

La Graduación de Dificultad en Puzzles y Rompecabezas

Por Manuel García Déniz y
José Antonio Rupérez Padrón
Club Matemático

La popularización de La Matemática es un objetivo presente en todas las asociaciones de profesores de matemáticas. Una de las actividades que lleva a cabo la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas, es el *Komando Matemático*.

En el año 2005, el *Komando* obtuvo el 1^{er} premio del Concurso Nacional convocado por Ciencia en Acción, dentro del apartado Laboratorio Matemático. Eso significó también representar a España en la fase internacional celebrada en Ginebra (Suiza) en noviembre del mismo año, en las instalaciones del CERN.



Somos un grupo de compañeros y compañeras, al que se une algún familiar (hijos/as, esposas/os,...) que alguna mañana del fin de semana, con los materiales necesarios -empaquetados en sus contenedores plásticos- metidos en las maletas de los coches, nos dirigimos a algún pueblo y montamos nuestro "chiringuito" en su plaza, patio de colegio, local cultural, etc. Muchas de las veces somos llamados por el profesorado del Centro escolar donde vamos, y, también, ellos establecen contactos con las concejalías de Educación o de Cultura del ayuntamiento correspondiente y concertamos horas y lugar.



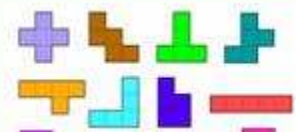
Una vez allí, en tableros o mesas, desplegamos nuestra colección de puzzles, juegos y otras actividades para que escolares y no escolares, con nuestra guía y asesoramiento, disfruten de unas horas de estas actividades y se beneficien de su conocimiento y práctica. Cuando se realiza en centros escolares, acuden también padres y hermanos que comparten la experiencia. En este ámbito solemos presentar un pequeño espectáculo de "Matemagia" que, intercalado en el tiempo, sirve de refrescante descanso en el frenético resolver de puzzles y rompecabezas. En ocasiones la entidad colaboradora o nosotros mismos, aportamos puzzles sencillos que damos como premios a los mejores "resolvedores" de puzzles y juegos. Luego, y

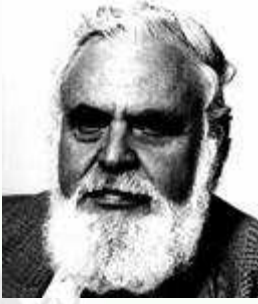
para culminar la actuación, nos vamos de comida a algún sitio de la zona.

Al tener tanta diversidad de "clientela", uno de los problemas que se presenta, al elegir y organizar el material que llevamos y exponemos, es el disponer de actividades adecuadas para cada edad y situación.

Así, hemos llegado a la conclusión de que de los más de doscientos puzzles y juegos que disponemos en el *Komando*, son suficientes unos treinta o cuarenta para una actuación. Pero de algunos de estos materiales no se aprovecha todo su potencial porque en sí mismo, ya son inapropiados para, por ejemplo, niños de infantil o primer ciclo, o bien son poco atractivos para alumnos de bachillerato. Por ello, estamos ahora empeñados, después de la experiencia de estos años, en conseguir para los principales puzzles, los más populares y sencillos, una graduación de la dificultad de los retos a presentar de tal manera que consigamos que sean atractivos y posibles para las diversas edades, incluidos los padres y profesores.

Presentamos a continuación esa graduación, dirigiéndonos a alumnos como receptores del *Komando*, y que hemos hecho con uno de los puzzles más conocidos: los pentaminos.





Por si alguno de los lectores no está familiarizado con ellos, indicamos que su origen, al menos el de su nombre, está en un registro que hizo Solomon W. Golomb en 1975. Hoy en día, liberada la marca, existen múltiples ediciones con variados materiales y nombres por todo el mundo.



Difundidos por Martin Gardner [1] y por Conway, se han hecho muy populares, formando parte, por ejemplo, de los juegos de ordenador y de mesa del tipo Tetris.

Una de las páginas WEB que tiene una buena colección de problemas con pentaminos es la siguiente:

<http://www.snaffles.demon.co.uk/pentanomes/pentanomes.html>

Y en esta otra dirección está un programa en Java, que permite resolver tableros rectangulares de distintas dimensiones en los que se pueden colocar huecos.

<http://godel.hws.edu/java/pent1.html>

Los ejercicios a realizar con los pentominos los hemos clasificado en cinco niveles: Muy Fácil (MF), Fácil (F), Regular (R), Difícil (D) y Muy Difícil o Imposibles (MDI).

En cada categoría, de forma gradual, vamos presentando problemas a resolver que van desde colocar las piezas sobre sus perfiles ya dibujados hasta otros en los que las soluciones son únicas o no existe solución.

Esta asignación de un problema a una categoría es, en algunos casos, provisional, sobre todo en los colocados como de dificultad Regular o Difícil, pudiendo subir o bajar de categoría en función de la preparación o de la experiencia que tengan los alumnos.

Para el nivel Muy Fácil se presenta toda la información; los tableros donde los alumnos deben colocar los pentominos, tiene ya las piezas dibujadas. En uno (MF 01), deben colocar las piezas en su sitio y se les indica su parecido con las letras que les dan nombre: f, n, L, I. P. T, U, V W X Y y Z. En los otros tableros de este nivel se utilizan figuras que recuerdan animales u objetos fácilmente identificables: elefante, torre, pingüino, camello, etc.

Para el nivel Fácil se oculta parte de la información, y los tableros pueden tener formas geométricas elementales o también siluetas de objetos o animales reconocibles. Los consideramos en dos niveles: aparecen parte de las piezas delimitadas y queda un 20 ó un 30% de la figura por resolver con las piezas no colocadas, o se indica la posición relativa de las piezas en el tablero (mediante sus nombres) y lo que deben encontrar es la orientación para que encajen.

Tanto para el nivel MF como para el F, se pueden tener unas fichas semejantes a las que se muestran, de tal manera que el tipo de cuestiones planteadas se adecuen al nivel de los alumnos. Indicamos sólo unos ejemplos de estas fichas, que llevan por detrás las soluciones o pistas para su resolución.

En el nivel intermedio, Regular, proponemos algunos de los ejercicios anteriores pero con la única presentación del tablero. También tableros no presentados anteriormente pero que se pueden resolver llenándolos con los pentaminos, de un número elevado de maneras.

Para el cuarto nivel, el Difícil, el desafío está en buscar ejercicios o problemas, donde el número de soluciones es menor que en el nivel anterior.

