LA DIDACTICA DE LA MATEMATICA DE HOY. APORTACIONES AL ESTUDIO DE SUS PROBLEMAS

Luciano Fernández Rueda
Colegio "Manuel Peleteiro"
Santiago de Compostela

A MODO DE INTRODUCCION

La Matemática de los Bachilleratos pasados, antes de las "reformas bourbakistas", no solía tener buena acogida por parte de los alumnos: el progresivo adiestramiento en la exigencia del rigor demostrativo les resultaba penoso, quizás excesivamente abstracto y, desde luego, ajeno a su mundo de interés. Por otro lado, en esas edades en que se cursa el Bachillerato predomina la tendencia a la acción y a la fantasía, poco en consonancia con la atención continuada e imprescindible para iniciar una metodología lógico-deductiva que, en esencia, constituye el aprendizaje matemático.

Ahora, podemos asegurar que el rechazo escolar hacia la Matemática es muchísimo mayor. Y se debe, entre otras cosas relativas a la planificación de los estudios medios, al carácter formal de la mal llamada Matemática Moderna, cuyo espíritu domina los programas desde la escuela elemental. El grado de abstracción se ha acentuado, la guía intuitiva ha desaparecido; sin tener en cuenta el desinterés escolar por tanto purismo.

La casi supresión de la Geometría en el sentido euclidiano, como paso intermedio entre la intuición y el razonamiento lógico, ha sido, a nuestro parecer, desde un punto de vista didáctico, un verdadero desacierto. De este modo, y salvo para una minoría reducidísima de alumnos bien dotados para el razonamiento abstracto,los demás,la inmensa mayoría,podrían preguntarse,no sin razón:¿para qué tenemos que esforzarnos en el estudio de algo tan vacío de contenido real? Y,sin embargo,tal vez por el prestigio,casi supersticiosso,de que goza la Matemática como disciplina importante,acatan su imposición y,resignadamente,admiten su yugo.

Debiéramos meditar sobre tal rechazo y considerar que la Matemática,tal como se presenta hoy a los alumnos,no es más que una síntesis abstracta,unas formalizaciones elaboradísimas sin motivación aparente que,al carecer de aplicaciones inmediatas dentro de su mundo real,no encierran los atractivos de libre creación,culturales o emocionales imprescindibles para provocar el interés escolar. Es más,para el hombre de la calle-y el Bachillerato forma hombres de la calle,no futuros matemáticos-esta versión de la Matemática carece de un inmediato interés. Incluso,al futuro científico e investigador le perjudica en lugar de beneficiarle,ya que prescinde,por ejemplo,de los poderosos recursos de la intuición geométrica,que constituyen fecundas directrices del pensamiento abstracto.

IMPORTANCIA DIDACTICA DE LA GEOMETRIA ELEMENTAL

En un célebre coloquio celebrado en 1959,con el tema "Las Matemáticas nuevas",el profesor Dieudonné,del grupo Bourbaki,lanzó como bandera el demoledor grito de *! Abajo Euclides,muera el triángulo!* Fuera porque el prestigio de Dieudonné era,y es,innegable,o porque tales expresiones tienen garra por su vigor,esta diatriva ha prevalecido hasta ahora,ocultando su exposición en defensa de una Geometría actualizada. Tal vez sea esto el fundamento del implacable ataque que,desde entonces,ha sufrido la enseñanza de la Geometría,desaparecida virtualmente de los programas de Bachillerato. Hoy,con mayor objetividad,se echa de menos, desde un punto de vista didáctico,en el proceso de iniciación escolar a la Matemática.

Huyendo de frases demoledoras y afirmaciones rotundas,analizaremos los pros y los contras de la polémica que,didácticamente,tiene importancia suma.

Entre los argumentos esgrimidos por los partidarios de la enseñanza de la Geometría,podemos destacar los siguientes:

a) El estudio geométrico permite el tránsito de la intuición al razonamiento,sirviendo las figuras y los postulados implícitos-que son admitidos sin escrúpulo por los alumnos-para cimentar la posterior abstracción y el razonamiento lógico. Este hecho no sólo está contrastado por la experiencia docente de muchos años,sino que la propia historia de los descubrimientos matemáticos lo confirma;no olvidemos que,a causa de estas intuiciones previas,la Geometría ha dado su lenguaje a todas las ramas de la Matemática,y que el Análisis está construido en gran parte sobre principios geométricos.

