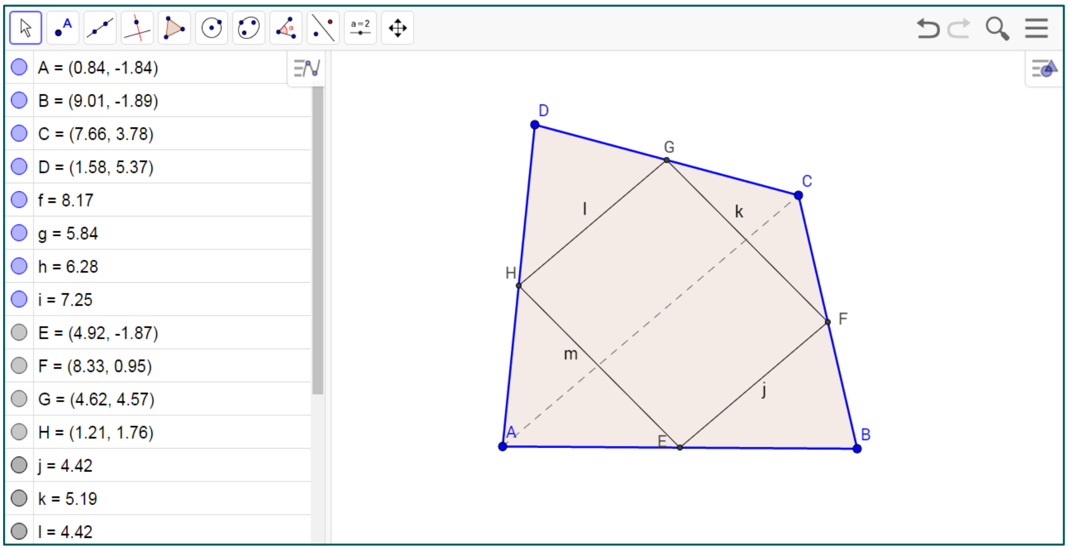

Imagen 1. Construcción del primer problema

	Nombre	Descripción	Valor
1	Punto A		A = (0.84, -1.84)
2	Punto B		B = (9.01, -1.89)
3	Punto C		C = (7.66, 3.78)
4	Punto D		D = (1.58, 5.37)
5	Segmento f	Segmento [A, B]	f = 8.17
6	Segmento g	Segmento [B, C]	g = 5.84
7	Segmento h	Segmento [C, D]	h = 6.28
8	Segmento i	Segmento [D, A]	i = 7.25
9	Punto E	Punto medio de A, B	E = (4.92, -1.87)
10	Punto F	Punto medio de B, C	F = (8.33, 0.95)
11	Punto G	Punto medio de C, D	G = (4.62, 4.57)
12	Punto H	Punto medio de D, A	H = (1.21, 1.76)
13	Segmento j	Segmento [E, F]	j = 4.42
14	Segmento k	Segmento [F, G]	k = 5.19
15	Segmento l	Segmento [G, H]	l = 4.42
16	Segmento m	Segmento [H, E]	m = 5.19

Imagen 2. Protocolo de construcción (Problema 1)

La idea de la demostración es bien conocida: Si E, F, G, H denotan los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA del cuadrilátero, entonces tenemos

$$\frac{BA}{BE} = \frac{BC}{BF} = 2,$$

y por el teorema recíproco de Thales los segmentos AC y EF deben ser paralelos. Un razonamiento similar nos permite afirmar que también AC y HG son paralelos, de donde se sigue que los lados EF y HG del cuadrilátero EFGH son paralelos. De modo análogo se comprueba que los lados FG y EH son paralelos.

El protocolo de construcción se muestra en la Imagen 2. Si ahora consultamos a GeoGebra sobre la veracidad del teorema, obtenemos los resultados que pueden verse en la Imagen 3.

