LA CONJETURA DE POINCARÉ

Joan Porti

En 1904 Henri Poincaré planteó un problema sobre topología de variedades de dimensión tres que todavía sigue abierto. Popularmente se le llama conjetura de Poincaré, a pesar de que el célebre matemático francés lo planteó como una pregunta.

1. Variedades de dimensión *n*

Para exponer el problema de Poincaré, repasamos brevemente algunas nociones de topología. La *bola* de dimensión n es el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ cuya distancia al origen es menor o igual que 1. La bola de dimensión uno es un intervalo, la de dimensión dos un disco, etc. Informalmente, una *variedad* de dimensión n es un espacio obtenido pegando bolas de la misma dimensión, permitiendo que se solapen diversas bolas en el mismo punto. Por ejemplo, la circunferencia $\mathbf{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$

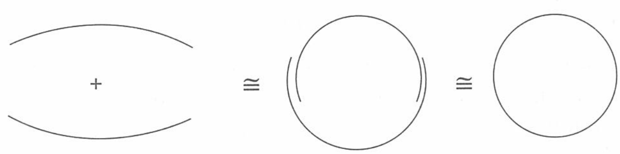


Figura 1

se obtiene pegando dos intervalos (Figura 1) y la esfera $\mathbf{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$

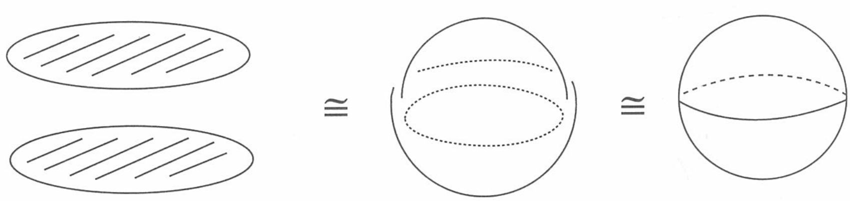


Figura 2

de dimensión dos se obtiene pegando dos discos (Figura 2). En general, la esfera $\mathbf{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x|=1\}$ de dimensión n se obtiene pegando dos bolas de

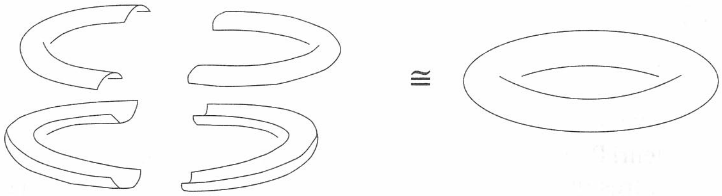


Figura 3

dimensión *n*. En la Figura 3 se observa el toro bidimensional como el resultado de pegar cuatro discos.

La definición formal de variedad es más técnica y se puede consultar en cualquier texto básico de topología (por ejemplo, Massey: *Introducción a la topología algebraica,* Reverté, 1972). En este artículo nos restringiremos a variedades cerradas, es decir variedades compactas (que utilizan un número finito de bolas) y sin borde (todos los puntos en el borde de una bola se encuentra en el interior de alguna otra bola).

Un *homeomorfismo* entre variedades es una aplicación continua, biyectiva
4 y con inversa continua. Para los topólogos, dos variedades son equivalentes si existe un homeomorfismo entre ellas; en este caso se dice que son homeomorfas. La Figura 4 muestra cuatro variedades homeomorfas entre sí. Todos los ejemplos de variedades que hemos dado están en un espacio $\mathbb{R}^n$, sin embargo debemos pensar las variedades como espacios abstractos.