b) La Geometría clasica euclídea ha sido el modelo utilizado en la descripción del espacio físico en que vivimos y este espacio se ha utilizado siempre en la Física y en la Mecánica. Pues bien,aunque es cierto que estas han contribuido al desarrollo de otros espacios(los de Riemann,por ejemplo) y que las ciencias humanas hacen actualmente un gran consumo de otras estructuras no euclídeas,resulta difícil comprender cómo podríamos abordar esas otras geometrías sin conocer y dominar antes las propiedades de la más intuitiva y familiar.

c) Otro argumento en favor de la enseñanza de la Geometría,en su sentido tradicional,radica en la multitud de estructuras diversas contenidas en esa gran estructura del espacio euclídeo. Desde un punto de vista didáctico,ningún profesor puede ignorar,porque la ha utilizado,esa riquísima mina de problemas geométricos y la gran cantidad de razonamientos deductivos motivados por la Geometría elemental.

Los mismos partidarios de la reforma a ultranza están convencidos hoy día de haber ido demasiado lejos. Afirman que no se trataba de suprimir la Geometría,sino de ponerla en orden. Insisten en que,por ser su enseñanza una verdadera tradición,solamente se debe modificar para dejar libre el camino a las tendencias de la Matemática actual y permitir la subida de savia nueva que la vigorice.

En nuestra pretendida Didáctica de la Matemática,tendremos en cuenta los dos siguientes principios:

. *La Geometría elemental ofrece las motivaciones más adecuadas para interesar al alumno en el estudio de la Matemática.*

. *Ninguna rama de la Matematica-docente encierra mayor riqueza para el desarrollo del ingenio matemático que los ejercicios geométricos, especialmente los que se refieren a construcciones gráficas.*

FACTORES QUE INFLUYEN NEGATIVAMENTE EN LA DIDACTICA DE LA MATEMATICA.

La enseñanza de la Matemática de Bachillerato se ve actualmente condicionada por una serie de factores,unos internos y otros ajenos a nuestra ciencia y a su didáctica,que impiden el desarrollo de una programación didáctica adecuada y conveniente. Enumeraremos y,en algún caso,comentaremos someramente,los que consideramos más importantes :

a) El profesor de Matemáticas de Bachillerato se forma en facultades específicas. Esta formación,indispensable para enseñar con solvencia,influye poderosamente en el modo de enseñar. Así, se está produciendo en estos últimos años un condicionamiento excesivamente formalista, como corresponde a la Matemática actual,que no es el más adecuado para una enseñanza de motivación.

b) El proceso continuo de la investigación matemática ha revolucionado los objetivos y fines de la enseñanza universitaria,lo que,a su vez,ha dado lugar a nuevos condicionamientos y exigencias renovadoras en los programas de nivel medio. Esta verdadera revolución ha producido un notorio desequilibrio entre una Matemática actual y una Matemática de base,de carácter docente y de aplicación,que será la que necesitarán en sus profesiones futuras la inmensa mayoría de los alumnos.

El exceso de formalización exigido por los programas ha provocado el que muchos textos,en aras del purismo matemático,recurran a toda clase de artificiosidades para obviar los planteamientos tradicionales, intuitivos y sencillos. Véase,a modo de ejemplo,la definición rebuscada y antinatural de progresión aritmética de numerosos libros al uso.

c) Desde hace algún tiempo parece que a la Matemática del Bachillerato se le va restando importancia. Así, mientras el plan de 1903 dedicaba un 24% de la totalidad de horas lectivas a nuestra materia, en el actual se le reserva un 13%, y esto en el caso de los alumnos que la eligen entre las optativas de 3º.

d) La mayoría de los alumnos que acuden a nuestros Institutos carecen de la base y madurez necesarias para iniciar el Bachillerato, especialmente en lo que a Matemáticas se refiere. Ello obliga a hacer serias restricciones en el desarrollo de los programas e, incluso, a buscar una didáctica de circunstancias.

e) El horario lectivo está excesivamente recargado.

f) La Matemática, factor fundamental en el proceso escolar formativo, ha sido, por su naturaleza deductiva, una de las disciplinas peor libradas.

Todos estos factores influyen en la planificación didáctica de forma decisiva y, muchas veces, condicionan al profesor como "atándolo de pies y manos" en el ámbito del aula.