19	Valor Lógico a	Comprueba[SonParalelas[l, j]]	a = true
20	Lista lista1	CompruebaDetalles[SonParalelas[l, j]]	lista1 = {true}

20 / 20   2 s

Imagen 3. Resultados del demostrador automático

Como puede comprobarse, no surgen grandes sorpresas y GeoGebra no tiene dificultades en devolver el valor "true" a nuestra consulta sobre si son paralelos los segmentos EF y HG, representados por j y l en nuestra construcción.

Para un análisis más profundo sobre el Teorema de Varignon y algunos problemas que surgen en el proceso de su demostración automática, el lector puede consultar (Botana y Recio 2016).

3. Segunda propuesta

Problema 2: *Una circunferencia está inscrita en un trapecio ABCD de lados paralelos AD y BC. La circunferencia es tangente a los lados AB y CD en K y L respectivamente, y a las bases AD y BC en M y N respectivamente. Si Q es el punto de intersección de los segmentos BM y AN, demuestra que KQ es paralelo a AD.*

Este problema y el siguiente se han extraído de la extensa colección de problemas de Geometría plana recopilada en (Prasolov 1986), fuente inagotable de ejemplos con los que poner a prueba la capacidad demostrativa de GeoGebra.

Podemos demostrar este enunciado recurriendo de nuevo al Teorema de Thales. Una forma de comprobar que AD y KQ son paralelos es demostrando que

$$\frac{AK}{KB} = \frac{MQ}{QB}.$$

Ahora bien, por las propiedades de las tangentes trazadas desde un punto a una circunferencia, tenemos que BK=BN y AK=AM. Además sabemos que las bases del trapecio son paralelas, y por el Teorema de Thales aplicado a los triángulos semejantes QMA y QBN debemos tener

$$\frac{MQ}{BQ} = \frac{AM}{BN} = \frac{AK}{KB},$$

como queríamos demostrar.

Vamos ahora a representar el problema con Geogebra. En el enunciado nos encontramos con una situación geométrica de partida más compleja, que incluye la construcción de un trapecio con todos sus lados tangentes a una circunferencia. Existen diversas formas de afrontar esta construcción, y de la elección adecuada depende que nuestro demostrador automático sea capaz de concluir la veracidad o no del enunciado.

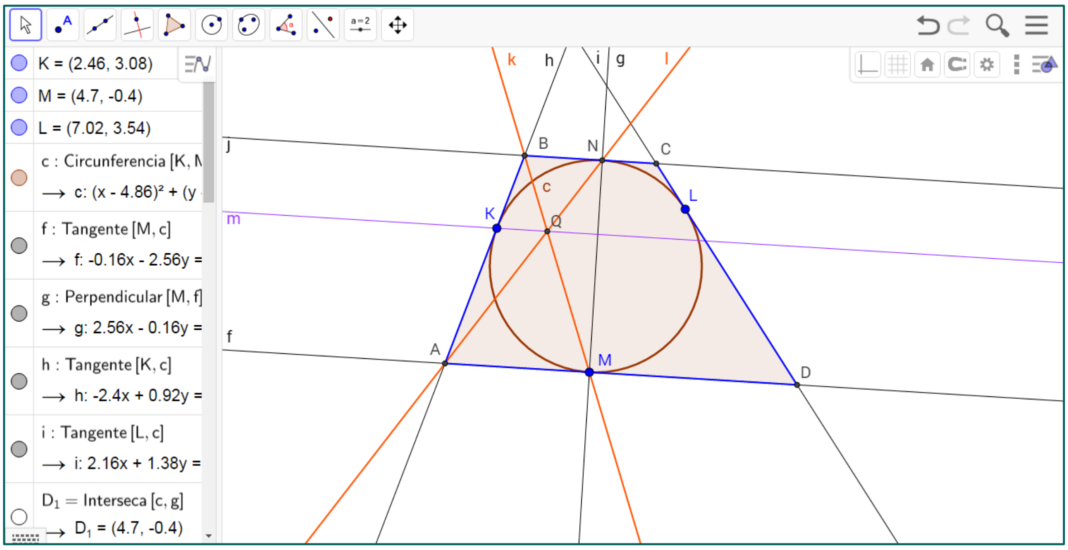

Imagen 4. Construcción del problema 2 (primera versión)

