NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 89, julio de 2015, páginas 149-167

Los problemas anteriores y lo que nuestros lectores nos escriben (Problemas Comentados XL)

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen Resolvemos los problemas propuestos en anterior artículo usando las cuatro fases de: Fase I - Comprender, Fase II - Pensar, Fase III - Ejecutar y Fase IV – Responder, usando tablas para ordenar la información e ir elaborando las respuestas. Se soluciona el problema planteado en la 41 OIM de Korea, con algunas variantes. También se reproducen y comentan las soluciones enviadas por lectores de la revista y proponemos dos desafíos para ser resueltos en el próximo artículo: el asno Marcovaldo y la ley de las amazonas.

Palabras clave Resolución de problemas en cuatro fases. Organización de datos en tablas de doble entrada. Participación de lectores.

Abstract We solve problems set in previous article using the four phases: Phase I – Understand, Phase II - Think, Phase III - Implement and Phase IV – Reply, using tables to sort the information and go preparing replies. The problem raised in the 41 IMO (Korea), with some variations is solved. They also reproduce and discuss the solutions submitted by readers of the magazine and propose two challenges to be resolved in the next article: Marcovaldo Ass and The Law Of The Amazons.

Keywords Solving problems in four phases. Organization of data on double-entry tables. Participation of readers.

Se dejaron propuestos en el artículo Problemas comentados XXXIX (“**¿Y si el problema no tiene solución?**”, **volumen 88 de** NÚMEROS) varios problemas que ahora pasamos a considerar y solucionar.

El primero, extraído de la sección O PROBLEMA DESTE NÚMERO, a cargo de **JOSÉ PAULO VIANA**, en la revista portuguesa “Educação e Matemática”, Nº 126, correspondiente a Enero/Febrero de 2014.

Las edades de las vecinas

Padre: — «Acabo de encontrar a nuestras nuevas vecinas, una señora y sus dos hijas. Voy a proponerte un problema para descubrir que edades tienen ellas.»
Hijo: — «¡Bravo! Ya sabes que me gustan los desafíos.»
Padre: — «El producto de sus edades es 2450.»

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

Hijo: — «Eso por sí solo no es suficiente.»
Padre: — «La suma de las tres edades es el cuádruplo de la tuya.»
Hijo (después de pensar un momento): — «Todavía no puedo.»
Padre: — «Soy más joven que la madre de las niñas.»
Hijo (que sabe la edad del padre): — «¡Ah, entonces ya lo sé!»
¿Qué edades tienen los cinco personajes de esta historia?

Proceso de resolución

Fase I. Comprender

Datos: Una señora y sus dos hijas. Un señor y su hijo.

Objetivo: Las edades de los cinco personajes.

Relación: Las restricciones dadas para las edades de la señora y sus hijas,

El producto de sus edades es 2450. La suma de las tres edades es el cuádruple de la del hijo.

El hijo sabe su propia edad y la de su padre. El padre es más joven que la señora.

Diagrama: Una tabla de posibilidades.

Fase II. Pensar

Estrategias: Organizar la Información. Eliminar.

Fase III. Ejecutar

Haremos una lista en forma de tabla para las tres edades posibles para un producto de 2450.

Y una descomposición en factores: 2450 = 1 x 2 x 5 x 5 x 7 x 7

Madre	Hija 1ª	Hija 2ª
7 x 7	5 x 5	2
7 x 7	5 x 2	5
7 x 5 x 2	7 x 5	1
7 x 5 x 2	7	5
7 x 5	7 x 2	5
7 x 5	5 x 2	7
5 x 5 x 2	7	7

Se han eliminado aquellas combinaciones en que la madre tiene una edad muy alta (7 x7 x 5 o 7 x 7 x 2) o aquellas en que alguna de las hijas está muy cerca de la edad de la madre.

El tercer y cuarto casos de la tabla es conveniente eliminarlos también por razones de salud, que no por imposibilidad ya que hoy existe la inseminación artificial.

Debemos estudiar, pues, los casos que han quedado a la luz de la segunda restricción.

Madre	Hija 1ª	Hija 2ª	Suma	¿Múltiplo de 4?
49	25	2	49 + 25 + 2 = 76	Sí
49	10	5	49 + 10 + 5 = 64	Sí
35	14	5	35 + 14 + 5 = 54	No
35	10	7	35 +10 + 7 = 52	Sí
50	7	7	50 + 7 + 7 = 64	Sí

La suma ha de ser el cuádruplo de la edad del hijo. Aunque no sabemos esa edad, sí sabemos que la suma ha de ser múltiplo de 4. Esa restricción sólo la cumplen cuatro de los casos.

Madre	Hija 1ª	Hija 2ª	Suma	¿Múltiplo de 4?
49	25	2	49 + 25 + 2 = 76	Sí
49	10	5	49 + 10 + 5 = 64	Sí
35	10	7	35 +10 + 7 = 52	Sí
50	7	7	50 + 7 + 7 = 64	Sí

Para seguir eliminando debemos tener en cuenta ahora las restricciones para el padre y su hijo. Nosotros no sabemos la edad del hijo pero él sí la sabe. Si ha dicho que todavía no puede saber cuál es la combinación adecuada es porque hay varias con el mismo valor. Eso sólo ocurre para el valor 64. Las otras dos las podemos eliminar. Y, además, ya podemos saber la edad del hijo 64 : 4 = 16 años.