Por último, en el nivel superior que hemos llamado Muy Difícil e Imposible, tratamos de presentar a los alumnos un auténtico desafío. Son problemas de solución única que normalmente se lleva un tiempo el resolver, incluso para quien ya esté familiarizado con el puzzle. Como imposibles, presentamos tableros que por su cantidad de cuadros, o por las formas que presentan no pueden ser cubiertos con los pentominos. Se ofrece la oportunidad de que los alumnos razonen sobre la imposibilidad de resolverlo sin intentarlo, analizando el tablero, pero también el hacerles ver lo infructuoso de estar un tiempo intentándolo sin haber examinado el

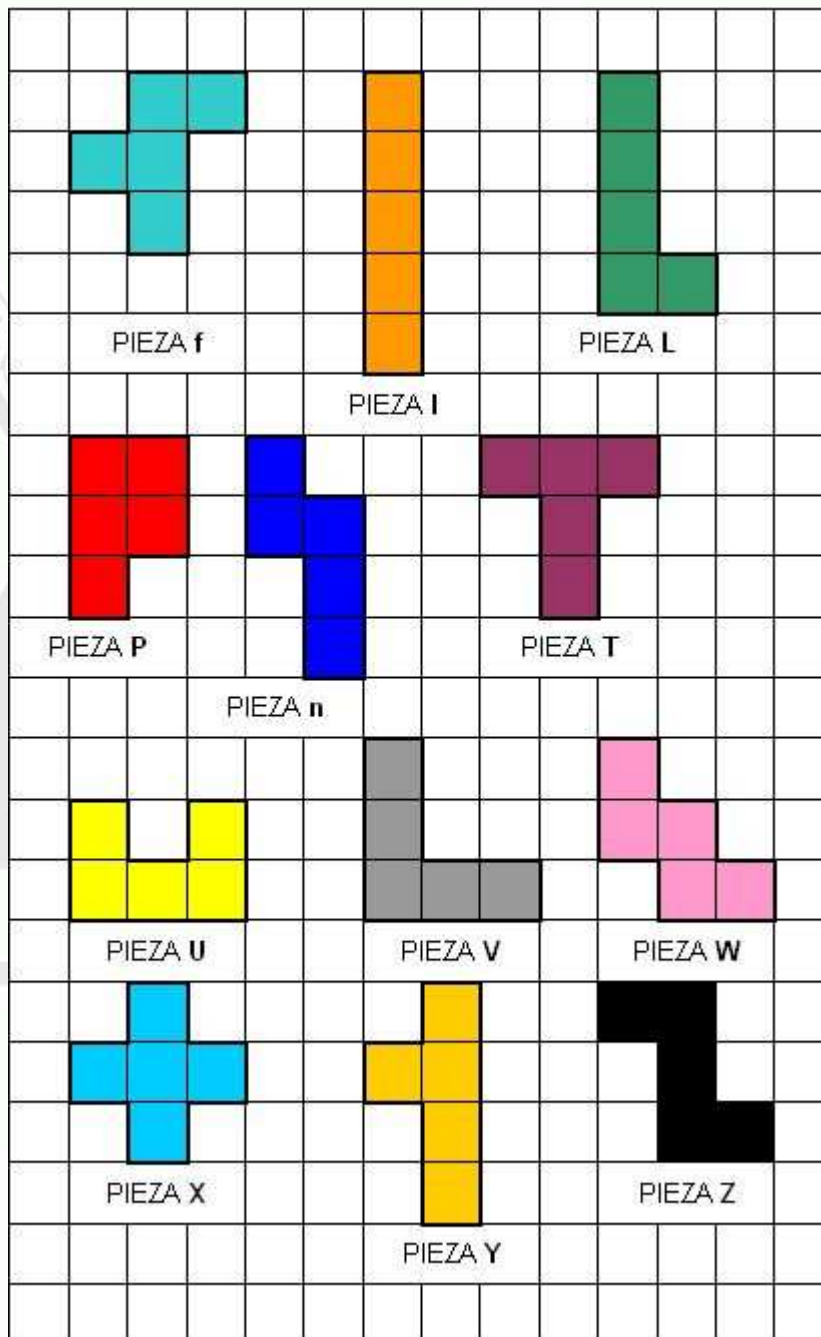
tablero y su imposibilidad.

A continuación mostramos algunos de los tableros y de las fichas que hemos elaborado para los pentaminos.

PENTOMINOS MESA INICIACIÓN (I)

MF 01

Plantillas donde colocar las piezas coloreadas y con sus nombres debajo.



Tarjetas de cuestiones.

Cuestión MF02a

¿Cuántos cuadros de 1 cm de lado suman los doce pentominos?

- a) 45
- b) 50
- c) 60
- d) 72

Piensa bien la respuesta antes de dar la vuelta a la ficha.

La solución dando la vuelta a la ficha ...

Respuesta MF02a

Si tienes en cuenta que cada pentomino tiene 5 cuadrados de 1 cm de lado (lo que serían 5 cm^2) los 12 pentominos suman:

$$12 \times 5 = 60 \text{ cuadrados.}$$

Por tanto la respuesta correcta es la c)

Cuestión MF02b

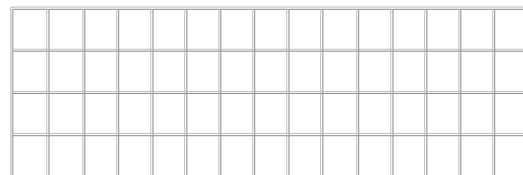
Uniendo todos los pentominos, ¿de qué dimensiones podrías formar rectángulos? (Hay más de una solución)

- a) De 3 x 20
- b) De 15 x 5
- c) De 4 x 15
- d) De 6 x 10

La solución dando la vuelta a la ficha ...

Respuesta MF02b

Si, como sabemos, en total hay 60 cuadrados, cualquier rectángulo que sus lados al multiplicarlos de 60, es una solución. Por ejemplo, el siguiente rectángulo tiene 15 cuadrados en su base y 4 de altura, lo que hace $15 \times 4 = 60$



Otra cosa es, si es posible adosar –unir lados con lados- los pentominos para construir los rectángulos. Pero eso es un desafío de otro nivel.