DIDACTICA EURISTICA

A finales del siglo pasado un ingeniero inglés, John Perry, inició una corriente renovadora de la rígida y escolástica enseñanza inglesa de la Matemática en la escuela. Consideraba que las versiones más o menos actualizadas de los "Elementos" de Euclides, base de la enseñanza inglesa, no eran libros adecuados para iniciar a principiantes. Esta reacción pedagógica contra la influencia de los "Elementos" se había suscitado ya en otros paises del continente europeo.

La idea fundamental de Perry era poner de manifiesto las estructuras matemáticas que, de una forma natural y sin esfuerzo, pueden intuir y asimilar los alumnos através de sus juegos o en su propio ambiente. Son ejemplos de ello: la intuición del concepto de coordenadas cartesianas jugando a descubrir un "tesoro" enterrado en el patio del colegio, cuyos muros constituyen las referencias (ejes), y el paso del alumno la unidad de longitud real representada por números (coordenadas) escritos en el "plano"; la de la semejanza de triángulos mediante la comparación de las sombras de un árbol y de una estaca vertical de longitud conocida;el conocimiento de la simetría axial y de infinidad de propiedades geométricas por simples dobleces de una hoja de papel;etc.

El profesor Puig Adam,excelente pedagogo,se constituye en nuestro país en paladín de estas tendencias eurísticas,con modelos e ideas originales. Emprende la tarea de romper el tradicionalismo docente:busca la sustitución del profesor clásico,expositor más o menos brillante de lecciones,por una actividad casi espontánea de los alumnos,estimulados y orientados por la habilidad e ingenio del profesor.

En el año 1960 el ambiente era favorable para llevar a cabo la reforma propugnada por Puig Adam. No obstante,este afán renovador se fue enfriando. Por un lado,los paladines del método eurístico,llevados por su entusiasmo,desbordaban fácilmente la línea de la mesura y caían en posturas rayanas en lo pintoresco y extravagante. Por otro,pronto pudo apreciarse que esta corriente pedagógica no podía aplicarse con carácter general a los programas de Bachillerato,imprimía una gran lentitud al desarrollo de los mismos y,por añadidura.requería un profesorado con aptitudes especiales no frecuentes.

Y así,tal vez volviendo la espalda a lo que debiera ser una realidad docente,esta corriente eurística ha pasado a la historia.Como contrapartida,tendemos a enseñar una Matemática formal,alejada de la Geometría y de la intuición.

LA MATEMATICA MODERNA Y SU DIDACTICA

La presentación de la Matemática,tal como se deriva de los programas oficiales de nuestro Bachillerato,está supeditada a las tendencias actuales de carácter axiomático-formal. Los libros de texto acentúan,si cabe,este carácter,en perjuicio de una línea más intuitiva y conveniente. Tal presentación,en franca disonancia con el mundo de interés de los escolares,produce un gran desajuste pedagógico. Así,es frecuente exponer "a priori" la axiomática de una estructura y,por un desarrollo lógico, llegar al conocimiento de esta. Justo el camino opuesto al que sigue el matemático para culminar esa formalización.

Cuando la reforma comenzaba a mostrar su aspecto negativo, surgieron voces muy autorizadas intentando poner remedio. Reseñaremos algunas de estas opiniones:

El profesor Choquet, uno de los promotores entusiastas de la reforma, decía en 1973 : " *Sobre todo es de hacer notar que los nuevos programas y las instrucciones correspondientes son, pese a algunos errores de consideración, más satisfactorios que los antiguos; pero, sin embargo, la reforma se ha rodeado de una atmósfera nociva que acompaña su puesta a punto. En particular, se ataca a la Geometría y a los recursos de la intuición: se les dice a los profesores que enseñar la geometría del triángulo es estar anticuado, que el Algebra Lineal reemplaza por completo a la Geometría. En consecuencia, los profesores se sienten acomplejados y sólo enseñan Algebra; no osan jamás utilizar los recursos de la intuición y se refugian en el formalismo que les ampara como profundo cortafuegos.*

No se adaptó a los profesores a la enseñanza de los nuevos programas, no se les puso en guardia, ni tampoco a los autores de libros de texto, contra los excesos del formalismo. Y el resultado es tal que, sin una sabia reacción de base, pienso que la generación actual no recibirá una formación matemática que le prepare, ni para la investigación matemática, ni para la uitilización de la Matemática en la técnica y en las ciencias experimentales."

Por su parte, la profesora Jacqueline Lelong-Ferrand, de la Universidad de París, decía por las mismas fechas: " *Muchos de los tratados de iniciación parecen haber sido pensados bajo el principio de la lógica de Shaddocks:* Para qué hacer sencillo lo que puede hacerse complicado". Y añadía: " *La realización de la reforma no debiera limitarse a una visión formalista de la Matemática, porque entonces, estamos avocados a dar a los niños una enseñanza tan alejada de la realidad como de la verdadera Matemática* ".