	Nombre	Descripción	Valor
1	Punto K		K = (2.46, 3.08)
2	Punto M		M = (4.7, -0.4)
3	Punto L		L = (7.02, 3.54)
4	Circunferencia c	Circunferencia que pasa por K, M, L	c: (x - 4.86)² + (y - 2.16)² = 6.58
5	Recta f	Tangente a c que pasa por M	f: -0.16x - 2.56y = 0.29
6	Recta g	Recta que pasa por M perpendicular a f	g: 2.56x - 0.16y = 12.1
7	Recta h	Tangente a c que pasa por K	h: -2.4x + 0.92y = -3.06
8	Recta i	Tangente a c que pasa por L	i: 2.16x + 1.38y = 20.07
9	Punto D_1	Punto de intersección de c, g	D_1 = (4.7, -0.4)
9	Punto N	Punto de intersección de c, g	N = (5.01, 4.72)
10	Recta j	Tangente a c que pasa por N	j: 0.16x + 2.56y = 12.88
11	Punto B	Punto de intersección de h, j	B = (3.13, 4.84)
12	Punto C	Punto de intersección de j, i	C = (6.32, 4.64)
13	Punto D	Punto de intersección de i, f	D = (9.72, -0.71)
14	Punto A	Punto de intersección de f, h	A = (1.21, -0.19)

Imagen 5. Protocolo de construcción (Problema 2 – versión 1)

A continuación presentamos dos construcciones posibles. En la primera, creamos inicialmente los tres puntos K, L, M, que serán puntos de tangencia entre la circunferencia y el trapecio ABCD. Los tres puntos van a determinar la circunferencia inscrita al trapecio, de modo que trazando las correspondientes tangentes a la misma en K, L, y M obtenemos las rectas que contienen los lados AB, CD y AD. Si trazamos ahora una recta perpendicular al lado AD que pase por M y hallamos su intersección con la circunferencia, obtenemos el punto de tangencia N de la segunda base del trapecio, y la tangente correspondiente por dicho punto completa la figura de un trapecio que satisface las condiciones del problema.

El protocolo de construcción se puede ver en la Imagen 5.

Ahora podemos trazar las rectas AN y BM, y obtener su punto de intersección Q. ¿Se confirmará que la recta KQ (de nombre m en GeoGebra) es siempre paralela a la base AD (de nombre f) del trapecio? .Utilizamos de nuevo nuestro comando "mágico" y…

```
a = Comprueba[SonParalelas[f, m]]
⟶  a indefinido
```

Imagen 6. Resultado indefinido de la primera construcción

¡Vaya! Algo falla… GeoGebra no es capaz de responder ni afirmativa ni negativamente la pregunta, e incluso en ocasiones se ha quedado bloqueado… Al menos del modo en que hemos realizado la construcción. No vamos a entrar aquí en los detalles que hay detrás de esas dificultades que el demostrador automático encuentra en su intento de hallar una respuesta. Sin embargo, merece la pena señalar que cuando utilizamos el comando "Intersección" para hallar los dos puntos comunes entre una recta y una circunferencia GeoGebra trata ambos puntos *indistintamente*, mientras que nosotros vamos a utilizarlos de forma *diferenciada*. Esto a menudo provoca que el programa no pueda concluir la veracidad de la afirmación geométrica que tenemos entre manos, al no tener claro cuál de los dos puntos se está utilizando en un momento determinado de la construcción.

¿Será posible abordar el problema de una forma que permita a GeoGebra acabar con éxito su labor de comprobación? Cambiemos nuestra construcción por esta otra: Trazamos primero el segmento MN que une los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados AD y BC respectivamente. Este segmento será en realidad su diámetro, y su punto medio será su centro O. Con este punto y radio OM trazamos la circunferencia, y con la herramienta "Punto en" elegimos dos puntos K y L sobre la misma, que serán los puntos de tangencia sobre los lados AB y CD. Trazamos dichas tangentes a la circunferencia en esos puntos y así finalizamos la construcción del trapecio.