Madre	Hija 1ª	Hija 2ª	Suma	¿Múltiplo de 4?
49	10	5	49 + 10 + 5 = 64	Sí
50	7	7	50 + 7 + 7 = 64	Sí

Para decidir cuál de las dos es la correcta nos quedan aún dos restricciones: el hijo sabe la edad de su padre y éste le dice que es más joven que la madre. El hijo, ante la última afirmación de su padre, dice que ya lo sabe. Eso no ocurriría si su padre tuviese menos de 49 años, sino que seguiría dudando.

Si ahora está seguro es porque su padre tiene 49 años y la madre de las vecinas 50 años. Y, por lo tanto, leyendo en la tabla: las hijas son gemelas con 7 años.

Solución: Entonces el padre tiene 49 años, la madre de las vecinas 50, las hijas son gemelas con 7 años y la edad del chico es 16.

Fase IV. Responder

Comprobación: Bastará con ver que a partir de las soluciones se cumplen todas las restricciones del problema. Y así es, una por una.

Análisis: La solución es única. En el caso de que matemáticamente hubiese otra, sería imposible física y/o humanamente.

Respuesta:

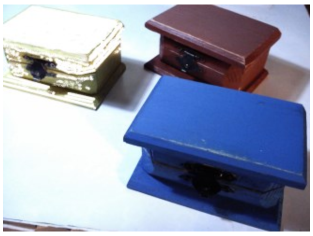
Entonces el padre tiene 49 años, la madre de las vecinas 50, las hijas son gemelas con 7 años y la edad del chico es 16.

Tenemos que hacer referencia a los problemas de este tipo porque se ha producido un fenómeno a través de las redes sociales con un problema similar a éste, acerca de una fecha de nacimiento.

Nosotros ya hicimos en su día un análisis exhaustivo de variantes de este problema de las edades; les recordamos que pueden consultarlos en la revista NÚMEROS, en los números 66 y 67 dentro de la sección de Problemas Comentados, con el título genérico de "Las edades de las hijas del caníbal".

El segundo fue propuesto por Hungría en la 41ª Olimpiada Matemática Internacional, celebrada en Taejon (Corea del Sur) en Julio de 2000 y citado por el profesor Pedro Alegría en su "La Matemagia desvelada".

El truco de las tarjetas numeradas repartidas en tres cajas



Un mago tiene cien tarjetas numeradas, del 1 al 100. Las coloca en tres cajas, una blanca, una roja y una azul, de tal manera que cada caja contiene por lo menos una tarjeta. Un espectador selecciona dos de las tres cajas, extrae una tarjeta de cada una y anuncia a la audiencia la suma de los números de las dos tarjetas elegidas. Al conocer esta suma, el mago identifica la caja de la cual **no** se ha elegido ninguna tarjeta.
¿De cuántas maneras se pueden distribuir todas las tarjetas en las cajas de modo que este truco siempre funcione?
Propón y estudia otras variantes del problema.

Resolvamos primero el problema tal y como está planteado originalmente, puesto que el último párrafo es un añadido nuestro.

Las condiciones son:

a. Cien tarjetas numeradas del 1 al 100.
b. Tres cajas donde colocar las tarjetas de colores blanco, rojo y azul. (B, R, A)
c. En cada caja debe haber al menos una tarjeta.
d. Se seleccionan dos de las cajas. (B, R) (B, A) (R, A)
e. Se extrae una tarjeta de cada una. (b, r) (b, a) (r, a)
f. Se suman los valores de las tarjetas y se dice esta suma. (b + r) (b + a) (r + a)

Ahora el mago debe decir de qué cajas se extrajeron las tarjetas.

El reparto de las tarjetas debe ser tal que las sumas sean únicas para cada pareja de cajas, no pudiéndose dar el que de dos combinaciones distintas de cajas se obtenga una misma suma para las tarjetas extraídas. No cabe un reparto simple en tres partes.

Tras pensar en las posibles combinaciones, repartimos de la siguiente manera:

$$B(1),\ R(100)\ \text{y}\ A(\{n/2<n<100\}).$$

De esta manera, las sumas posibles para cada par de cajas son:

$$X = b + r = 1 + 100 = \{101\}$$

$$Y = b + a = \{m/3<m<101\} \text{ y}$$

$$Z = r + a = \{p/102<p<200\}.$$

Tenemos tres conjuntos de valores para las sumas posibles:

$$X = b+r,\ Y = b+a \text{ y } Z = r+a$$

cuyas intersecciones, dos a dos, son vacías.

$$X\cap Y=X\cap Z=Y\cap Z=\emptyset$$

No cabe confusión a la hora de identificar cuál es la pareja de cajas de la que se han extraído las tarjetas numeradas, y por tanto, de qué caja no se ha extraído una tarjeta.