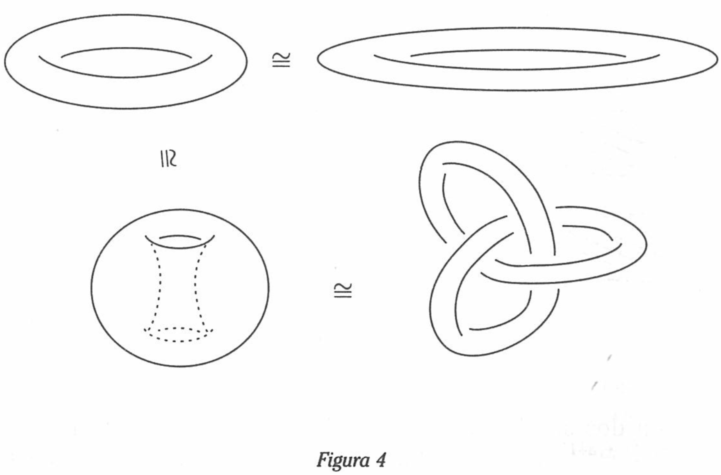


Figura 4

2. Lazos que se contraen

El problema de Poincaré trata sobre variedades de dimensión tres, pero para entenderlo mejor es conveniente mirar primero algunas variedades de dimensión dos. Consideramos el toro $\mathbf{T}^2$ (Figuras 3 y 4) y la esfera $\mathbf{S}^2$ (Figura 2), ¿cómo podemos saber que no son homeomorfas? Para ello observamos el comportamiento de los lazos. Un lazo en una variedad **V** es una aplicación continua $\gamma: \mathbf{S}^1 \to \mathbf{V}$ de la circunferencia en **V**. La propiedad de la esfera $\mathbf{S}^2$ que nos interesa es la siguiente: *todo lazo en $\mathbf{S}^2$ se puede contraer a un punto.* En cambio existen lazos en el toro $\mathbf{T}^2$ que no se pueden contraer, como por ejemplo el de la Figura 5. Por ello $\mathbf{T}^2$ y $\mathbf{S}^2$ no son homeomorfas.

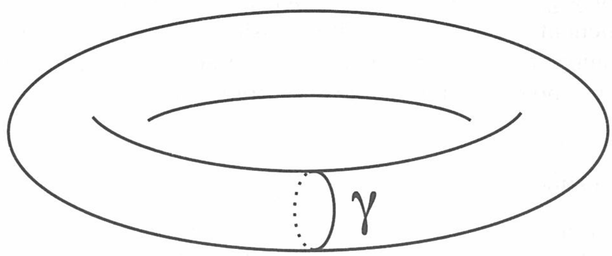


Figura 5

4

Esta propiedad se puede formalizar algebraicamente si tomamos puntos base y consideramos lazos salvo homotopía. Las clases de homotopía de lazos con punto base se pueden sumar y forman un grupo, llamado grupo fundamental o grupo de Poincaré. Podemos decir que $\mathbf{T}^2$ y $\mathbf{S}^2$ no son homeomofas porque el grupo de $\mathbf{S}^2$ es trivial (todo lazo se puede contraer) y en cambio el de $\mathbf{T}^2$ es $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}$.

3. La pregunta de Poincaré

Partimos de la siguiente caracterización de $\mathbf{S}^2$: la esfera $\mathbf{S}^2$ es la única variedad cerrada de dimensión dos tal que todo lazo se contrae a un punto. Equivalentemente, $\mathbf{S}^2$ es la única variedad cerrada bidimensional con grupo fundamental trivial. Teniendo en cuenta que el grupo fundamental de $\mathbf{S}^3$ también es trivial, parece lógico formular la siguiente pregunta.

Pregunta de Poincaré (1904) ¿Es la esfera tridimensional $\mathbf{S}^3$ la única variedad cerrada de dimensión tres tal que todo lazo se contrae?

Equivalentemente: ¿es $\mathbf{S}^3$ la única variedad cerrada de dimensión tres con grupo fundamental trivial?

Esta pregunta ha ocupado la atención de muchos topólogos y todavía sigue abierta. A pesar de ser una pregunta, se la conoce normalmente con el nombre de *Conjetura de Poincaré.* Después de formularla, Poincaré escribió la célebre frase “mais cette question nous entraînerait trop loin” (“pero este tema nos llevaría demasiado lejos”). Ciertamente nos ha llevado lejos y todavía no sabemos hasta donde nos puede llevar.

4. Tipo de homotopía

Sea Σ^3 una variedad cerrada de dimensión tres con grupo fundamental trivial. No sabemos si Σ^3 es homeomorfa a la esfera $\mathbf{S}^3$ o no, pero, gracias a resultados de topología algebraica, sabemos que tienen el mismo tipo de homotopía. Es decir existen aplicaciones $f\colon \Sigma^3 \to \mathbf{S}^3$ y $g : \mathbf{S}^3 \to \Sigma^3$ tales que las composiciones fg y gf se pueden deformar a la aplicación identidad (la definición formal se encuentra en cualquier libro básico de topología algebraica). Así pues, la pregunta de Poincaré puede formularse como sigue: ¿una variedad cerrada con el tipo de homotopía de $\mathbf{S}^3$ es homeomorfa a $\mathbf{S}^3$?