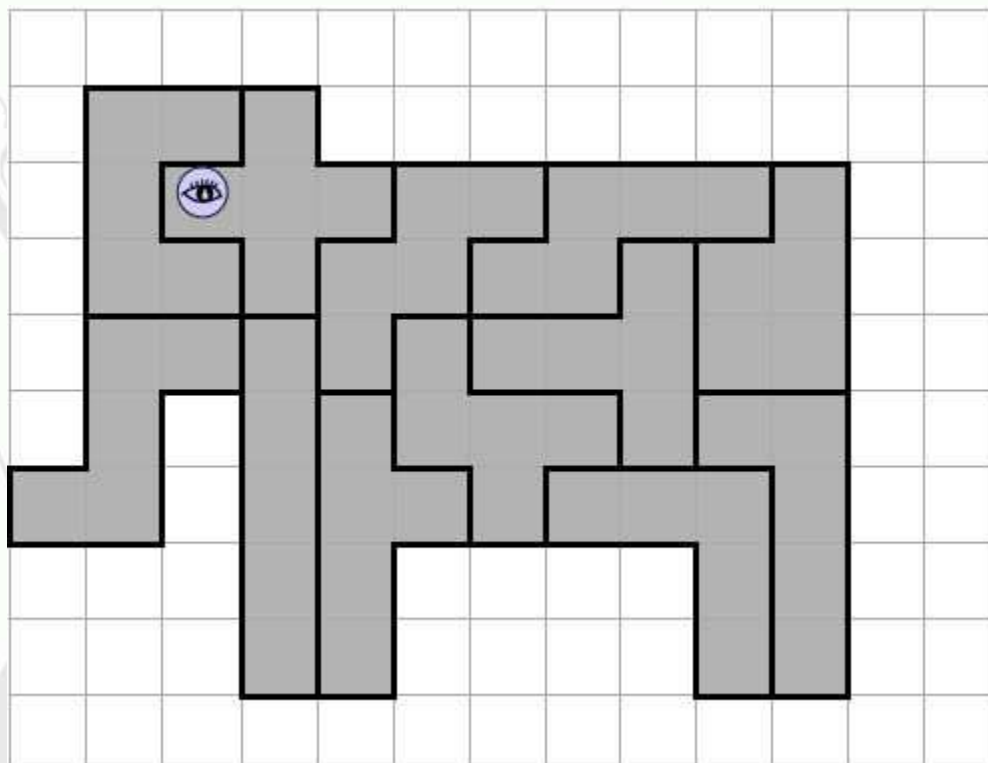
Las soluciones correctas son: a, c y d.

PENTOMINOS
MESA INICIACIÓN (I)

MF 03

Plantillas de figuras con los pentominos que las solucionan dibujados, de tal manera que, simplemente, se van colocando los pentominos en los sitios adecuados.

MF03a (elefante)



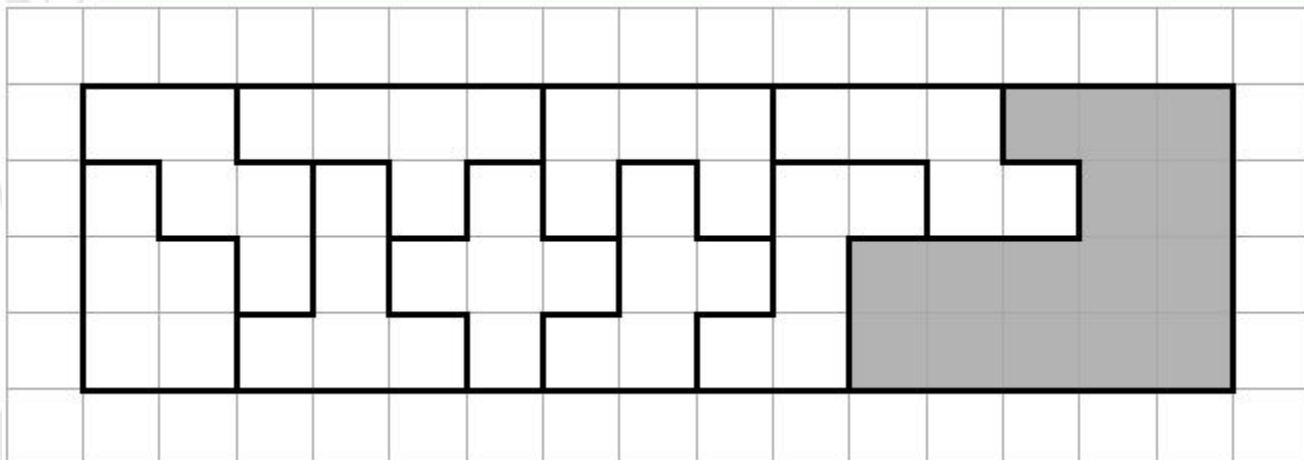
NEWTON•

PENTOMINOS
MESA INICIACIÓN (II)

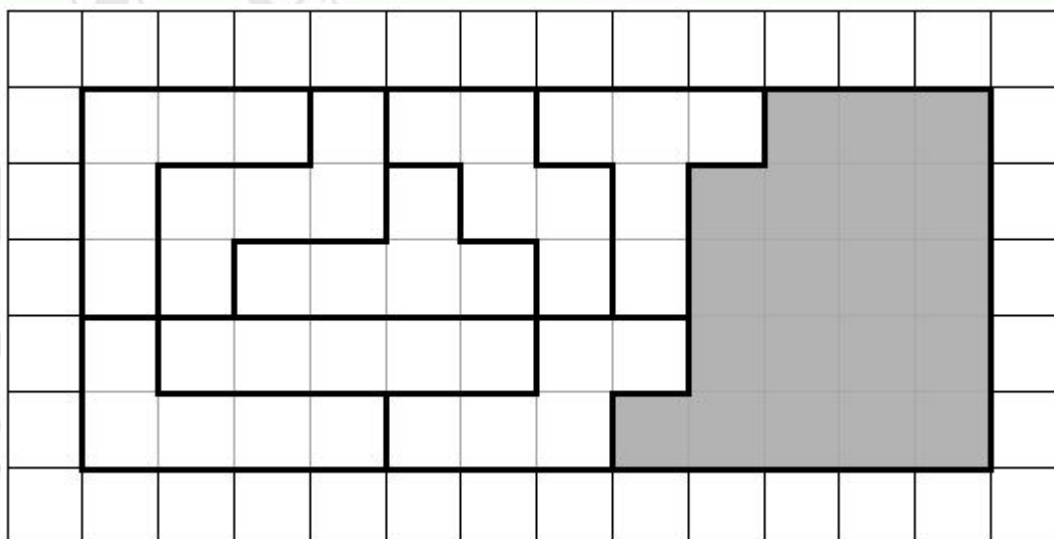
F 01

Tener figuras (se introducen ya las geométricas) en las que aparezcan dibujados 8 ó 9 de los pentominos que la componen, y una región, continua o no, en blanco donde vayan los tres o cuatro pentominos, de tal manera que tienen que rellenar ese espacio.