Tal y como está formulada la pregunta, la respuesta sería:

Se pueden distribuir de seis maneras:

B(1), R(100) y A(2<n<100)

B(1), R(2<n<100) y A(100)

B(100), R(1) y A(2<n<100)

B(100), R(2<n<100) y A(1)

B(2<n<100), R(100) y A(1)

B(2<n<100), R(1) y A(100)

¡Aunque el mago tiene solo tres respuestas posibles: la Blanca, la Roja o la Azul!

En este problema es muy importante el leer atentamente el enunciado pues las maneras en que puede responder el mago no es la respuesta a la cuestión planteada en la pregunta formulada.

El planteamiento y estudio de las variantes ayuda a encontrar la solución, que parece ser única.

Variantes del problema.

Variantes

Conservando alguno de los aspectos enumerados anteriormente:

a. Cien tarjetas numeradas del 1 al 100.
f. Se suman los valores de las tarjetas y se dice esta suma: (b + r), (b + a) o (r + a)

Se nos ocurren las siguientes variantes:

1. Cambiar el número de cajas (dos cajas, cuatro cajas…)
2. Cambiar la manera de repartir las tarjetas en las cajas.
3. Cambiar las condiciones de la extracción.

Ponemos los siguientes ejemplos de variantes como un trabajo de investigación que se pueden llevar a cabo en el aula:

A. Dos cajas (la blanca y la roja). Ninguna caja vacía. Al menos dos fichas por caja.

   1. Repartir y sacar dos; decir su suma y deducir si se han sacado las dos de una caja o una de cada caja.
   2. Repartir y sacar dos de una caja y sumar los números. Deducir si es de la caja blanca o de la roja.
   3. Sacar dos fichas –de una o de las dos cajas- y decir de que caja salieron.

B. Tres cajas, ninguna vacía.

   1. Repartir en las tres cajas las fichas. Sacar dos fichas de dos de las cajas y decir la suma. Deducir de qué cajas se han sacado.
   2. Repartir en las tres, sacar dos y decir la suma. Deducir si se han sacado de una caja o de dos.

A1)
Colocamos los valores pares en una y los impares en otra. De esta manera, si la suma es par se han sacado de una caja (no sabemos de cual), y si la suma es impar se han sacado de las dos cajas.

A2)
Si colocamos en B del 1 al 50 y en R del 51 al 100, tendremos que $3 \leq B + B \leq 99$, mientras que $103 \leq R + R \leq 199$, siendo imposible obtener las sumas 100, 101 o 102.

A3)
Colocamos en B el 1 y el 2, y el resto en R.
Si suman 3, las hemos sacado de B.
Si suman otro valor, no sabemos si son las dos de R o una de B y otra de R, pues hay solapamiento en los resultados.
Esta variante no parece tener solución

B1)
Ya está resuelto. No vemos otra solución.

B2)
Al dividir las tarjetas entre las tres cajas, siempre hay solapamiento en las sumas, lo que impide saber si salen de una caja o de dos.

Nos toca ahora dar la voz a nuestros lectores. Son muchos los que nos hablan de que siguen nuestra sección, pero pocos los que nos envían sus reflexiones, soluciones o nuevos problemas.

Entre los que sí lo hacen está Luis Ángel Blanco Fernández, que esta vez hace un comentario y nos remite una solución acerca de los problemas propuestos en el nº 87 de la revista, correspondiente al artículo 38 de Problemas Comentados.

‹‹He estado trabajando en los problemas que han publicado en el último número de la revista "Números". Adjunto el proceso de solución del problema 2, el de hallar números de tres cifras.

Respecto al problema 1, que en principio parecía más sencillo, no he encontrado solución, pero creo que se trata por una errata en el artículo. Era sobre números triangulares, y había que conseguir que los números colocados en sus tres lados debieran sumar 22. Y ahí creo que está la errata, pues no existe ninguna combinación de números que permita ese resultado. ¿Puede ser que el resultado de la suma fuera 23? De hecho las sumas de los lados pueden ser 17, 20 ó 23. Y aunque no te puedo enviar la demostración por escrito, porque no he tenido tiempo de redactarlo he averiguado el proceso para analizar todas las soluciones posibles.››

Es evidente que la duda fue aclarada en su día al dar la respuesta en esta misma sección.

‹‹Problema:

Hallar los números de tres cifras tales que la suma de sus cifras multiplicada por 11, es igual a la diferencia entre dicho número y su "reverso".

Desarrollé este problema por álgebra hasta que llegué a un punto en que no supe seguir, luego lo intenté resolverlo con una hoja de cálculo, consiguiendo todas las soluciones y a partir de ahí comprendí como continuar el problema por álgebra, obteniendo las mismas soluciones.

Datos: Números de 3 cifras.

Relación: La suma de las cifras multiplicado por 11 es igual a la diferencia del número con su reverso.

Objetivo: Hallar todos los números que cumplen esa condición.