5. Dimensión superior

A pesar de que en dimensión tres la cuestión sigue abierta, se conoce la respuesta en dimensión cuatro o superior a la conjetura de Poincaré generalizada:

Teorema (conjetura de Poincaré generalizada). Sea Σ^n una variedad cerrada de dimensión n con el mismo tipo de homotopía que la esfera $\mathbf{S}^n$. Si $n \neq 3$ entonces Σ^n es homeomorfa a la esfera $\mathbf{S}^n$.

4

Henri Poincaré

Se sabe que la circunferencia es la única variedad cerrada de dimensión uno. Para dimensión $n = 2$, éste es un resultado a posteriori, consecuencia de la clasificación de las variedades cerradas de dimensión dos.

Para dimensión $n \geq 5$, el teorema fue demostrado durante los años 60 por diversos matemáticos. En 1960 S. Smale lo demostró para variedades diferenciables, poco después J. Stallings y E. C. Zeeman lo demostraron para variedades combinatorias, adaptando la demostración de Smale con sus propios trabajos y los de J. H. C. Whitehead. El proceso concluyó en 1966 con M. H. A. Newman, quien completó la demostración en toda su generalidad. También fueron importantes los trabajos de A. H. Wallace.

¿Por qué la demostración en dimensión $n \geq 5$ no funciona en dimensiones inferiores? Ello es debido a un teorema de Whitney, que sólo se aplica en dimensión superior o igual a seis. La demostración utiliza la teoría de ansas y el teorema de Whitney, que permite deformarlas convenientemente. Los topólogos de esta época decían irónicamente que en dimensiones tres y cuatro se sentían claustrofóbicos, porque no podían aplicar el teorema de Whitney.

En 1982 M. Friedmann demostró la conjetura generalizada en dimensión 4. Para superar la claustrofobia, es decir para descender a dimensión cuatro, utilizó las llamadas ansas de Casson. Friedmann no sólo demostró la conjetura de Poincaré en dimensión cuatro, sino que clasificó todas las variedades cerradas de dimensión cuatro con grupo fundamental trivial.

6. Demostraciones falsas

El número de demostraciones de la conjetura de Poincaré enviadas a revistas y universidades es incalculable. Hasta el momento son todas falsas, pero en casos excepcionales no son irrelevantes. Por ejemplo en 1934 J. H. C. Whitehead (recordemos que sus trabajos fueron claves para la demostración en dimensión superior) *demostró* que si una variedad de dimensión tres abierta tiene el tipo de homotopía de $\mathbb{R}^3$, entonces esta variedad es homeomorfa a $\mathbb{R}^3$. Este resultado es más general que la conjetura de Poincaré, pero es falso. Él mismo encontró un contraejemplo, que actualmente se conoce con el nombre de variedad de Whitehead. Gracias a este error, abrió un campo de investigación muy interesante, las variedades abiertas de dimensión tres, puesto que para su contraejemplo desarrolló nuevas técnicas en variedades abiertas. La amarga experiencia de la falsa demostración marcó el rigor de los trabajos posteriores de Whitehead.

4

7. A la búsqueda de contraejemplos

No todos los topólogos que se interesan en la conjetura de Poincaré quieren demostrarla: algunos buscan contraejemplos, es decir, variedades con el mismo tipo de homotopía que $\mathbf{S}^3$ pero no homeomorfas. Supongamos que hemos construido una variedad Σ^3 que es candidata a contraejemplo, ¿cómo podemos distinguirla de la esfera $\mathbf{S}^3$? No podemos utilizar el grupo fundamental, puesto que es trivial. El problema está en que todos los invariantes algebraicos que se conocen para variedades de dimensión tres se anulan si el grupo fundamental es trivial. Durante los años 70 se creyó que el invariante Roklin construido a partir de cobordismo permitiría distinguir un contraejemplo, pero A. Casson (el mismo de las ansas en dimensión cuatro) demostró que depende del grupo fundamental. No ha sido hasta 1992 que H. Rubinstein ha dado un algoritmo que permite reconocer la esfera $\mathbf{S}^3$ (es decir, dada una variedad cerrada triangulada, existe un algoritmo para decidir si es la esfera o no).