El profesor español que, con detenimiento y sentido crítico exento de prejuicios, revise nuestros programas y los textos que los desarrollan, tendrá que establecer comparaciones con los correspondientes a otras épocas todavía recientes;notará diferencias muy notables,no sólo en contenidos,sino,y sobre todo,en el enfoque de un pretencioso sentido del rigor,impropio de una iniciación matemática,que los alumnos no sienten ni comprenden.

CONSIDERACIONES GENERALES PARA UNA DIDACTICA DE LA MATEMATICA

La Matemática,como asignatura del Bachillerato,debe tener preferentemente un carácter formativo,sin menospreciar por ello los conocimientos de Matemática práctica que tal proceso docente proporciona.

Este carácter formativo gravita sobre la metodología empleada,en los caminos seguidos por una didáctica adecuada y en la personalidad del profesor. Todo ello,naturalmente,bajo unos programas racionales, concebidos en función de la edad mental de los alumnos.

Sin pretender ser exhaustivos,enumeraremos una serie de facetas que,con intensidad irregular en función del curso y de la madurez de los alumnos,concurren para completar la personalidad del escolar bajo la disciplina matemática :

. Estimula la atención del alumno de forma continuada y favorece la concentración del pensamiento.

. Habitúa a la observación metódica y reflexiva y,consecuentemente,permite intuir y ponderar lo intuido.

. Facilita el paso de lo concreto a lo universal y abstracto.

. Permite el razonamiento general y abstracto,fomentando el análisis y el sentido de relación y analogía.

. Crea el hábito del razonamiento lógico como base de la verdad y,por tanto,el sentido del rigor.

. Sienta las bases para la creatividad lógica,sobre bases axiomáticas.

. Favorece la capacidad de síntesis.

Para un logro óptimo de estos aspectos formativos,el profesor debe reunir condiciones vocacionales,junto a una formación científica,y concretamente matemática,lo más amplia posible;debe tener un conocimiento práctico de la psicología del aprendizaje,adquirido principalmente a través de su propia experiencia,y un grado de libertad amplio para su función. No puede,como hasta ahora sucede,encontrarse supeditado a unos factores condicionantes,como los que hemos reseñado,que limitan,y hasta impiden,una labor eficaz.

Para entrar en el análisis de una didáctica eficaz,tendremos que cometer una ficción:suponer que los legisladores,dándose cuenta de la importancia y el peso que gravita sobre la enseñanza en general y sobre la planificación mátemática en particular,han conseguido un Bachillerato libre de condicionantes externos,donde se pueda realizar con normalidad una función pedagógica exenta de limitaciones,cortapisas y agobios.

CONSIDERACIONES SOBRE UN BACHILLERATO HIPOTETICO

El Bachillerato que vamos a idealizar está inspirado en gran parte en las normas generales propuestas por la O.E.C.E. para un Bachillerato internacional. Claro es que estas normas,e incluso los programas redactados minuciosamente al efecto,tienen una antigüedad de cerca de veinte años,cuando estaba en su apogeo la corriente renovadora de la Matemática Moderna. Hoy día,y en este aspecto concreto,las tendencias son opuestas;el gran fracaso del empeño de algebrizar la Matemática desde la Escuela se ha hecho patente en todo el mundo y,más o menos explícitamente,lo reconocen los propios promotores de la reforma.

Este Bachillerato que tomaremos como directriz para el desarrollo de nuestras ideas didácticas,lo concebimos como un largo período de formación dividido en dos ciclos naturales. Esta división,creemos,viene impuesta por el tránsito y mutación de mentalidad que suele acontecer sobre los quince años,y que,en la enseñanza de la Matemática,se pone de manifiesto claramente con una mayor apetencia del rigor demostrativo por parte de los alumnos,lo que posibilita el iniciar una enseñanza en el sentido abstracto-formal que,hasta esa edad,resulta generalmente imposible de impartir.

El primer ciclo,con tres o cuatro cursos de duración,se alargaría, como hemos dicho,hasta los quince años. Se accedería a él mediante una prueba de ingreso que obviaría en gran medida el "fracaso escolar". Dicha prueba no sería un rechazo inicial,como dirían sin duda sus detractores,sino como una puesta a punto al principio,cuando las deficiencias educativas son fácilmente subsanables.