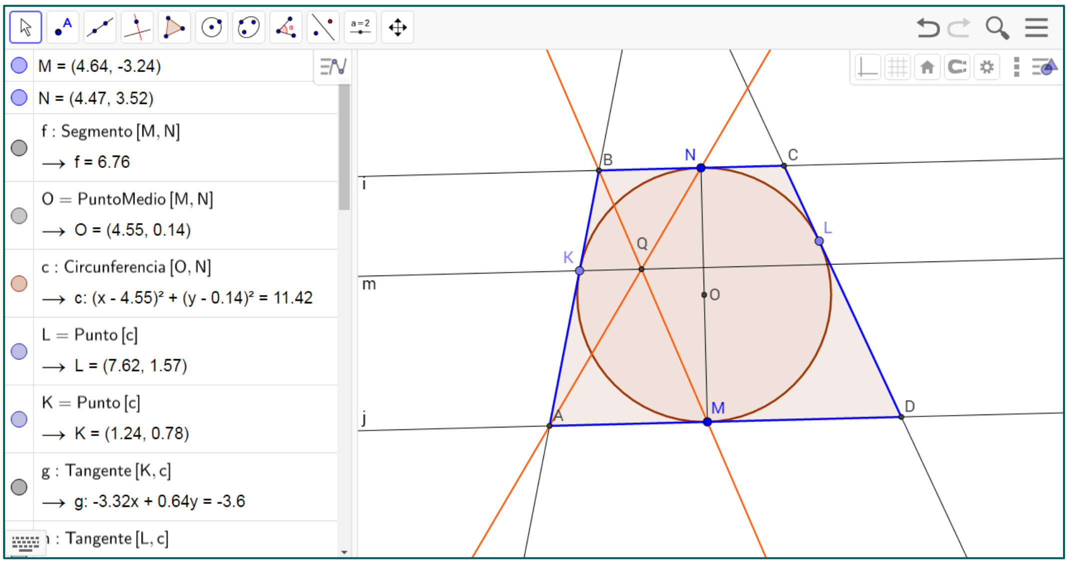

Imagen 7. Construcción del problema 2 (versión segunda)

⋮	Nombre	Descripción	Valor
1	Punto M		M = (4.64, -3.24)
2	Punto N		N = (4.47, 3.52)
3	Segmento f	Segmento [M, N]	f = 6.76
4	Punto O	Punto medio de M, N	O = (4.55, 0.14)
5	Circunferencia c	Circunferencia que pasa por N con centro O	c: (x - 4.55)² + (y - 0.14)² = 11.42
6	Punto L	Punto sobre c	L = (7.62, 1.57)
7	Punto K	Punto sobre c	K = (1.24, 0.78)
8	Recta g	Tangente a c que pasa por K	g: -3.32x + 0.64y = -3.6
9	Recta h	Tangente a c que pasa por L	h: 3.06x + 1.43y = 25.56
10	Recta i	Recta que pasa por N perpendicular a f	i: 0.17x - 6.76y = -22.99
11	Recta j	Recta que pasa por M perpendicular a f	j: 0.17x - 6.76y = 22.69
12	Punto B	Punto de intersección de g, i	B = (1.75, 3.45)
13	Punto C	Punto de intersección de i, h	C = (6.68, 3.57)
14	Punto A	Punto de intersección de g, j	A = (0.44, -3.35)
15	Punto D	Punto de intersección de j, h	D = (9.8, -3.11)

⏮ ◀◀ 22 / 22 ▶▶ ⏭ ⏸ 2 s

Imagen 8. Protocolo de construcción (Problema 2 – versión 2)