8. Resultados en la dirección positiva

Hay bastantes resultados del tipo siguiente: si Σ^3 tiene el tipo de homotopía de $\mathbf{S}^3$ y cumple una hipótesis suplementaria, entonces es homeomorfa a $\mathbf{S}^3$. Estas hipótesis son, por ejemplo: todo lazo de Σ^3 está contenido en una bola

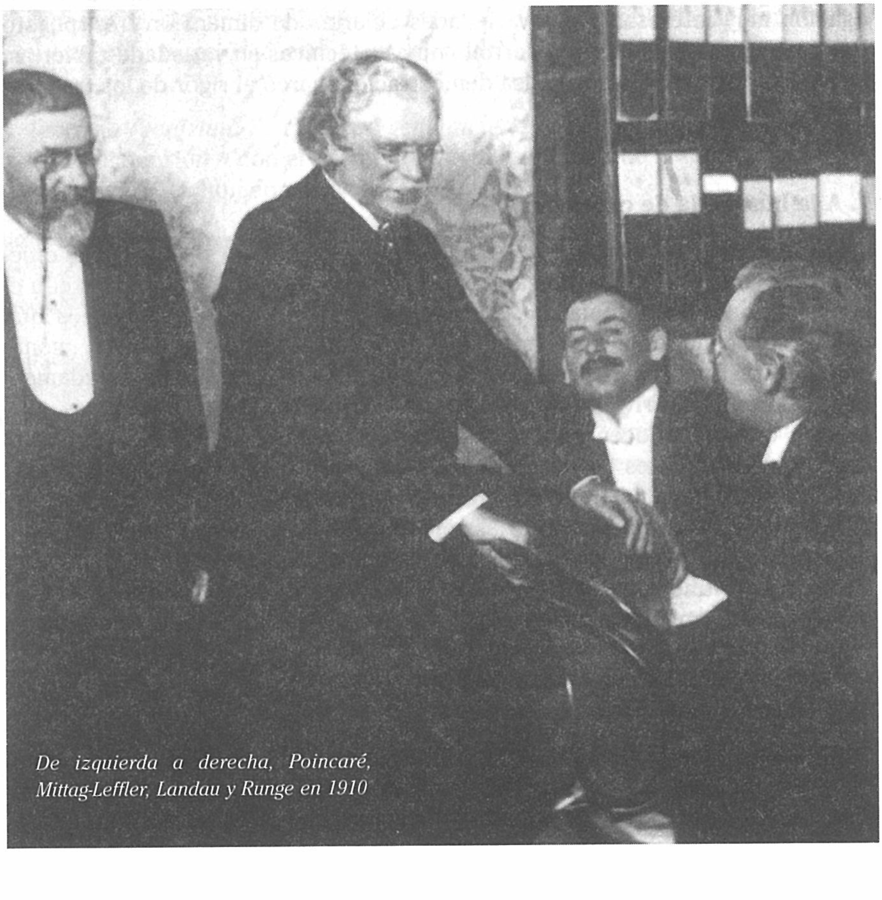
(R. H. Bing,1958), Σ^3 tiene un difeomorfismo periódico con puntos fijos y que preserva la orientación (solución de la conjetura de Smith, 1978), o Σ^3 tiene una métrica con curvatura seccional no negativa (R. Hamilton, 1984). No sabemos si este tipo de resultados llevará a una demostración, pero permiten afirmar que un hipotético contraejemplo sería bastante complicado.

9. Conclusión

Como todo buen problema, la conjetura de Poincaré ha generado muchos trabajos y resultados. Además es un problema interesante por sí mismo: hasta que no esté resuelto es imposible dar una clasificación de las variedades compactas de dimensión tres. Los más optimistas creemos que dicha clasificación será posible algún día, sobre todo después de los trabajos de Thurston en los 70 y 80.

En esta nota sólo he podido dar unas pinceladas de un tema que me parece fascinante y espero haber animado a algún lector a profundizar en él.

4



De izquierda a derecha, Poincaré, Mittag-Leffler, Landau y Runge en 1910