F01a (rectángulo de 15x3) (Hay 368 soluciones para construir un rectángulo de 15x3)



F01b (rectángulo de 12x5) (Hay 1 010 soluciones para construir un rectángulo de 12x5)

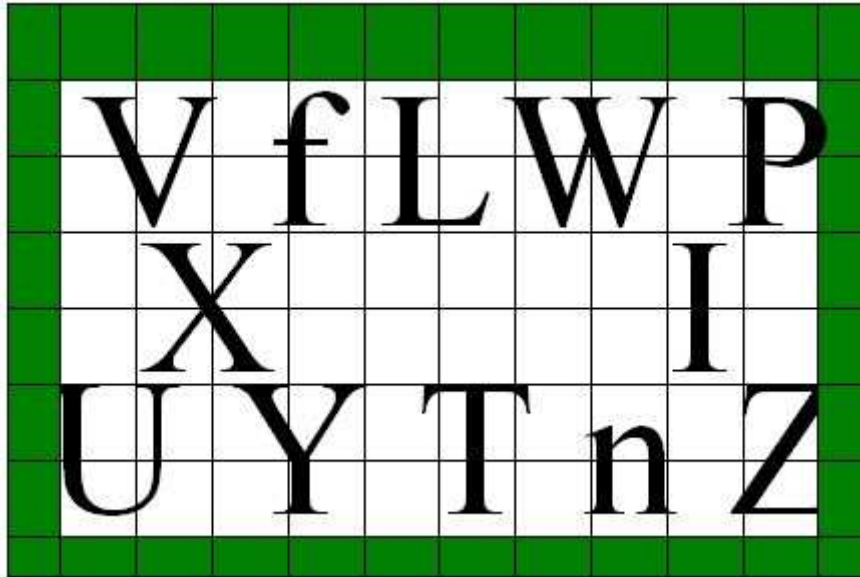


**PENTOMINOS
MESA INICIACIÓN (II)**

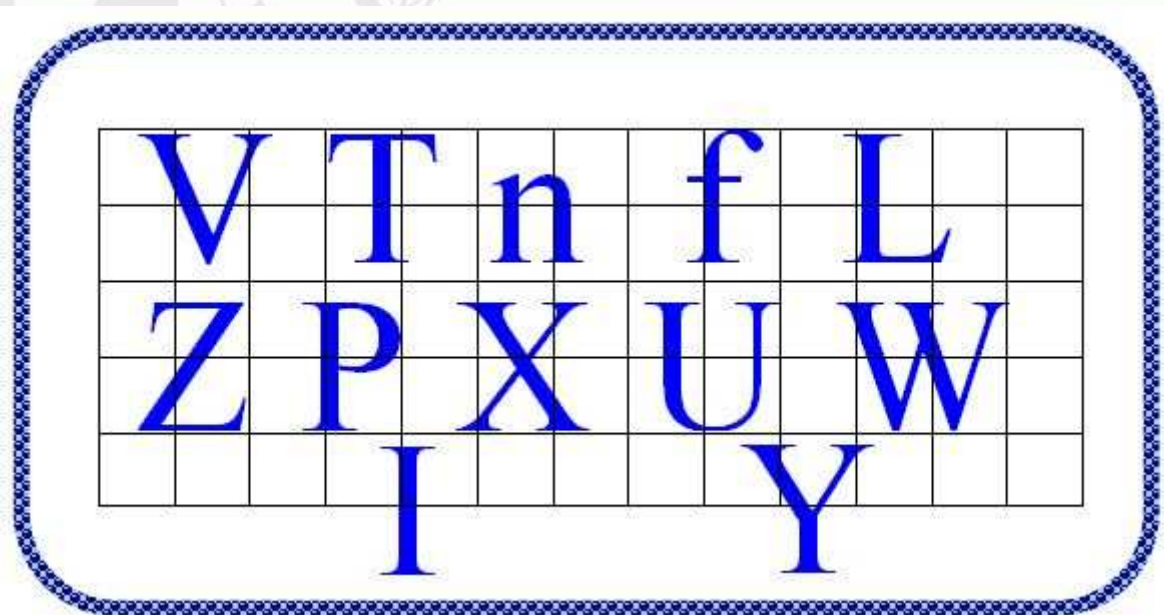
F02

Figuras en las que se indican las piezas, por sus nombres y en sus posiciones relativas, pero sin dibujar sus perfiles.

F02a (rectángulo de 10x6)



F02b (Rectángulo de 12x5)