El segundo ciclo se iniciaría también,y por idénticas razomes,con una puesta a punto de los alumnos,insistiendo en recuperaciones previas que permitieran alcanzar,en lo posible,un cierto nivel de homogeneización de los alumnos sobre unos mínimos previstos.Este ciclo duraría tres cursos.

En ambos ciclos,la Matemática tendría que figurar en todos los cursos y con las horas precisas para el total desarrollo de los programas, sin que imposiciones externas limiten,recorten o imposibiliten el desenvolvimiento normal de su enseñanza.

Esta división en dos etapas no debe suponer la consideración de dos Bachilleratos distintos,uno elemental y genérico y otro de especialización hacia las Facultades o Escuelas Técnicas Superiores. El largo proceso de escolarización-de doce a dieciocho años- no puede tener solución de continuidad,sino un tránsito evolutivo en función de la madurez,cambios de desarrollo y mentalidad que suelen acusarse fuertemente alrededor de los quince años. Este cambio debe reflejarse en la forma y en los modos,así como en el grado de abstracción y rigor al enseñar las Matemáticas.

CONSIDERACIONES DIDACTICAS A UN PROGRAMA DE MATEMATICAS

Una de las finalidades que debe perseguirse al comienzo del primer ciclo es el dominio de automatismos y destrezas,tanto en el cálculo numérico como en el algebraico. Pero automatismos racionales,sin asomos de rutinas empíricas. Para ello es necesario que el profesor consiga interesar a sus alumnos por la esencia de las operaciones de cálculo,mediante situaciones que despierten las facultades de análisis,crítica e inventiva. No se trata de reiterar operaciones y cálculos laboriosos que fatigan al alumno sin lograr despertar su interés. Por el contrario, se debe provocar la curiosidad y el interés a través de situaciones motivadoras,que suelen surgir de forma imprevista en el transcurso de las clases y que el profesor,con habilidad,debe aprovechar hasta las últimas consecuencias. Por ejemplo,cuando un alumno comete el error,tan frecuente,de escribir

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b}{c}$$

debe aprovecharse para hacer ver a la clase que simplificando "del mismo modo" se llega a esto

$$\frac{2}{3} = \frac{2+0}{2+1} = \frac{0}{1} = 0$$

Una vez que los alumnos se han dado cuenta del disparate que esto encierra,infieren fácilmente que tal simplificación sólo es posible si el numerador y el denominador están multiplicados por el mismo factor. Diversos ejemplos aclaratorios servirán para fijar e interesar al alumno en esta incidencia y evitar que el error vuelva a cometerse.

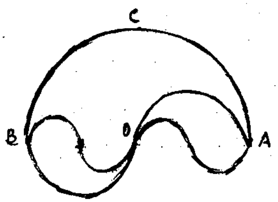
Pero no toda motivación didáctica se fundamenta en los errores del alumnado. Su motivación directa y creadora da lugar a infinidad de situaciones que,por generalización,permiten intuir hasta la axiomática de una estructura. Así,pongamos por caso,si el alumno,motivado por el profesor,observa que la suma de dos números naturales es un natural,que el resultado es independiente de los sumandos,que sumando un número con cero se obtiene el mismo número, etc. ,habrá establecido de un modo natural los axiomas de un semigrupo. El error didáctico estaría en pretender,sin motivación alguna,formalizar dicha estructura.

La introducción de la Teoría elemental de conjuntos en la Escuela ha sido,sin duda,uno de los aspectos más conocidos y populares de la reforma universal de la enseñanza de la Matemática. Ello ha llevado parejo,a nuestro juicio,el cometer dos graves errores. El primero,introducir una prematura formalización,todo lo intuitiva que se quiera,de unos conceptos que los alumnos,aun los más pequeños,conocen muy bien y que, bajo ese aspecto formal no van a utilizar,en el mejor de los casos,hasta mucho más tarde.¿Qué niño no conoce "*la invariabilidad del número cardinal de un conjunto discreto*"?;¿es necesario que se lo enseñemos en vuelto en pedantería y palabras extrañas a su mundo? Cualquier niño sabe que cada cromo de su colección tiene un lugar en el album,y que a cada lugar corresponde un cromo;pero nada le dice el que su maestro le hable de *"aplicación biyectiva"*. Todo esto debe dejarse para más tarde,para cuando el alumno conozca la Geometría elemental,que le proporcionará, con la intuición del continuo,situaciones mucho más ricas e interesantes. El otro error radica en que cuando se introdujo la reforma,antes de que los profesores de Básica tuvieran la formación matemática que hoy poseen,enseñaban-se veían obligados a enseñar-una "novedad" que se decía importante,sin estar en el meollo de sus secretos.