Podemos ahora añadir el resto de elementos que aparecen en el enunciado del problema, obteniendo por último la recta KQ. Y ahora, utilizando de nuevo los comandos demostradores de Geogebra, obtenemos una respuesta afirmativa respecto a la veracidad del enunciado (ver Imagen 9). Sin embargo, advertimos al lector que en equipos de poca potencia podemos encontrarnos con que, o bien el demostrador se bloquea, o bien no consigue un resultado definitivo y devuelve el valor "indefinido". También hemos podido observar que en la versión Windows descargada e instalada en un ordenador, los comandos "Comprueba[]" y "CompruebaDetalles[]" son sustituidos respectivamente por "Demuestra[]" y "DemuestraDetalles[]". Es de suponer que, siendo esta funcionalidad muy reciente en el software Geogebra y estando actualmente en continuo desarrollo, nos encontremos con algunas deficiencias en cuanto a rendimiento e implementación que en versiones posteriores se irán corrigiendo.

```
a = Comprueba [SonParalelas [m, j]]
⟶ a = true
lista1 = CompruebaDetalles [SonParalelas [m, j]]
⟶ lista1 = {true, {"SonIguales[M,N]"}}
```

Imagen 9. Conclusión del demostrador automático (Problema 2 – versión 2)

Es interesante observar el resultado que el comando CompruebaDetalles[] nos devuelve en esta ocasión. Aquí GeoGebra nos está diciendo "La afirmación es verdadera salvo cuando los puntos M y N coinciden". En efecto, al usar este comando, GeoGebra devuelve una lista cuyo primer elemento es "true" si la afirmación es generalmente válida, seguido de las así llamadas condiciones de degeneración, es decir, de las circunstancias bajo las que la afirmación (al menos desde un punto de vista algebraico) deja de ser cierta.

4. Tercera propuesta

Nuestra tercera propuesta del artículo anterior contenía una errata que aparece aquí corregida.

Problema 3: *En el cuadrado ABCD se trazan dos rectas l_1 y l_2 que pasan por el vértice A. Estas rectas intersecan los lados del cuadrado. Se trazan ahora rectas perpendiculares BB_1, BB_2, DD_1 y DD_2 a estas rectas. Demostrar que los segmentos B_1B_2 y D_1D_2 son perpendiculares.*

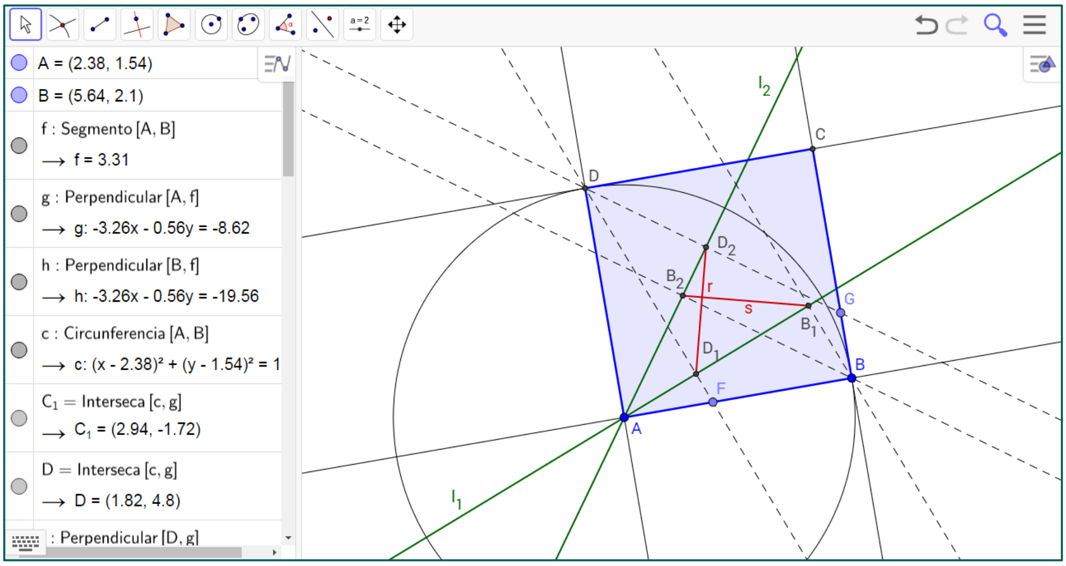

Imagen 10. Construcción del tercer problema

Una forma de acercarnos a la demostración de este enunciado puede basarse en comprobar, usando los criterios de congruencia para triángulos, que los triángulos AB_1B_2 y DD_1D_2 son congruentes y que tienen lados respectivos perpendiculares entre si (en realidad el segundo triángulo se obtiene girando el primero 90º en el sentido horario respecto al centro del cuadrado.

