NÚMEROS
Revista de didáctica de las matemáticas
N° 32, diciembre de 1997, págs. 54-66

Fronteras en el uso de las calculadoras gráficas

Angel Gutiérrez

Introducción

El uso de calculadoras gráficas en las clases de matemáticas de Enseñanza Secundaria y Universidad se está extendiendo más cada día. Hay numerosas publicaciones dedicadas a las calculadoras gráficas, en las que se recogen resultados de investigaciones, experiencias de clase o propuestas de enseñanza para los diversos temas de matemáticas de estos niveles educativos, y casi todos los nuevos libros de texto de matemáticas de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato incluyen secciones dedicadas a esta herramienta. Se trata de una tendencia imparable que crecerá en los próximos años. Es conveniente, por tanto, que los profesores de matemáticas tengan, por lo menos, una visión global de estas herramientas didácticas, las distintas opciones y sus posibilidades en diversos temas de matemáticas.

Para que un profesor esté en condiciones de sacar el máximo provecho de una calculadora gráfica, es necesario que sepa cómo integrarla en sus clases, que disponga de un material de trabajo atractivo para sus alumnos y capaz de favorecer el aprendizaje de los contenidos matemáticos implicados y, evidentemente, que conozca a fondo su funcionamiento. Por otra parte, las calculadoras gráficas, como cualquier material didáctico, tienen un campo de actuación en el que se puede sacar el máximo provecho de su utilización, pero también tienen sus limitaciones, situaciones en las que su uso entorpece o, en el mejor de los casos, no facilita el aprendizaje. Por lo tanto, tan importante como saber cuándo y cómo usarlas es saber cuándo y cómo *no* usarlas. El objetivo de este texto es hacer unas reflexiones, basadas en mi experiencia personal, con la finalidad de señalar algunas fronteras en el uso de las calculadoras gráficas.

Las ideas expuestas aquí tienen su origen en una asignatura de

Didáctica de las Matemáticas de la Facultad de Matemáticas. Es una asignatura optativa de 2¼ ciclo, por lo que todos los estudiantes llegan a ella con los conocimientos de matemáticas adquiridos tanto en BUP y COU como en los dos primeros cursos de la Facultad. Una parte del curso se dedica a la didáctica del análisis matemático, y las prácticas se dedican a aprender el uso de la calculadora gráfica TI-82 (una de las calculadoras de Texas Instruments de la serie ochenta) en este contexto. Los estudiantes resuelven problemas relacionados con diversos conceptos basándose en la representación gráfica de funciones y el cálculo de puntos extremos, asíntotas, tangencia, corte de curvas, etc. Aunque la primera aproximación a la solución del problema es siempre gráfica, cuando es útil se combina el uso de la pantalla gráfica y la función "traza" con el uso de la tabla de valores.

Un objetivo continuo de este tema es ir más allá del simple aprendizaje de secuencias de teclas y procedimientos algorítmicos. Para ello, relacionamos la actividad de manipulación en la calculadora con los conceptos o propiedades matemáticos implicados, de forma que siempre buscamos una confirmación o explicación teórica tanto de la validez de los resultados aparentemente correctos como de los resultados erróneos. Después de obtenido un resultado, pido a mis alumnos que lo analicen, relacionándolo con algún concepto o teorema que les permita confirmarlo o rechazarlo. Algunos problemas están seleccionados para mostrarles casos en los que la calculadora gráfica no ayuda a resolver el problema, no permite representar de manera adecuada un concepto o propiedad matemáticos, o da información errónea.

En este artículo propongo varios problemas que dan pie a reflexiones sobre estos aspectos, pues son casos que señalan claramente la necesidad de que los estudiantes analicen los resultados que han obtenido o la frontera en el uso correcto de la calculadora gráfica. El artículo está basado en la calculadora TI-92 (la calculadora gráfica más moderna de Texas Instruments). No obstante, es posible obtener resultados equivalentes con cualquier otra calculadora gráfica, e incluso con ordenadores, sin más que adaptar oportunamente el tamaño de la ventana o algunos coeficientes de las funciones, ya que las limitaciones que describo no son propias de una determinada máquina, sino de todo el software/ hardware usuales en la actualidad y, especialmente, dependen de la resolución de la pantalla o de la precisión de cálculo.