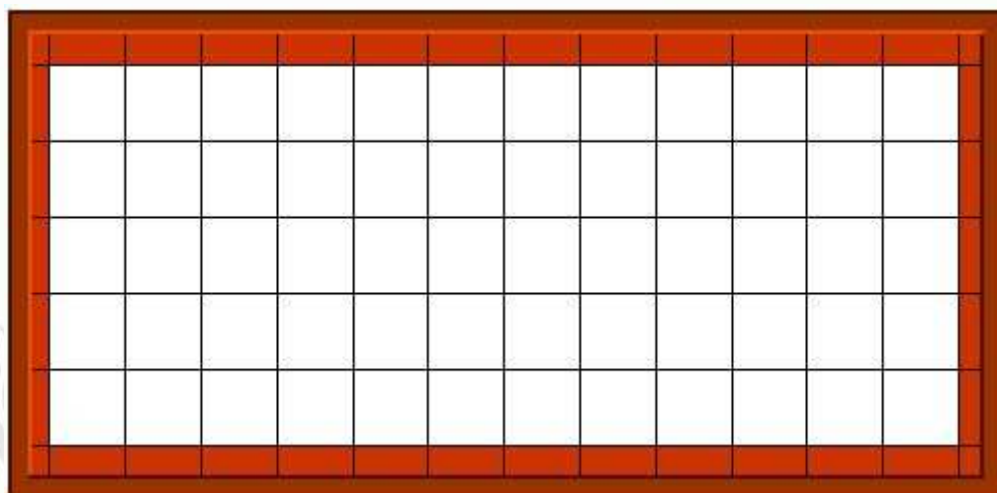
**PENTOMINOS
MESA INTERMEDIA**

R01

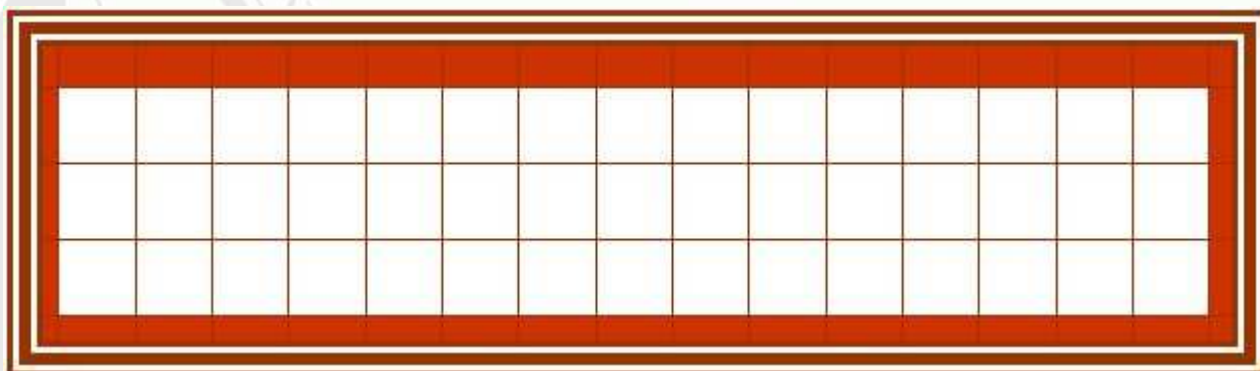
Rectángulos de diferentes dimensiones: 10x6, 15x4, 12x5, 20x3,... sin indicaciones, sólo el perímetro de los rectángulos, dibujado. Mejor si está con un borde que sobresalga hecho con una moldura, varilla o recortado

en cartón grueso.

R01a (Rectángulo de 12x5)



R01b (Rectángulo de 15x3)



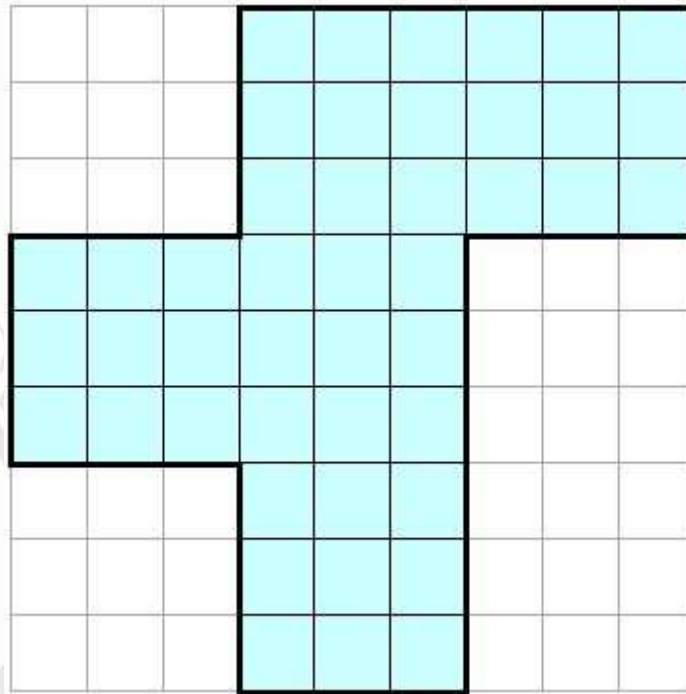
NEWTON•

PENTOMINOS
MESA INTERMEDIA

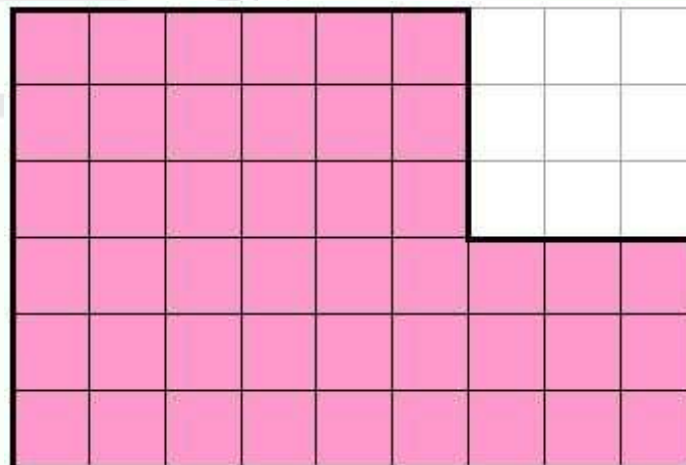
R02

Triplicación de piezas usando 9 de los pentominos de tal manera que el pentomino reproducido y dos más, no se utilizan. Perfilados en relieve. Los pentominos de cada juego podrían ser del color del tablero para que no se confundan (estarían los 12).

R02a (pieza f)



R02b (pieza P)