Nuevamente, la forma de construir el cuadrado es de vital importancia si queremos obtener una respuesta definida de GeoGebra. Aquí hemos optado por trazar primero un segmento AB, después una recta perpendicular a este segmento en A, sobre la que hemos llevado mediante una circunferencia centrada en A la distancia AB para obtener el punto D. Ya sólo queda trazar una recta paralela a AB que pase por D. El protocolo completo de construcción del cuadrado puede verse en la Imagren 11.

⋮	Nombre	Descripción	Valor
1	Punto A		A = (2.38, 1.54)
2	Punto B		B = (5.64, 2.1)
3	Segmento f	Segmento [A, B]	f = 3.31
4	Recta g	Recta que pasa por A perpendicular a f	g: -3.26x - 0.56y = -8.62
5	Recta h	Recta que pasa por B perpendicular a f	h: -3.26x - 0.56y = -19.56
6	Circunferencia c	Circunferencia que pasa por B con centro A	c: (x - 2.38)² + (y - 1.54)² = 10.94
7	Punto C_1	Punto de intersección de c, g	C_1 = (2.94, -1.72)
7	Punto D	Punto de intersección de c, g	D = (1.82, 4.8)
8	Recta i	Recta que pasa por D perpendicular a g	i: 0.56x - 3.26y = -14.63
9	Punto C	Punto de intersección de i, h	C = (5.08, 5.36)

Imagen 11. Protocolo de construcción (Problema 3)

Una vez terminada esta fase, es fácil ilustrar el problema que nos ocupa, construyendo rectas l_1, l_2 que intersecan los lados BC y CD en los puntos P y Q respectivamente . Y en esta ocasión GeoGebra confirma la veracidad del enunciado.

Imagen 11. Resultados del demostrador de GeoGebra (Problema 3)

5. Cuarta propuesta

Iniciamos esta serie de actividades con un teorema clásico de geometría elemental y terminamos con una joya de la geometría euclídea. Se trata de la demostración de la existencia de la Recta de Euler, íntimamente conectada con la circunferencia de los nueve puntos y el Teorema de Feuerbach.

Problema 4: *Demostrar que el ortocentro, el baricentro y el circuncentro de un triángulo ABC siempre están alineados.*

Una excelente referencia sobre este resultado es (Coxeter 1989), donde puede encontrarse su demostración, también disponible en numerosas publicaciones y sitios web. La construcción en GeoGebra, dado un triángulo arbitrario ABC, de su ortocentro H, baricentro M y circuncentro O se muestra en la Imagen 12, en la que hemos trazado las alturas y medianas desde los vértices A y B, así como las mediatrices de los segmentos AB y BC.