Aparición de resultados inesperados

Un ejemplo típico de uso de la calculadora gráfica es para representar funciones como las trigonométricas. Me basaré en la función f(x) = cos x. Con frecuencia, cuando los estudiantes introducen los datos necesarios para representar y = cos x en el intervalo $[-\pi, \pi]$, obtienen una gráfica[1] formada por un segmento horizontal en y = 1 (Figura 1).

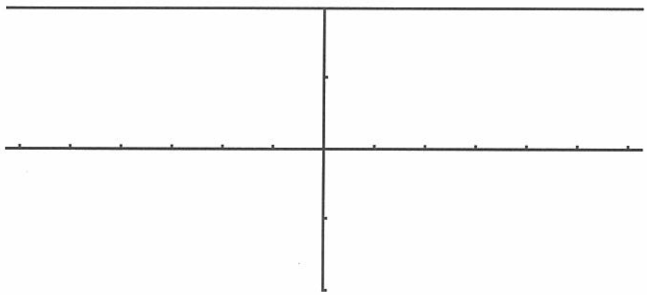


Figura 1.

Ante esta gráfica, se pueden observar dos reacciones de los estudiantes: Aquéllos que aceptan el resultado y siguen trabajando con él, y los que se quedan sorprendidos porque esperaban ver la conocida curva (Figura 2-a). En el segundo caso, la sorpresa se debe a que los estudiantes han contrastado la gráfica de la pantalla con sus conocimientos teóricos, que les dicen que, en el intervalo de x especificado, la función coseno debe describir un periodo completo.

El "fallo" (más bien el resultado sorprendente) se debe a que la calculadora estaba programada en grados, en vez de en radianes, por lo que realmente ha representado la función y = cos x para los valores de x en [-3.1415°, 3.1415°]. Nos encontramos, pues, ante un resultado inesperado porque la calculadora, aparentemente, no ha representado los datos que le hemos introducido. Ejemplos como éste deben servir para que los estudiantes comprendan la necesidad de validar los resul-

[1] Al representar funciones f(x) = cos nx, lo haremos siempre con los parámetros de pantalla (window): xmin = $-\pi$, xmax = π, xscl = 0.5, ymin = -1, ymax = 1, yscl = 0.5, xres = 1

tados dados por la calculadora contrastándolos con sus conocimientos matemáticos previos.

Uso de una calculadora más allá de su capacidad gráfica

Siguiendo en el mismo tema de trabajo, para estudiar la periodicidad de las funciones trigonométricas y la relación entre la amplitud del periodo y la variable independiente, podemos representar diversas funciones de la familia $\{y = \cos nx, n = 1, 2, 3, ...\}$.

a)

b)

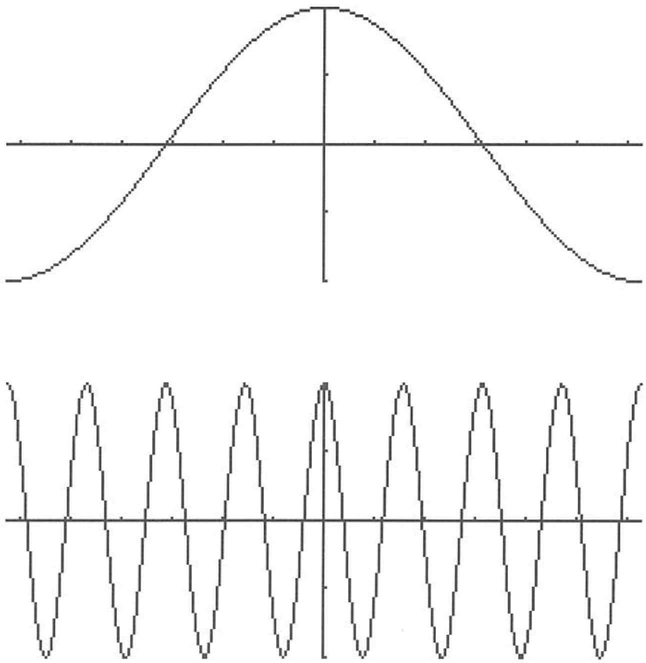
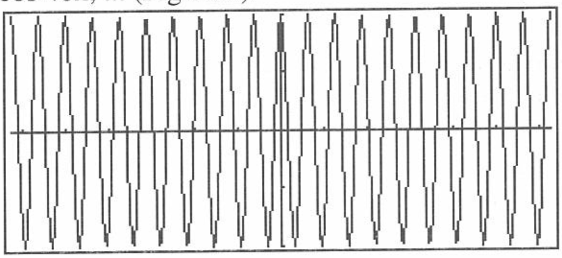