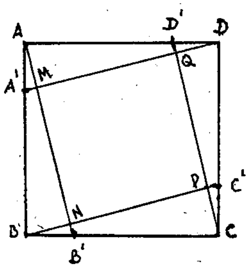
Después de las precisiones que hemos establecido sobre la importancia didáctica de la Geometría elemental,se comprenderá que seamos partidarios de fundamentar nuestra didáctica en este primer ciclo del Bachillerato,sobre los estudios de la vieja y fecunda Geometría. Esto no significa que pretendamos resucitar los viejos tratados de Geometría,sino que se debe estudiar esta rama basándose en la intuición que proporcionan las figuras o situaciones eurísticas que surjan con espontaneidad, y luego,al final del ciclo,realizar el estudio sintético de las transformaciones geométricas:giros,traslaciones,simetrías y homotecias,es decir,la Geometría del movimiento y de la semejanza. Este estudio se haría utilizando el concepto de vector libre,que se puede fácilmente introducir a partir de la noción de paralelismo,y cuya finalidad principal radica en la iniciación de un modelo de espacio vectorial,base del Algebra lineal,que se esbozaría en el segundo ciclo.

En este estudio de la Geometría,el profesor no debe perder el punto de vista fundamental que caracteriza las transformaciones geométricas,el concepto de grupo,siguiendo las orientaciones del "Programa de Erlangen".

Durante los primeros cursos de este ciclo inicial,debe provocarse la motivación geométrica mediante la observación de figuras. Este recurso didáctico reúne posibilidades extraordinarias de carácter formativo, donde la imaginación primero,y el raciocinio después,se complementan.Ve amos algunos ejemplos:



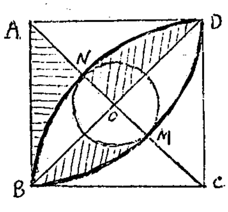
a) Dibujada la figura adjunta, se piden sugerencias sobre ella. En caso necesario, el profesor puede orientar con preguntas como estas :¿El camino ACB-para ir de A a B-tiene la misma longitud que el AOB? ¿Cuánto vale el área rayada? ¿Qué conclusiones podemos sacar si reiteramos la misma construcción con semicircunferencias de diámetros BO y OA? .....



b) Se dibuja el cuadrado ABCD, y, en el mismo sentido, se divide cada lado por los puntos A´, B´, C´, D´, de forma que los lados queden divididos en la misma razón. Se une A con B´, B con C´, C con D´ y D con A´, para formar el cuadrilátero MNPQ. Se piden sugerencias sobre esta construcción.

Los alumnos, bajo la dirección del profesor, pueden intuir y justificar después que:

. El cuadrilátero MNPQ es también un cuadrado.
. Que ambos cuadrados tienen el mismo centro.
. Encontrar la razón de los lados.
. Expresar el área del segundo en función de la del primero.
. Si el proceso se repitiese indefinidamente, calcular la suma de las áreas de todos los cuadrados que así se forman.



c) La figura adjunta presenta la posibilidad de que el alumno pueda determinar longitudes de segmentos y arcos, así como áreas de recintos diversos, sin otros conocimientos previos que la expresión de la diagonal del cuadrado en función del lado, la de la longitud de la circunferencia y la del área del círculo.

Como puede apreciarse,estos ejemplos presentan dificultades distintas. Así,el primero puede ser adecuado para alumnos de 11 ó 12 años;el segundo,para los de 14 años y,el último,tiene una dificultad media entre la de los otros.

Cuando se trate de calcular áreas y volúmenes,pueden presentarse ejercicios interesantes para los alumnos dando croquis y planos acotados al efecto. Las cotas deben ser las precisas,y de su elección depende el mayor o menor grado de dificultad e interés.

Estas presentaciones gráficas son siempre motivadoras y tienen un significado más real y,por tanto,mucho más interesante para los alumnos que los ejercicios que sobre áreas y volúmenes suelen aparecer en los textos. En este sentido,debemos tener en cuenta las ideas del Profesor Dienes,que insiste sobre la importancia de la motivación geométrica.