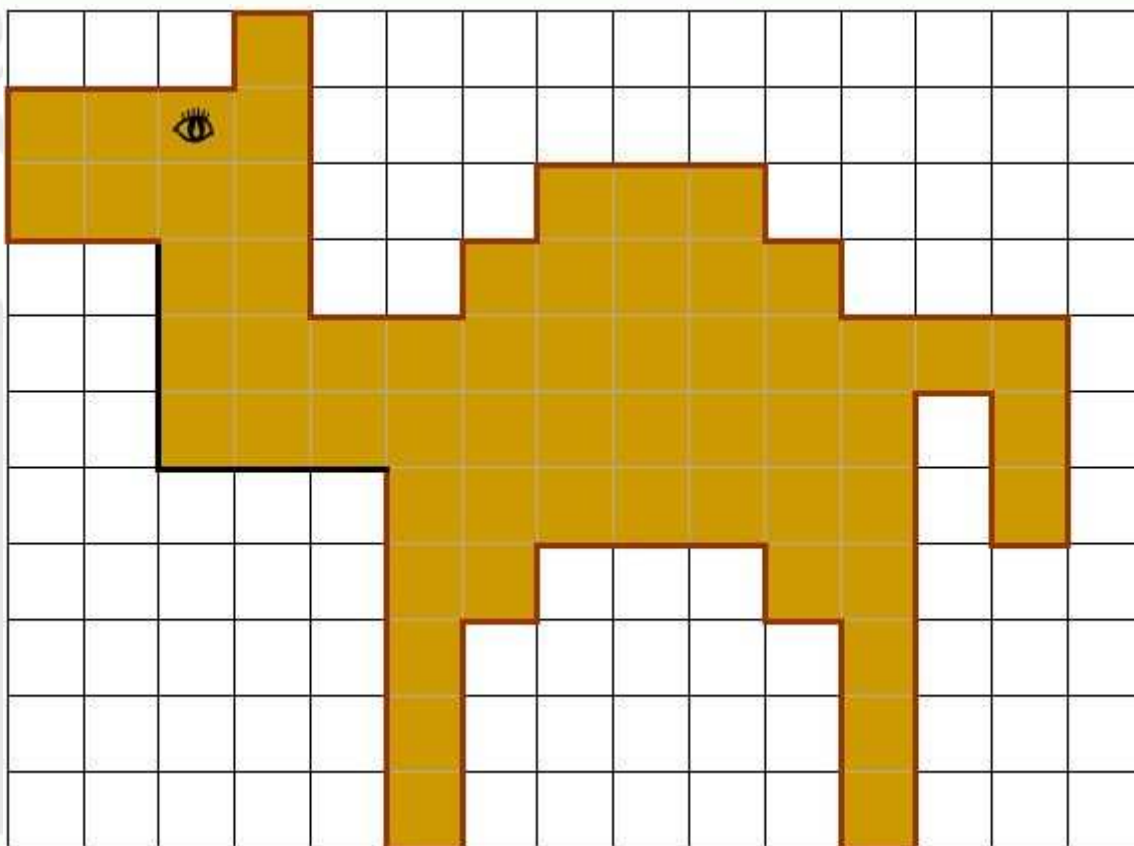


PENTOMINOS
MESA INTERMEDIA

R03

Figuras de animales u objetos sin cuadrículas, sólo el perfil. Poner varillas perfilando o recortar en cartón grueso. Los pentominos pueden tener el color del tablero.

R03a (Dromedario)

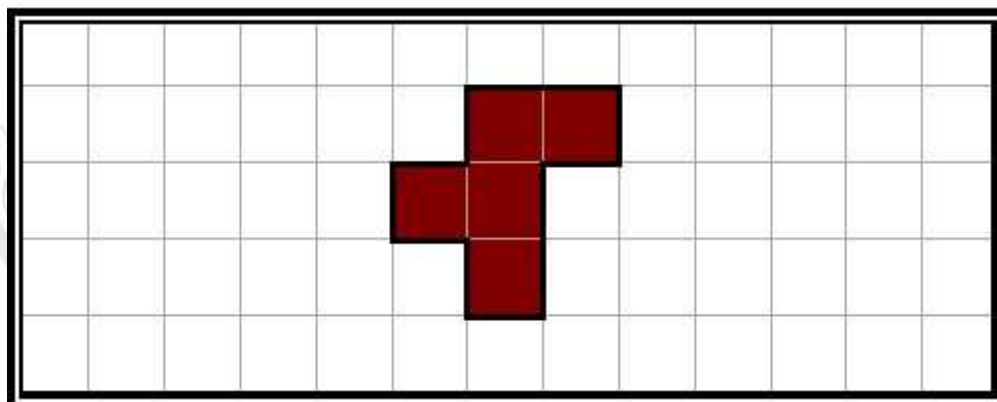


PENTOMINOS
MESA DIFICIL

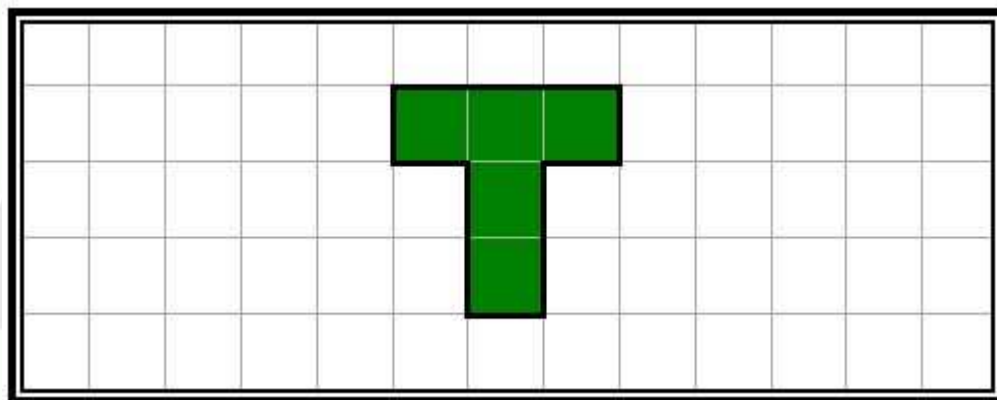
D01

Formar rectángulos de 5x13 que dejen en su interior, centrado, un hueco con la forma de uno de los pentominos. El resto del tablero en blanco.

D01a (hueco de f)



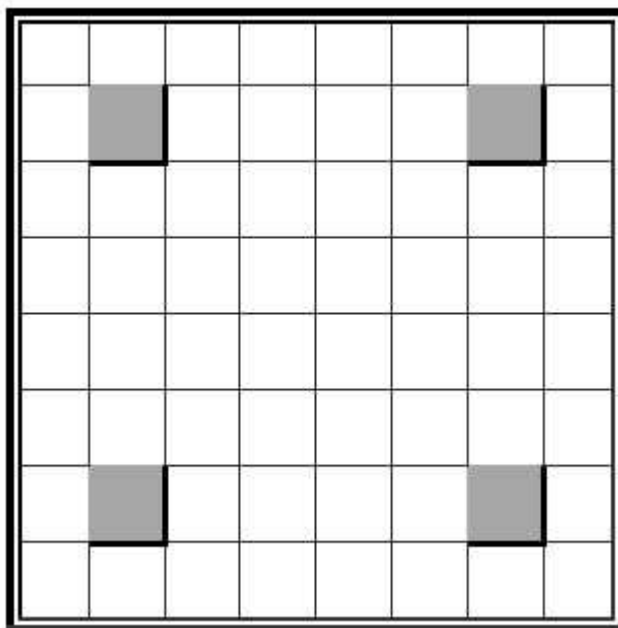
D01b (hueco de T)