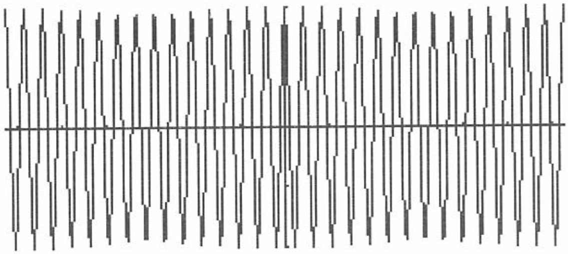
Figura 2. Gráficas de $y = \cos x$ e $y = \cos 8x$.

Observando las gráficas de cos x, cos 2x, cos 3x, ... (la Figura 2 incluye algunas de ellas), se puede descubrir la relación entre *n* y la amplitud del periodo o, desde un planteamiento visual, se observa que las ondulaciones de la curva se van estrechando al crecer *n*. Si queremos aprovechar este ejercicio para hacer una aproximación al caso límite, cuando n crece, podemos representar funciones como y = cos 20x, y = cos 30x, y = cos 40x, ... (Figura 3).

a)



b)



c)

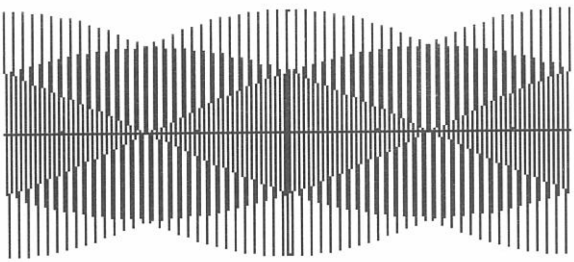


Figura 3. Gráficas de y = cos 20x, y = cos 30x e y = cos 60x.

La gráfica de la Figura 3-a mantiene el aspecto de las funciones f(x) = cos nx, pero no ocurre lo mismo con las otras gráficas de la Figura 3. Dejando aparte la innegable calidad estética de diseños como el de la Figura 3-c, es evidente que, al representar y = cos 60x en la TI-92, obtenemos una gráfica completamente inútil para una clase de trigonometría. Hemos rebasado los límites de la TI-92 y estamos pidiendo a esta calculadora algo que no puede hacer. Realmente, ya la gráfica de y = cos 20x presenta algunas inexactitudes matemáticas, aunque poco destacadas, pues los máximos y mínimos que se ven en la pantalla no son siempre +1 y -1, respectivamente. Esto se nota más fácilmente si se toman como referencia los lados horizontales del marco de la pantalla.

Es evidente que hay una relación directa entre la resolución de la pantalla de una calculadora u ordenador y el límite de uso de los mismos. La anterior representación de y = cos 20x en calculadoras como la TI-82 o anteriores es casi irreconocible, en la TI-92 está en el límite de las posibilidades de la máquina, y en un ordenador se ve correctamente. Cuando mis alumnos se encontraron con "gráficas" como la de la Figura 3-c, decidieron seguir representando valores de *n* mayores, para ver los diferentes diseños que se crean. De esta forma, llegaron a obtener gráficas análogas a la de la Figura 4, ¡¡que corresponde a y = cos 230x!! Los lectores que utilicen una calculadora TI-82, pueden observar una situación similar al representar la función y = cos 86x.

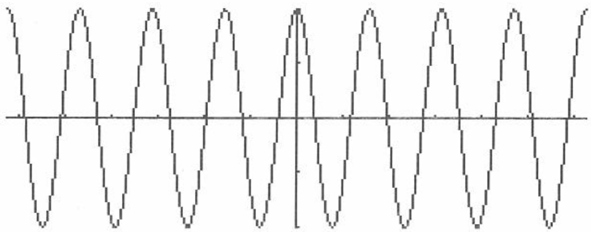


Figura 4. Gráfica de y = cos 230x.