Posteriormente,la Geometría deberá ser objeto de una organización lógica,dentro de las posibilidades de comprensión de los alumnos y estimulándolos hacia este camino deductivo. A partir de una definición,objetivamente evidente para el alumnado,se debe organizar un pequeño proceso deductivo donde las figuras constituyan el carril por el cual se deslice el razonamiento.

El error de los reformistas,de funestas consecuencias para la enseñanza,consistió en desechar desde un principio todo lo que no fuese objeto de una exposición deductiva estricta y,en consecuencia,hacer desaparecer de los programas el mayor y más importante factor formativo de la Matemática : la Geometría en sentido inductivo.

No han faltado pedagogos matemáticos,sobre todo en Bélgica e Italia, que han querido convertir el estudio de la Geometría elemental en una simple observación intuitiva,a modo de ciencia experimental. Una interpretación así de la Geometría intuitiva,prescindiendo de las demostraciones lógicas-no en el sentido estricto-sería perjudicial para estudios posteriores,ya que el interés primordial de este primer ciclo que comentamos,radica en fomentar en el alumno,de forma gradual y continua,una cierta apetencia hacia la deducción lógica y el sentido del rigor,que caracteriza a la Matemática. Estamos,pues,dentro de una posición intermedia entre la intuición simple y el empirismo docente,y el purismo lógico-deductivo. Y,si en los primeros cursos del ciclo debemos acercarnos más a la primera posición,cuando el alumno llega a los 14 ó 15 años es conveniente aproximarse,con toda la cautela posible,a la segunda.

En el segundo ciclo-alumnos de 15 años-se puede abordar el estudio de las estructuras algebraicas fundamentales(semigrupo,grupo,anillo y cuerpo);en el segundo curso,la del espacio vectorial. Pero el alumno debe conocer previamente con cierta profundidad diversas situaciones,aparentemente sin conexión entre si por tratarse de conjuntos de naturaleza diferente y provistos de operaciones distintas. De estas "situaciones" el alumno podrá extraer,bajo el estímulo y orientación del profesor,las propiedades subyacentes en una estructura. Consideramos imprescindible despertar en el alumno una verdadera motivación a través de los más diversos campos conocidos y observables para él,y así podrá el profesor, de un modo natural y sin dogmatismos,abordar la formalización y estudio de las estructuras desde un punto de vista general y abstracto. Hacerlo de otro modo,prescindiendo de esta base orientadora y diversa,conduce al desinterés y al rechazo escolar hacia la Matemática,por muchos que sean los ejemplos aclaratorios dados "a posteriori".

En el segundo curso de este segundo ciclo,y por lo que al Algebra se refiere,trataríamos los conceptos de homomorfismo e isomorfismo de grupo,sirviendo de motivación al respecto la teoría de logaritmos ya conocida por el alumnado. Podría completarse este curso con el estudio de los espacios vectoriales,como base para el posterior tratamiento de la Geometría Analítica y el Algebra Lineal.

La enseñanza del Análisis puede iniciarse tempranamente,y siempre de forma intuitiva,desde el primer ciclo. El niño tiene el concepto de variable dependiente de otra ya que,por ejemplo,entiende claramente que el gasto de gasolina depende de los kilómetros recorridos. Se puede,entonces,aprovechar estas intuiciones para llegar de forma natural al concepto de función,basándose en ejemplos que pertenecen a su dominio de interés. Como complemento deben realizarse representaciones cartesianas por puntos.

Estas primeras ideas sobre el concepto de función aparecen con independencia del problema de la continuidad. Y,sin embargo,a partir de esos mismos ejemplos,el alumno intuye la continuidad de la variación de la dependencia funcional. La representación gráfica cartesiana,el trazo continuo del dibujo,le permite completar esa intuición. No obstante,la continuidad en un punto carece de sentido para él.

El problema didáctico surge cuando,prematuramente,se intenta introducir la formalización de la continuidad. Entonces comienzan las incomprensiones y,lo que es peor,el alumno pierde la seguridad en la idea intuitiva.

No resulta tan natural la introducción del concepto de derivada con alumnos de 15 años. Tradicionalmente,la interpretación gráfica y algunas interpretaciones físicas-la de velocidad instántanea,por ejemplo-constituyen la vía más utilizada. Estas u otras motivaciones análogas deben preceder a la formalización del concepto,siendo necesario insistir en la diferencia entre derivada de una función en un punto y función derivada de otra. Las funciones polinómicas pueden constituir ejemplos fáciles para la iniciación en el primer ciclo.