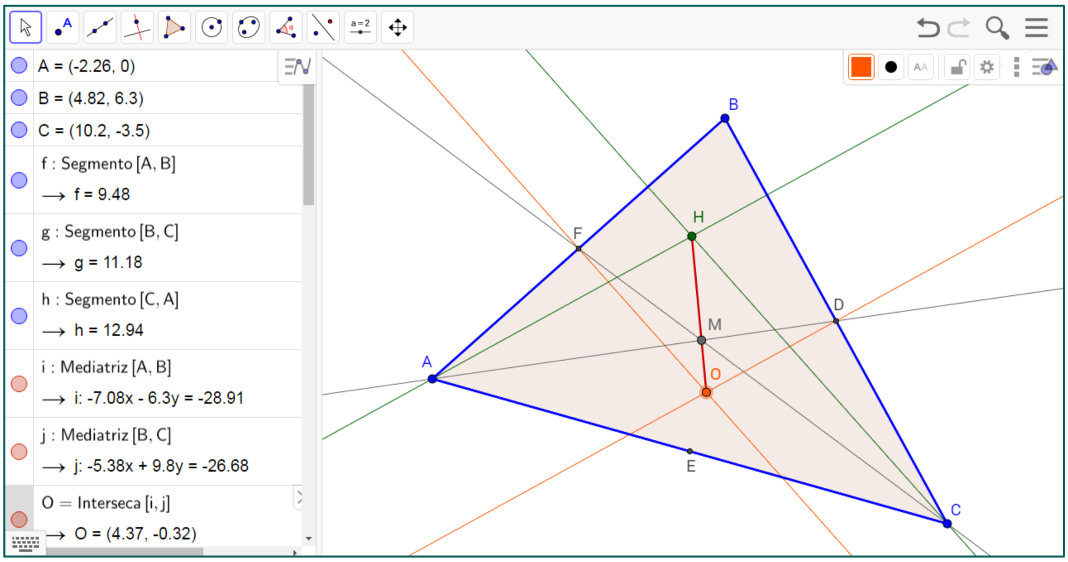

Imagen 12. Construcción de la recta de Euler

Una vez completada la construcción lanzamos nuestro demostrador automático, esta vez acompañado del comando “EstánAlineados[H,M,O]”, y obtenemos los siguientes resultados:

```
a = Comprueba[EstánAlineados[H, M, O]]
→ a = true
lista1 = CompruebaDetalles[EstánAlineados[H, M, O]]
→ lista1 = {true, {"EstánAlineados[A,B,C]"}}
```

Imagen 13. Resultados del demostrador automático (Problema 4)

Observamos que con el comando "CompruebaDetalles[]" aparece una condición de degeneración bastante natural, puesto que cuando los vértices A, B, C están alineados el triángulo ABC degenera en un segmento y la construcción deja de tener sentido. Sin embargo, es importante recalcar aquí que las condiciones de no degeneración son de naturaleza algebraica, y no siempre se corresponden con las condiciones de no degeneración que podríamos considerar naturales desde un punto de vista geométrico.

6. Conclusiones

En los ejemplos presentados en este artículo hemos hecho un uso práctico del demostrador automático que GeoGebra incorpora en sus últimas versiones. Hemos comprobado su comportamiento frente a varios problemas geométricos de distinto nivel de dificultad, y, si bien hemos conseguido obtener respuestas definidas de GeoGebra, hemos observado que se debe prestar cierto cuidado en el diseño de las construcciones geométricas necesarias, y que en ocasiones presenta un comportamiento inestable y dependiente de la plataforma y ordenador utilizados. Es de esperar que estas irregularidades vayan corrigiéndose en las próximas actualizaciones del software, y que en un futuro próximo tengamos disponible un software gratuito que incluya un demostrador automático sólido y potente.

Una pregunta importante que queda en el aire y que no parece sencilla de responder es la siguiente: ¿Cómo aprovechar esta nueva herramienta que GeoGebra ofrece en la práctica docente y, más en particular, en la didáctica de la Geometría?

Bibliografía

Botana, F, Recio, T. (2016). On the unavoidable uncertainty of truth in dynamic geometry proving. *Mathematics in Computer Science 10*, No. 1, 5-25.

Coxeter, H.S.M. (1989). Introduction to Geometry. Wiley.

Oliver, P. N. (2001). Pierre Varignon and the Parallelogram Theorem. *Mathematics Teacher, Band 94*, Nr. 4, 316-319.

Oliver, P. N. (2001). Consequences of Varignon Parallelogram Theorem. *Mathematics Teacher, Band 94*, Nr. 5, 406-408

Prasolov, V (1986). Problems in Plane Geometry, Nauka, Moscow.

Ueno Jacue, C (2016). Demostraciones geométricas automáticas en GeoGebra. *Revista Números 93*, 141-150.

Carlos Ueno Jacue. Profesor de Matemáticas en el Kodály Zoltán Gimnázium de Pécs (Hungría) durante el curso escolar 2016/17. Es Doctor en Matemáticas por la Universidad Complutense de Madrid y su campo de investigación principal está relacionado con el estudio de las imágenes de aplicaciones polinómicas entre espacios euclídeos. **cuenjac@gmail.com**