Generalizando lo observado en estos ejemplos, la conclusión es que todas las pantallas, tanto de calculadoras como de ordenadores, tienen una capacidad de representación limitada, marcada por su resolución, por lo que (1) si un profesor quiere utilizar una calculadora gráfica, no debe intentar representar funciones cuyas gráficas sean ilegibles o puedan transmitir a los estudiantes información inexacta o errónea y (2) si el profesor necesita representar gráficamente esas funciones, deberá recurrir a una calculadora con pantalla de más calidad o a un ordenador.

Uso de una calculadora más allá de su capacidad de cálculo

La capacidad de cálculo de las últimas generaciones de calculadoras es sorprendente. No obstante, no es difícil encontrarnos con funciones matemáticas que toman valores más allá de estos límites de cálculo, por ejemplo en discontinuidades, asíntotas, proximidades de límites, etc. En tales casos, la calculadora realiza redondeos cuyos errores pueden acumularse y dar lugar a resultados demasiado alejados de los reales.

Vamos a analizar el comportamiento de la función $f(x) = \frac{1 - \cos x^6}{x^{12}}$ en el intervalo [-2, 2] (Finney et al., 1994). Dicho análisis debe incluir una descripción de las principales características gráficas de la función, así como los valores de los máximos, mínimos, y otros puntos singulares. Puesto que el objetivo de este artículo no es resolver el problema con todo detalle, sino plantear las ventajas e inconvenientes del uso de una calculadora gráfica para resolverlo, sólo apuntaré algunas propiedades matemáticas de la función, sin entrar en su estudio o demostración detallados. Además, me basaré sólo en la gráfica de f(x), sin utilizar otros procedimientos más completos, como representar también f'(x).

A partir de los resultados básicos de análisis matemático, sabemos que f(x) está definida en $A = R - \{0\}$, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in A$, es continua en A, y su límite cuando *x* tiende a 0 es 1/2. También es fácil determinar los infinitos ceros de esta función ($x_n = \pm \sqrt[6]{2\pi n}$, para todo n = 1, 2, 3, ...). No obstante, estas propiedades dicen poco sobre las caracter'sticas de esta función y casi nada sobre la forma de su gráfica. Intentar dibujarla por los procedimientos convencionales formales es prácticamente imposible, por lo que éste es un caso claro en el que la calculadora gráfica permite avanzar más y llegar a un conocimiento más profundo de la función que los métodos convencionales de enseñanza.

Los primeros tanteos con el tamaño de la ventana[2] llevan enseguida a resultados como la Figura 5. Las primeras propiedades de la función que se descubren en esta gráfica son su simetría y su acotación. La primera se verifica teóricamente enseguida (*x* tiene siempre exponente par), mientras que la segunda no es tan fácil. También llama la atención el comportamiento de la gráfica alrededor del origen y la presencia de ceros cerca de ±1.5.

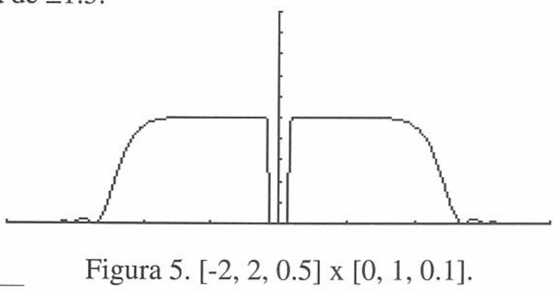


Figura 5. [-2, 2, 0.5] x [0, 1, 0.1].

[2] En los pies de las Figuras 5 y siguientes se indican los parámetros de pantalla (window) correspondientes, en la forma [xmin, xmax, xscl] x [ymin, ymax, yscl]. Se toma siempre xres = 1.