Expresión matemática: $11\,(A+B+C) = (100A + 10B + C) - (A + 10B + 100C)$

$$11\,(A+B+C) = 99A - 99C$$

$$A+B+C = 9\,(A - C)$$

Cuando llegué a este punto no supe cómo continuar, cuando realmente estaba ya bastante clara la solución. En este momento opté por la vía de utilizar una hoja de cálculo para analizar uno a uno todos los números de 3 cifras, obteniendo fácilmente los 17 números que cumplen la condición del problema:

162, 180, 243, 261, 324, 342, 405, 423, 486, 504, 567, 648, 684, 729, 765, 846 y 927

P R O B L E M A S

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	N	EXTRAE(N;1;1)	EXTRAE(N;2;1)	EXTRAE(N;3;1)	B+C+D	E*11	100*D+10*C+B	A-G	ABS(H)	COMPARA F CON I
64	**162**	1	6	2	9	99	261	-99	99	1
82	**180**	1	8	0	9	99	81	99	99	1
145	**243**	2	4	3	9	99	342	-99	99	1
163	**261**	2	6	1	9	99	162	99	99	1
226	**324**	3	2	4	9	99	423	-99	99	1
244	**342**	3	4	2	9	99	243	99	99	1
307	**405**	4	0	5	9	99	504	-99	99	1
325	**423**	4	2	3	9	99	324	99	99	1
388	**486**	4	8	6	18	198	684	-198	198	1
406	**504**	5	0	4	9	99	405	99	99	1
469	**567**	5	6	7	18	198	765	-198	198	1
550	**648**	6	4	8	18	198	846	-198	198	1
586	**684**	6	8	4	18	198	486	198	198	1
631	**729**	7	2	9	18	198	927	-198	198	1
667	**765**	7	6	5	18	198	567	198	198	1
748	**846**	8	4	6	18	198	648	198	198	1
829	**927**	9	2	7	18	198	729	198	198	1

En este momento y tras estudiar los números fui capaz de continuar con el problema en su resolución algebraica:

$$A+B+C = 9\ (A - C)$$

De esta expresión se obtiene la siguiente información:

1) La suma de los tres dígitos ha de ser múltiplo de 9

2) El valor absoluto de A – C no puede ser 0 pues no hay números de tres cifras cuyas cifras sumen 0

3) El valor absoluto de A – C no puede ser 3 o mayor de 3, porque entonces, 9 (A – C) sería igual a 27, y por tanto A+B+C tendría que ser el número 999, que es el único cuyas cifras suman 27, pero la diferencia con el inverso sería 0.

4) El valor absoluto de A - C tiene que ser igual a 1 o igual a 2

Si $|A - C| = 1$, entonces $9\ (|A - C|) = A+B+C = 9$

A	C	B	Número ABC	A+B+C Múltiplo de 9	Y sus inversos CBA
1	0	8	**180**	9	---
1	2	6	**162**	9	**261**
2	3	4	**243**	9	**342**
3	4	2	**324**	9	**423**
4	5	0	**405**	9	**504**

Si $|A - C| = 2$, entonces $9\ (|A - C|) = A+B+C = 18$

A	C	B	Número ABC	A+B+C Múltiplo de 18	Y sus inversos CBA
4	6	8	**486**	18	**684**
5	7	6	**567**	18	**765**
6	8	4	**648**	18	**846**
7	9	9	**799**	18	**997**

Con lo que obtenemos las mismas soluciones que utilizando la hoja de cálculo.>>

Otro de nuestros lectores, José Ignacio Martínez, se presenta y nos hace un comentario sobre un problema propuesto por nosotros hace algún tiempo y que, en su día, provocó algunos escritos con soluciones varias. Llega a la misma solución que nuestra lectora la profesora Nora Ferreyra, de Argentina, publicada en el **NÚMEROS**, pero con otro enfoque. Gracias por tu amable aportación.

‹‹Me llamo José Ignacio Martínez y doy clase de Matemáticas en 1º y 2º ESO en un Centro Concertado de la ciudad de Burgos.

Estoy preparando a un reducido grupo de alumnos para su participación en la Olimpiada Matemática y he trabajado un problema que ustedes publicaron en la Revista nº 73, (Cinco amigos y una pesa). En la revista nº 75, el lector S. Alexander Hernández Hernández argumentó que este problema no tiene solución. Yo creo que se equivoca y en el archivo adjunto les envío mi solución.

Un cordial saludo

El enunciado del problema propuesto en la revista nº 73 (problemas comentados XXIV) dice así:

Cinco amigos y una pesa

Cinco amigos se pesan de dos en dos de todas las formas posibles. Los pesos de las parejas son:

90, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 100 y 101 kilos. ¿Cuál es el peso del conjunto de los cinco?