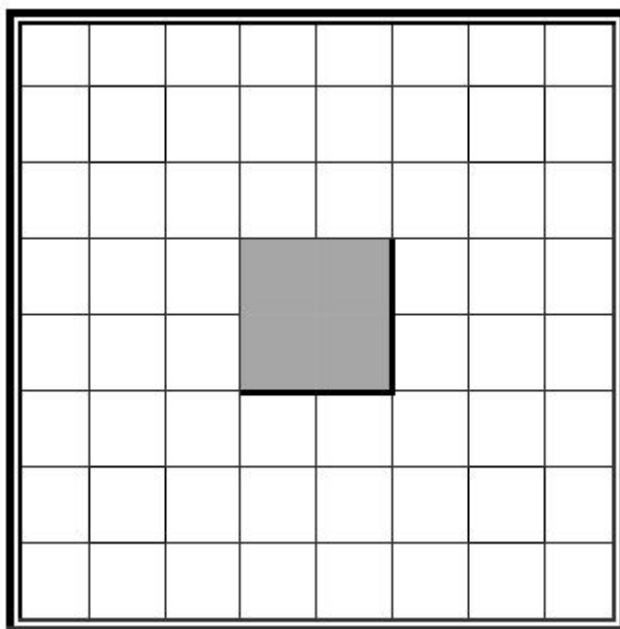
PENTOMINOS
MESA DIFICIL

D02

D02a Cuadrado de 8x8 con 4 huecos fijados



D02b (Cuadrado de 8x8 con hueco central) (65 soluciones)

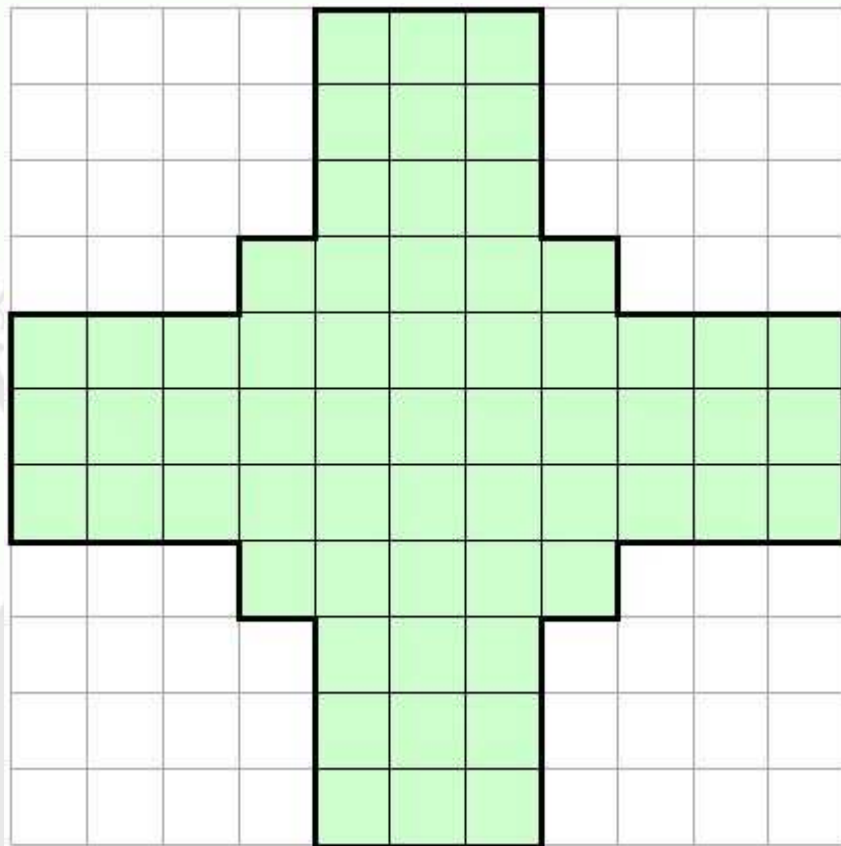


PENTOMINOS
MESA DIFICIL

D03

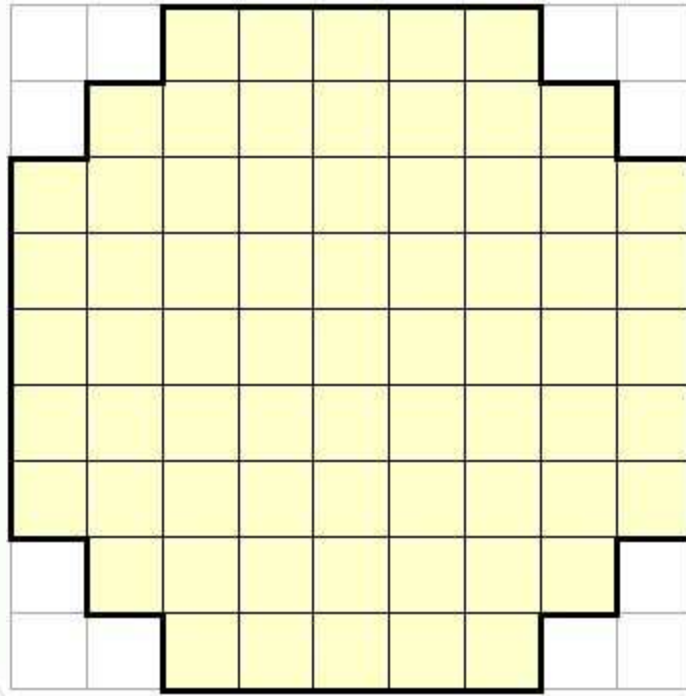
Figuras, sin huecos, que presentan simetrías; tableros en blanco. Para cada tablero un juego de pentominos con el color del mismo.

D03a



D03b

NEWTON •



PROFESORES DE MATEMÁTICAS

NEWTON •

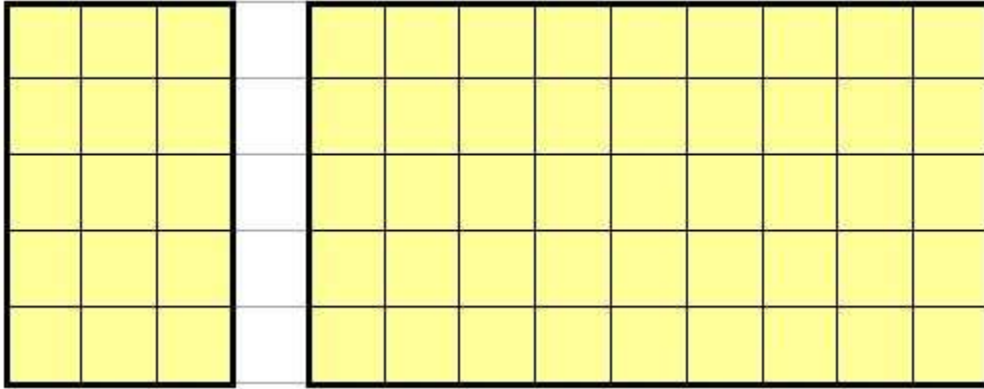
PENTOMINOS
MESA MUY DIFICIL E IMPOSIBLES

MDI01

Formar, con todas las piezas, dos rectángulos de diferentes dimensiones.