Como la función es simétrica, en adelante se puede limitar el estudio a la mitad del intervalo de abcisas, lo cual redundará en un mayor detalle de las gráficas en la pantalla (comparar las Figuras 5 y 6). Esto no es evidente para todos los estudiantes; varios de mis alumnos hacían cálculos en paralelo (por ejemplo, de ceros) para valores negativos y positivos de x, obteniendo a veces resultados diferentes sin que ello les preocupara.

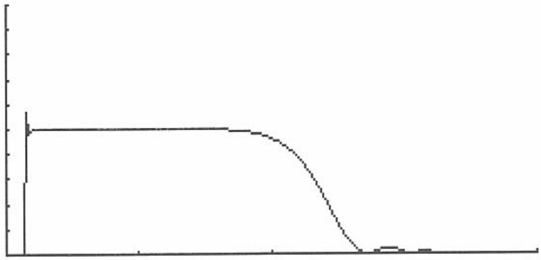


Figura 6. [0, 2, 0.5] x [0, 1, 0.1].

La Figura 6 sugiere dividir el estudio de f(x) en varias partes gráficamente diferentes que, aproximadamente, son (a) el intervalo [0, 0.2], donde se observan un salto desde y = 0 y un "pico", (b) el intervalo [0.2, 1.5], donde la curva tiene una parte aparentemente horizontal y después decrece, y (c) el intervalo [1.5, 2], donde se ven varios ceros. La Figura 7 es el resultado de un zoom sobre la gráfica en el primer intervalo.

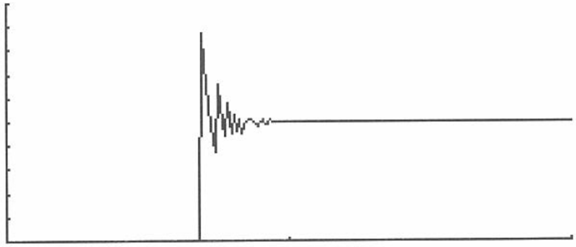


Figura 7. [0, 0.2, 0.1] x [0, 1, 0.1].

Al comparar las Figuras 6 y 7, observamos que la calculadora está proporcionando información inexacta sobre el valor de los mínimos y máximos locales (en la Figura 6 el máximo absoluto es menor que 0.6, mientras que en la Figura 7 éste es mayor que 0.8) y sobre el número de oscilaciones (muchas son tan estrechas que la calculadora no puede representarlas). Si hacemos zooms más profundos alrededor del máximo absoluto, se llega a la conjetura de que el máximo es f(0.06813) = 1 (Figura 8).

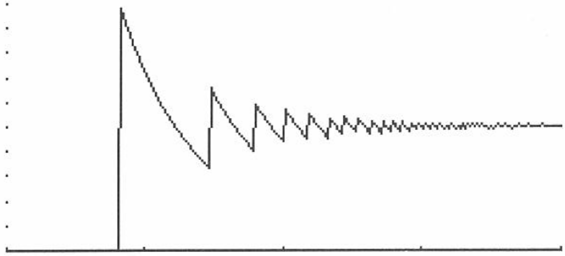


Figura 8. [0.06, 0.1, 0.01] x [0, 1, 0.1].

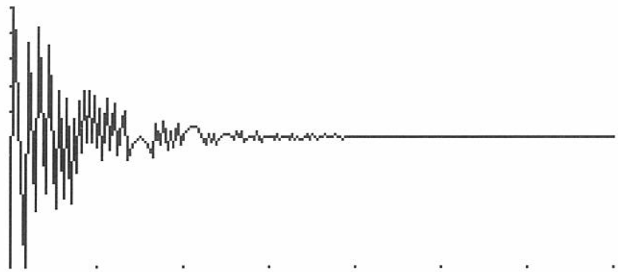
Algo que los estudiantes aprenden al representar en las calculadoras TI-nn funciones con puntos de discontinuidad con límites finitos o con asíntotas verticales es que en la pantalla aparecen unas líneas verticales que unen los dos lados de la discontinuidad[3]. Esta idea llevó a mis alumnos a decir que f(x) tiene una infinidad de discontinuidades y que está formada por una sucesión de arcos (Figura 8). Una vez más, se ve la necesidad de contrastar las conjeturas generadas a partir de la observación de la pantalla mediante el análisis teórico de la función. En este caso, no existen tales discontinuidades, ya que f(x) es continua en R - {0}. Más adelante veremos el motivo de este comportamiento de la calculadora.