Solución

Peso de cada persona:

persona	a	b	c	d	e
peso	49	44	46	48	52

Pesos por parejas:

a+b	a+c	a+d	a+e	b+c	b+d	b+e	c+d	c+e	d+e
93	95	97	101	90	92	96	94	98	100

Método de trabajo:

Como el peso total de las cinco personas es 239 kg, que es número impar, caben seis posibilidades:

a) Que el peso de cada uno sea par. No es posible, porque la suma de todos sería par.
b) Que el peso de uno sea impar y el de los otros sea par. La suma total sería impar y habría cuatro parejas impares y seis pares.
c) Que el peso de dos sea impar y el de los otros tres sea par. No es posible, porque la suma total sería par.
d) Que el peso de tres sea impar y el de los otros dos sea par. La suma total sería impar, pero habría seis parejas impares y cuatro pares.
e) Que el peso de cuatro sea impar y el del otro sea par. No es posible, porque la suma total sería par.
f) Que el peso de todos y cada uno sea impar. La suma total es impar, pero el valor de cada pareja sería par.

Solamente el caso b) cumple todas las condiciones. Tiene que haber un peso impar y cuatro pares.

Por ensayo-error, y con sistemas de ecuaciones, no es difícil llegar a la conclusión que he ofrecido al principio.››

Un profesor del Colegio Nuryana de La Laguna –no sabemos si tras una visita al famoso Loro Parque del Puerto de la Cruz (Tenerife)–, nos ha hecho llegar la solución y el razonamiento empleado por uno de sus alumnos, Noé Rizo, sobre un problema del Proyecto Newton, extraído del Rally Matemático Transalpino.

El problema es éste:

Los loros coloreados

Los huevos puestos por el loro de Marcos han eclosionado. Cada pajarillo recién nacido es de un solo color: amarillo, rojo, verde o azul.
Marcos observa que los recién nacidos son:
– todos rojos excepto 15,
– todos amarillos excepto 12,
– todos verdes excepto 14,
– todos azules excepto 13.
¿Cuántos loritos recién nacidos tiene Marcos? ¿Cuántos de cada color? Explicad vuestro razonamiento.

Y Noé lo resuelve así:

Rojos hay menos. Amarillos hay más: 15 > 14 > 13 > 12, van de unidad en unidad

Las soluciones también irán de unidad en unidad

Buscar tres números que vayan de unidad en unidad y que sumen 15

Sólo se puede hacer con 6 + 5 + 4 = 15

Ahora con el 12 → 3 + 4 + 5 = 12

Con el 13 → 3 + 4 + 6

Con el 14 → 3 + 5 + 6

Azules: 5   Verdes: 4   Rojos: 3   Amarillos: 6

En total hay 3 + 4 + 5 + 6 = 18.>>

Nosotros teníamos las siguientes formas de resolverlo, quizá por la fijación que en la docencia en el campo de la resolución de problemas nos ha imbuido:

Proceso de resolución

Fase I. Comprender

Datos: Cada lorito recién nacido es de un solo color: amarillo, rojo, verde o azul.

Objetivo: Cuántos loritos recién nacidos tiene Marcos. Cuántos de cada color.

Relación: Marcos observa que los recién nacidos son:

- todos rojos excepto 15,
- todos amarillos excepto 12,
- todos verdes excepto 14,
- todos azules excepto 13.

Diagrama: Tabla simple para ensayos.

Ensayos: Total de loritos	**Loros rojos**	**Loros amarillos**	**Loros verdes**	**Loros azules**	Total

Partes/Todo

Loritos recién nacidos			
Loros rojos	**Loros amarillos**	**Loros verdes**	**Loros azules**

Fase II. Pensar

<u>Estrategias</u>: Ensayo y Error. Organizar la Información.

Fase III. Ejecutar

Por Ensayo y Error:

Darse cuenta de que el número n de loritos es superior a 15 y proceder por ensayos:

Ensayos: Total de loritos	Loros rojos	Loros amarillos	Loros verdes	Loros azules	Total
16	16 – 15 = 1	16 – 12 = 4	16 – 14 = 2	16 – 13 = 3	10

Si n = 16 entonces habría 1 Rojo (16 – 15), pero entonces, según las condiciones siguientes, habría también 4 Amarillos, 2 Verdes y 3 Azules y su suma sería 10 y no 16, como habíamos supuesto en el ensayo. Error.

Hacemos un nuevo ensayo.

Ensayos: Total de loritos	Loros rojos	Loros amarillos	Loros verdes	Loros azules	Total
16	16 – 15 = 1	16 – 12 = 4	16 – 14 = 2	16 – 13 = 3	10
17	2	5	3	4	14

Si n = 17 entonces habría 2 Rojos (17 – 15), pero entonces, según las condiciones siguientes, habría 5 Amarillos, 3 Verdes y 4 Azules y su suma sería 14 y no 16. Error.

Hacemos otro ensayo.

Ensayos: Total de loritos	Loros rojos	Loros amarillos	Loros verdes	Loros azules	Total
16	16 – 15 = 1	16 – 12 = 4	16 – 14 = 2	16 – 13 = 3	10
17	2	5	3	4	14
18	3	6	4	5	18

Si n = 18 entonces habría 3 Rojos, 6 Amarillos, 4 Verdes y 5 Azules, donde la suma representaría efectivamente 18 loritos. Acierto.