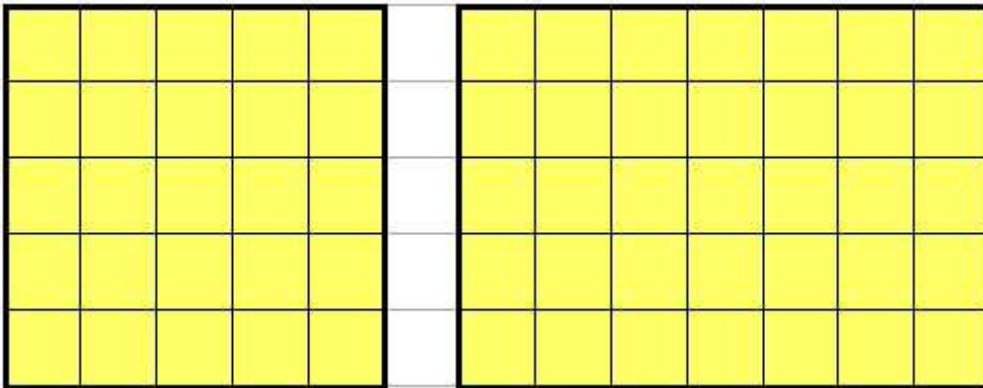
MDI01a

Formar simultáneamente con todas las piezas, un rectángulo de 3x5 y otro de 9x5. (Tiene solución única)



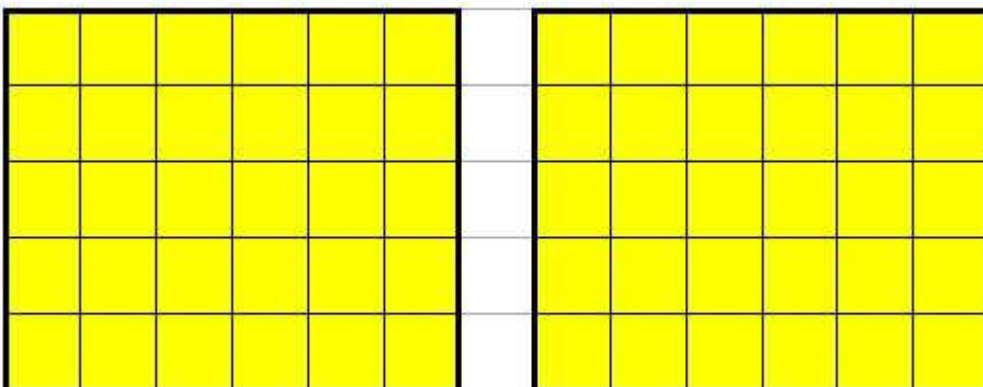
MDI0b

Formar dos rectángulos: uno de 5x5 y otro de 7x5. (Tiene solución única)



MDI01c

Formar dos rectángulos de 6x5. (Tiene dos soluciones)

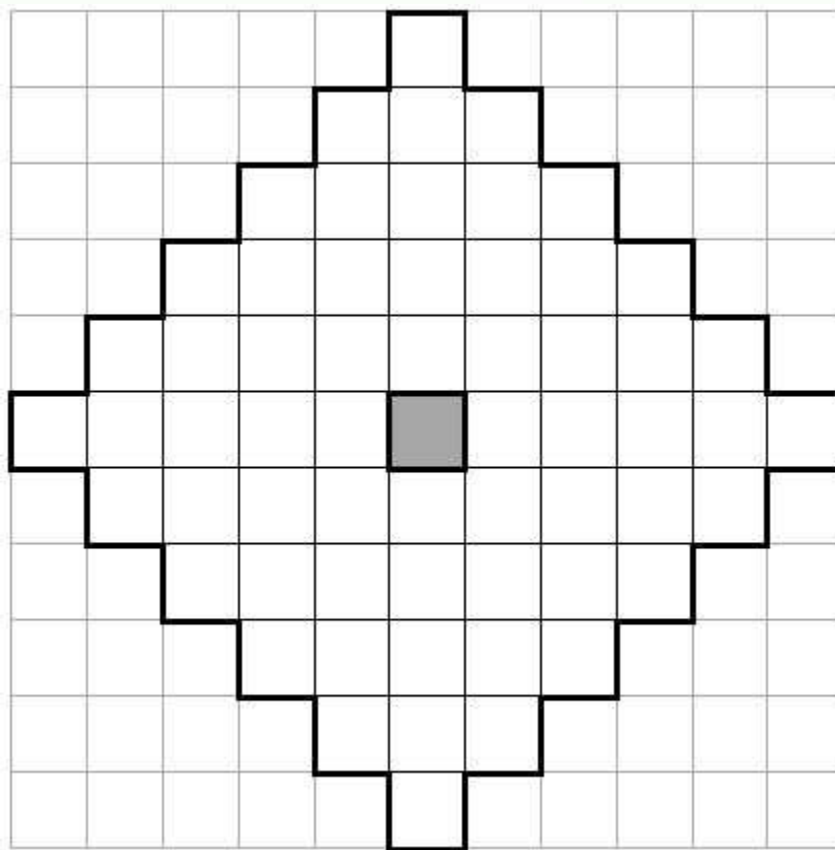


Figuras imposibles de formar.

Se puede poner también, la realización de una figura que tenga más –o menos- de 60 cm^2 .

Mejor si tiene un marco en relieve que limite el perímetro exterior y el cuadrado interior.

MDI02



El **Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón**, del **IES Canarias Cabrera Pinto** (La Laguna), y **Manuel García Déniz**, del **IES Tomás de Iriarte** (Santa Cruz de Tenerife).
mgarciadeniz@sineyton.org / jaruperezpadron@sineyton.org

[1]

- o Pentomino Game, *Mathematical Magic Shows*, Cap. 2 (Existe el libro en español: *Festival mágico-matemático*)
- o Pentomino Problem, *New Mathematical Diversions from Scientific American*, Cap. 19 (En Español: *Nuevos pasatiempos matemáticos*)
- o Pentominos Problem, *Knotted, Doughnuts and Other Mathematical Entertainment*, Cap. 3 y Cap. 6 (En español: *Rosquillas anudadas y otras amenidades matemáticas*)