La figura 8 muestra que, en el intervalo [0, 0.2], la función no es tan simple como parecen indicar las Figuras 5 y 6. Efectivamente, al aproximarnos un poco más, descubrimos que lo que en la pantalla

[3] En algunas calculadoras estas líneas verticales no aparecen y en otras es posible evitarlas algunas veces (en la TI-92, activando la opción de estilo de función "dot").

anterior se veía como un segmento horizontal, en las siguientes pantallas (Figura 9) se ve como una sucesión de oscilaciones. El lector puede, si lo desea, continuar la secuencia de zooms iniciados en las Figuras 7, 8-a y 9.

a)



b)

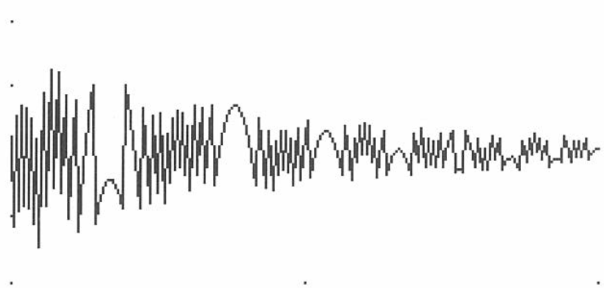


Figura 9. a) [0.08, 0.15, 0.01] x [0.45, 0.55, 0.01];
b) [0.11, 0.13, 0.01] x [0.498, 0.502, 0.001].

Un recorrido por la curva con la traza o la tabla de valores nos permite ver que, tal como indican las sucesivas gráficas, las oscilaciones son cada vez menores cuando nos alejamos de x = 0. La pregunta que debería surgir aquí es si llega un punto en el que estas oscilaciones desaparecen y la función se hace monótona decreciente entre ese punto y el primer cero o, por el contrario, las oscilaciones continúan indefinidamente, pero son tan pequeñas que la calculadora, a pesar de su potencia de cálculo, no las puede poner de relieve. La Figura 10 muestra[4] un intervalo cerca de x = 0.72084.

---

[4] La TI-82 no admite las dimensiones de esta ventana. El ancho y alto de su ventana no pueden ser menores que 10^{-8} y 10^{-9}, respectivamente.

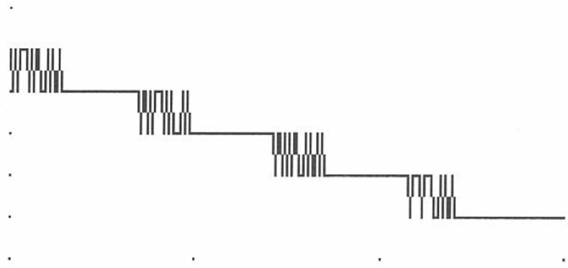


Figura 10. [0.7208420521, 0.7208420524, 1.E-10] x [0.499180431599, 0.499180431605, 1.E-10].

La Figura 11 muestra la gráfica de f(x) en el tercero de los intervalos indicados al principio de esta sección. La forma de esta parte de la gráfica muestra claramente la influencia del coseno del numerador.

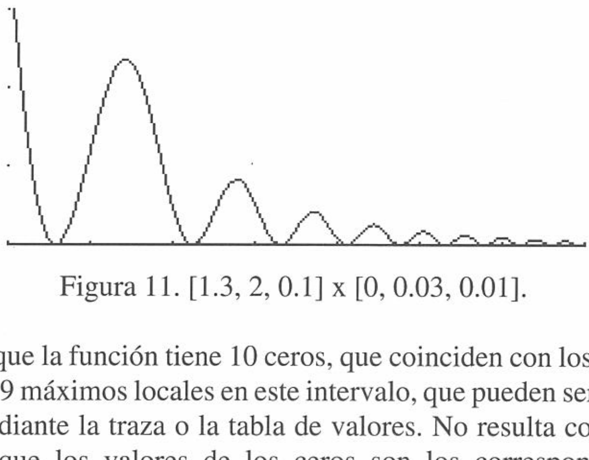


Figura 11. [1.3, 2, 0.1] x [0, 0.03, 0.01].