Es necesario darse cuenta que n = 18 es la única solución porque si n es superior a 18, la suma Rojos + Amarillos + Verdes + Azules sería superior a n (y el resultado aumentaría con el crecimiento de n).

Podemos Organizar la Información mediante el uso del Álgebra:

Loritos recién nacidos

Loros rojos	Loros amarillos	Loros verdes	Loros azules

Sería necesario repetir el diagrama cuatro veces, tomando como partes (y sus etiquetas) grupos formados por tres de las partes (tal y como se expresa en la relación).

Darse cuenta que "son todos rojos excepto 15" equivale a decir que hay 15 no-rojos (es decir, los amarillos, los verdes y los azules) y llegar así (preálgebra) a la ecuación

Amarillos + Verdes + Azules = 15,

Proceder de manera análoga para los otros colores y llegar a otras tres ecuaciones

Rojos + Verdes + Azules = 12

Rojos + Amarillos + Azules = 14

Rojos + Amarillos + Verdes = 13;

Resolver el sistema por sustituciones sucesivas, o darse cuenta de que sumándolas miembro a miembro se obtiene:

3 (Rojos + Amarillos + Verdes + Azules) = 15 + 12 + 14 + 13 = 54

y deducir como consecuencia que el número total de loritos 54 : 3 = 18.

Concluir, a partir de este resultado, que hay 3 loritos rojos (18 – 15), 6 amarillos (18 – 12), 4 verdes (18 – 14) y 5 azules (18 – 13).

Solución: Hay 18 loritos: 3 loritos rojos, 6 amarillos, 4 verdes y 5 azules.

Fase IV. Responder

Comprobación: Realizar las operaciones necesarias para constatar que se cumplen las condiciones de la relación:

3 + 6 + 4 + 5 = 18

18 – (6 + 4 + 5) = 18 – 15 = 3 loritos rojos

18 – (3 + 4 + 5) = 18 – 12 = 6 loritos amarillos

18 – (3 + 6 + 5) = 18 – 14 = 4 loritos verdes

18 – (3 + 6 + 4) = 18 – 13 = 5 loritos azules

Análisis: La solución es única. Se puede constatar con ensayos (como se hizo en la estrategia de Ensayo y Error) utilizando un valor inferior y otro superior a 18.

Respuesta

Hay 18 loritos: 3 loritos rojos, 6 amarillos, 4 verdes y 5 azules.

Hay un aspecto interesante del Proyecto Newton que ya hemos comentado algunas veces. Se trata del Blog para las Familias, cuyo administrador es precisamente Luis Ángel Blanco Fernández.

Rincón matemático para las familias.

Su dirección es:

http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/edublogs/proyectonewton/category/principal/

Entre las últimas entradas del blog se encuentra el problema famoso de la fecha de nacimiento que mencionamos al comienzo del artículo. Podrán ver también los numerosos comentarios que dicho problema suscitó y, naturalmente, la solución del mismo.

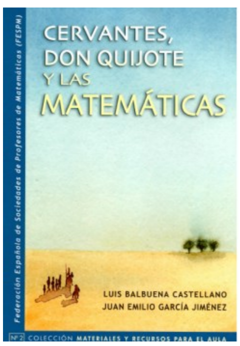
Ganadores del II Desafío Gnoss Educa en la Categoría "Mejor colección de recursos de un usuario en Didactalia" en el año 2012

DESAFÍO GNOSS EDUCA

Otro blog interesante, que está conectado personalmente con nosotros y también está enlazado con el Blog del Proyecto Newton es Mates y Más, del profesor andaluz José María Vázquez. Aparte de la dedicación que da a la resolución de problemas está su entusiasmo por el Geogebra, lo que hace que utilice mucho dicho programa para presentar los enunciados y las soluciones. Muy recomendable. Su dirección es: http://www.matesymas.es/.

Queremos llamar la atención sobre dos publicaciones relacionadas con la matemática recreativa.

La primera es de la Real Sociedad Matemática Española y publicada por la editorial SM. Se trata de una obra colectiva dedicada a la memoria de Martin Gardner, con el título de "Gardner para principiantes", coordinado por Fernando Blasco y una estructura curiosa, trece capítulos, uno por cada carta de un palo de la baraja.



La segunda es de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, se titula "Cervantes, Don Quijote y las matemáticas" y sus autores son Luis Balbuena Castellano y Juan Emilio García Jiménez.

Recomendamos ambas como dos lecturas interesantes.

Resolver un problema consiste en partir de una información conocida, gestionar adecuadamente la información dada y obtener una respuesta a la pregunta formulada sobre una información desconocida pero relacionada con la anterior.

Para realizar esa gestión debemos tener en cuenta tres cosas:

1º) Gestionar la información conocida, organizarla, clasificarla, secuenciarla, ordenarla, sistematizarla, distribuirla espacialmente sobre un gráfico o diagrama.

2º) Gestionar el campo matemático a qué hace referencia la estructura del problema.

3º) Gestionar la estrategia o camino más adecuado para emprender la ejecución, eligiéndola de acuerdo con las gestiones anteriores.