Se ve que la función tiene 10 ceros, que coinciden con los mínimos locales, y 9 máximos locales en este intervalo, que pueden ser determinados mediante la traza o la tabla de valores. No resulta complicado verificar que los valores de los ceros son los correspondientes a $x_n = \pm \sqrt[6]{2\pi n}$, para n = 1, ..., 10.

Finalmente, volviendo a las Figuras 7 y 8, vamos a estudiar el comportamiento de la función en el intervalo de las abcisas]0, 0.07]. La Figura 12 indica que f(x) = 0 para todo x en]-0.0681, 0.0681[- {0}. Ocultando los ejes se observa el hueco dejado por la calculadora en x = 0, donde f(x) no está definida. La traza y la tabla de valores confirman el resultado de la Figura 12, pues por todos los procedimientos se obtiene siempre f(x) = 0.

Figura 12. [-0.075, 0.075, 0.01] x [0, 1, 0.1], en modo "sin ejes".

Nos encontramos ante un caso en el que la calculadora ha sido forzada más allá de su capacidad de cálculo, pues nuestros conocimientos teóricos de la función chocan de lleno con estos resultados:

- El límite de f(x) cuando x tiende a 0 es 1/2, luego f(x) no puede ser constantemente nula en un intervalo alrededor del origen.

- A partir de la Figura 11 hemos calculado los 10 primeros ceros de f(x) en el semieje positivo, que están en]1.3, 2], y sus simétricos en el semieje negativo. Por lo tanto, f(x) no tiene ningún cero en [-1.3, 1.3].

El motivo de este comportamiento está en que, para valores de $|x| < 0.0681293$, $x^6 < 10^{-7}$ y $\cos x^6 > 0'99999999999999$ está tan próximo a 1 que la TI-92 no es capaz de trabajar con estos números, por lo que redondea a $\cos x^6 = 1$ y $f(x) = 0$. Como indicaba al final de la introducción, este problema no es específico de una calculadora en particular, sino que se da en cualquier calculadora u ordenador, si bien el valor de la abcisa en la que deja de ser f(x) = 0 cambia de una máquina a otra.

Los saltos verticales de la gráfica que observábamos en la Figura 8 son debidos también a errores de redondeo al calcular los valores de f(x). Por ejemplo, según la TI-92, f(0.07466093) = 0.3333337 y f(0.07466094) = 0.6666664, pero realmente f(0.07466093) = 0.5033017 y f(0.07466094) = 0.5033009. En consecuencia, las oscilaciones de la gráfica de f(x) existen realmente, incluso en el conjunto]-0.0681, 0.0681[- {0}, pero no son tan acusadas como las que muestra la calculadora.

Como resumen final, creo interesante destacar que, según hemos visto, la resolución de este ejercicio pone claramente de relieve dos importantes aspectos didácticos de las calculadoras gráficas:

1) En ocasiones, las calculadoras permiten a los estudiantes descubrir información sobre las funciones cuya existencia no podrán siquiera sospechar si se limitan a hacer un estudio por los procedimientos tradicionales de cálculo escrito. Es trabajo de los profesores mejorar los cursos tradicionales de análisis matemático introduciendo ejemplos y actividades que permitan aprovechar las capacidades gráficas de calculadoras y ordenadores.

2) En ocasiones, se obliga a las calculadoras a funcionar por encima de sus posibilidades, lo cual se traduce en que producen información inexacta o totalmente errónea. Es trabajo de los profesores prever, en la medida de lo posible, la aparición de esas situaciones, tanto para evitarlas como para utilizarlas de manera positiva. Son necesarias, por ejemplo, para hacer ver a los estudiantes que nunca deben reducir su actividad matemática a un trabajo mecánico de introducir datos en la calculadora u ordenador y copiar los resultados de la pantalla.

Bibliografía

Finney, R.L.; Thomas, G.B.; Demana, F.; Waits, B.K. (1994): *Calculus graphical, numerical, algebraic.* (Addison Wesley: N. York).

Angel Gutiérrez
Dpto. de Didáctica de la Matemática
Universidad de Valencia
Apartado 22045
46071 Valencia
angel.gutierrez@uv.es