Veamos un ejemplo de problema, el nº 10 de la Final del 21 º Rally Matemático Transalpino. Recordamos que los problemas del RMT están protegidos por derechos de autor. Para utilizarlos en clase, se ruega indicar la procedencia del problema con la fórmula "©ARMT" o de indicarlo en el encabezamiento de la página.

¡Cuántas manzanas!

Ángela tiene cierto número de manzanas en un cesto, se come dos y decide distribuir las manzanas restantes, en partes iguales, entre Beatriz y Carla. Beatriz y Carla se comen una cada una. Después cada una de ellas distribuye sus manzanas, en partes iguales, entre otras dos amigas: Beatriz da una parte a Daniela y una a Ester, Carla da una parte a Francisca y una a Gabriela.

Daniela, Ester, Francisca y Gabriela comen una manzana cada una. Francisca observa que le quedan cuatro manzanas.

¿Cuántas manzanas tenía Ángela en su cesto antes de comer sus manzanas?

Explicad cómo habéis encontrado vuestra respuesta.

Proceso de resolución

Fase I. Comprender

Datos: A Francisca le quedan cuatro manzanas.

Información oculta: entender que a cada una de las cuatro últimas amigas le quedan 4 manzanas, como a Francisca.

Objetivo: Averiguar las manzanas que tenía Ángela en su cesto al comienzo

Relación: Ángela tiene cierto número de manzanas, se come dos y reparte el resto en partes iguales entre Beatriz y Carla. Beatriz y Carla se comen una cada una. Después reparten las restantes en partes iguales entre Daniela y Ester, Francisca y Gabriela. Daniela, Ester, Francisca y Gabriela comen una manzana cada una.

Diagrama: Tabla simple para ensayo y error

Diagrama de flechas

Diagrama de árbol

Fase II. Pensar

Estrategias: Ensayo y Error

Organizar la Información

Ir hacia atrás

Fase III. Ejecutar

Mediante Ensayo y Error

Elegir un número inicial para las manzanas del cesto e imaginar la situación. Ángela come 2, después de lo cual el número de manzanas restantes debe ser igualmente par de manera que se pueda repartir en dos partes, por tanto también el número inicial de manzanas debe ser par.

Adecuar la elección del número inicial para tener la posibilidad en cada subdivisión de poder llegar a las 4 manzanas por cabeza al final.

Inicio	Come 2	Reparto 1º	Comen 1	Reparto 2º	Comen 1	
						4

Tiene que ser un número par, para poderlo dividir entre 2.

Inicio	Come 2	Reparto 1º	Comen 1	Reparto 2º	Comen 1	Resto
18	16	8	7	No puede		4
16	14	7	6	3	2	< 4
20	18	9	8	4	3	< 4
22	20	10	9	No puede		
24	22	11	10	5	4	= 4

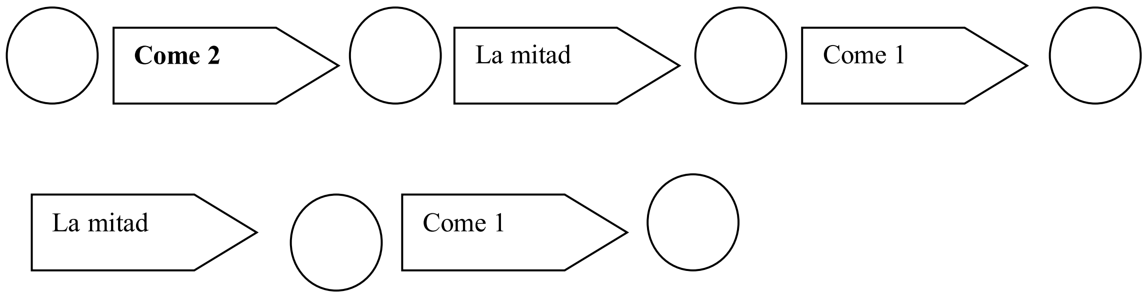
Mediante Organizar la información es sencillo darse cuenta que la totalidad de manzanas es la suma de las que quedan y las que se comen.

Las que sobran son 4 x 4 = 16. Las que se comen son: 2 + 2 + 4 = 8.

Ángela, 2. Beatriz y Carla, una cada una, 2. Daniela, Ester, Francisca y Gabriela, una cada una, 4. Es decir, las manzanas en el cesto eran 16 + 8 = **24**.

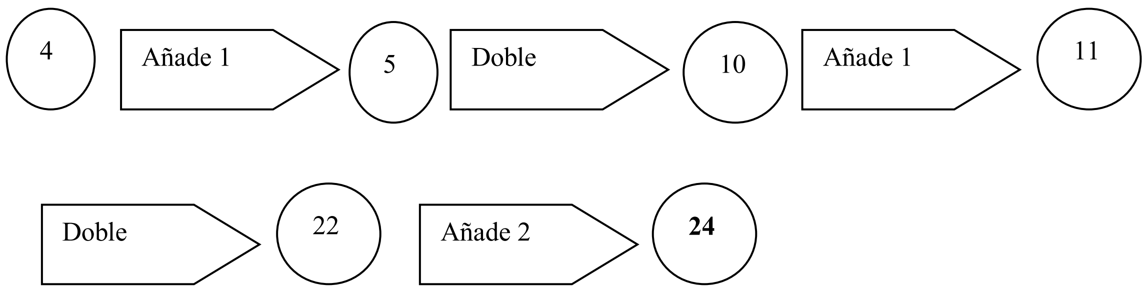
Mediante Ir hacia atrás

Podemos realizar un diagrama de flechas que represente las acciones sucesivas realizadas a partir del cesto de manzanas inicial y con sólo una línea de reparto.



Ángela come 2 y luego da la mitad a Beatriz; ésta come 1 y da la mitad a Francisca, que a su vez come 1 y le quedan 4.

Realizamos el diagrama inverso:



Después de haber comido una manzana, Francisca tiene todavía 4 manzanas, por lo tanto había recibido 5. Cinco es la mitad de lo que Carla ha repartido. Puesto que ella ha comido una, Carla había recibido $5 \times 2 + 1 = 11$ manzanas. Once es la mitad de las que Ángela repartió. Puesto que ella ha comido dos, Ángela tenía inicialmente $11 \times 2 + 2 = 24$ manzanas en su cesto.

Si se trazan todas las líneas de reparto, entonces tendremos un diagrama de árbol:

				Daniela	Come 1	4
		Beatriz	Come 1			
				Ester	Come 1	4
Ana	Come 2					
				Francisca	Come 1	4
		Carla	Come 1			
				Gabriela	Come 1	4
		MITAD		MITAD		

Se procedería de manera similar a las anteriores, por Ensayo y Error o mediante Ir Hacia Atrás.

Solución: 24 manzanas

Fase IV. Responder

Comprobación:

Realizando en forma directa lo sucedido a partir de las 24 manzanas iniciales obtenemos:

24 → 24 – 2 = 22 → 22 : 2 = 11 → 11 – 1 = 10 → 10 : 2 = 5 → 5 – 1 = 4

Análisis: La solución es única.

Respuesta:

Ángela tenía 24 manzanas en su cesta antes de empezar a comer y repartir.

Y, finalmente, un par de problemas para que vayan pensando en ellos e intenten resolverlos durante el tiempo de espera hasta la siguiente entrega.

Este primero es también del RMT, concretamente el nº 13 de la Final de la 22ª edición.

El asno Marcovaldo

Berto utiliza su asno Marcovaldo para transportar las manzanas de su huerto a la tienda en la ciudad, donde se venderán. La tienda dista 30 km del huerto y Berto ha producido 90 kg de manzanas.

Marcovaldo es capaz de transportar 30 kg de manzanas a la vez, pero por cada kilómetro recorrido llevando manzanas, come 1 kg. No come nada si no está cargado.

Berto se ha dado cuenta de que si Marcovaldo hiciese 30 km en un solo trayecto, partiendo con 30 kg, se comería todas las manzanas.

Decide entonces organizar depósitos entre el huerto y la tienda.

Por ejemplo, si en un primer viaje Berto depositase a medio camino 15 kg de manzanas, podría hacer un segundo viaje con 30 kg al comienzo y llegar a medio camino, para después cargar los 15 kg del depósito y llegar con 15 kg a la tienda.

Quedarían entonces todavía 30 kg en el huerto.

Pero Berto puede ser capaz de llevar más manzanas a la tienda con una mejor organización de sus depósitos.

¿Cuántos kg, como máximo, podrá Berto llevar a la tienda?

Explicad vuestro razonamiento.

Y ahora un problema que creemos recordar fue publicado en la añorada revista CACUMEN, hace ya unos años, y que tiene su “aquello”.

La ley de las amazonas

Las amazonas tienen una ley para cuando capturan un macho reproductor, dictada con el objetivo de evitar la muerte por agotamiento del mismo y el lograr el mayor número de embarazos posibles. Cada semana, tres mujeres conviven con el agraciado, pero solo dos serán objeto de sus caricias. La ley dice que nunca debe estar una misma pareja de amazonas dos semanas (*). Si hay siete amazonas en edad fértil, ¿Cuántas semanas podrá disfrutar el desdichado reproductor?

(*) y cuando esto no sea posible, el donante será convertido en eunuco.

Bueno, no está mal. Habrá más artículos; en el próximo veremos la respuesta a estos últimos problemas y plantearemos algunos nuevos y seguiremos prestando atención a las comunicaciones de nuestros lectores.

Pero, claro, esperamos que nos escriban muchos más.

Insistimos: resuelvan los problemas, singulares y alejados de los cotidianos; utilícenlos con los alumnos y, sobre todo, aporten sus comentarios a la revista, sus soluciones e, incluso, nuevas propuestas. O, simplemente, cuéntennos lo sucedido en el transcurso de la clase en que probaron el problema. Queremos pensar que nuestras propuestas tienen uso en el aula. Eso nos alegraría mucho y también al resto de lectores. Vamos, anímense…

Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista.

NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**