Desde un punto de vista pedagógico,el verdadero valor didáctico de estas nociones de cálculo diferencial e integral radica en la sorprendente apertura de posibilidades técnicas y de aplicación que se presenta : crecimiento,máximos y mínimos,inflexiones de funciones continuas, cálculo de áreas y volúmenes,rectificación de curvas,determinación de centros de gravedad,momentos de inercia,centros de presión,etc. El profesor debe explotar al máximo tales posibilidades.

Al considerar el estudio de la Geometría en un segundo ciclo-con alumnos entre los 15 y los 18 años-,tenemos presente que las más importantes propiedades de la Geometría clásica elemental han sido ya [illegible] diadas y lo han sido en la forma antedicha. Por tanto, se parte no sólo del conocimiento de estas propiedades, sino del hábito adquirido al razonar con sentido lógico y de rigor matemático sobre la inmediata intuición de las figuras. Desde ahora, y en este segundo ciclo, sería conveniente presentar la Geometría bajo la sistematización que le proporciona el grupo de transformaciones correspondientes: grupo de las isomerías, grupo afín, grupo proyectivo y variedades lineales y cónicas. En el último año del ciclo, y tal vez limitándonos a los mejores alumnos, se puede realizar el estudio formal desde el punto de vista axiomático de la Geometría afín e, incluso, de la proyectiva, ya que sus axiomáticas resultan más sencillas.

Sería deseable, como culminación, introducir el concepto de elementos impropios y, utilizando coordenadas homogéneas, estudiar, con los recursos del Algebra Lineal, el grupo proyectivo homográfico, y ver como, al imponer como invariante los lugares geométricos de elementos impropios, se tiene el grupo afín. Y si, desde el punto de vista proyectivo, todas las cónicas son equivalentes, deducibles unas de otras mediante transformaciones del grupo, al permanecer invariante el lugar geométrico de los elementos impropios, surge la clasificación en los tres géneros como propia de la Geometría afín.

Resulta evidente que en un programa de Matemáticas no pueden omitirse hoy unas nociones de Estadística.

El Cálculo de probabilidades y la Estadística, por su íntima relación, deben desarrollarse conjuntamente.

En la Estadística tendremos que distinguir tres partes : en la primera, trataremos de la recogida de datos, muestreos, etc.; en la segunda, de la clasificación, depuración y representación de estos datos; en la tercera, a través del Análisis, podremos estimar deducciones.

En el ciclo elemental-últimos cursos-solamente debemos proponernos dar una versión intuitiva del Cálculo de probabilidades, estudiando experiencias aleatorias y frecuencias y considerando los métodos numéricos y gráficos usados en la Estadística descriptiva: ley de estabilidad de frecuencias,medidas centrales,intervalos de frecuencias,diagramas de barras,histogramas y polígonos acumulativos de frecuencias. Se puede llegar también a mencionar los diagramas de dispersión.

En el segundo curso del ciclo superior se podría establecer con mayor rigor la Teoría de probabilidad. Su fundamentación axiomática se dejaría para el último curso,y ello,sólo para los alumnos más aventajados. Se estudiaría la teoría de la probabilidad condicionada,sucesos independientes e,incluso,la distribución de Poisson.

A MODO DE RESUMEN Y POSIBLES CONCLUSIONES

Hemos procedido en este trabajo a realizar una análisis crítico de la amplia,y hasta polémica,perspectiva que presenta la enseñanza actual de la Matemática. Deliberadamente,nos hemos detenido en lo concerniente al Bachillerato,por ser éste la verdadera espina dorsal de los procesos educativos de cualquier país,y donde,consecuentemente,inciden las mayores dificultades.

De tal análisis podemos deducir que la Matemática estudiada por todos los alumnos de Bachillerato,cualquiera que sea el destino de sus futuros,debe tener un carácter eminentemente formativo,aunque sin desdeñar las técnicas de cálculo y,en general,de índole matemático,que se adquieren como base precisa para lograr tal formación.

Por otra parte,es observable que,por parte de los escolares existe un grave problema de rechazo hacia la Matemática,que se acentúa de forma acusada en estos últimos tiempos al haberse introducido en todos los niveles la llamada Matemática Moderna. Este es un grave problema,basado en la falta de motivación de los procesos formalizados,que es preciso abordar con decisión.

Hemos analizado el desenfoque del problema docente que,a nuestro juicio,pesa considerablemente en ese rechazo escolar : los planificadores de la Matemática en niveles inferiores a los universitarios han confundido la Matemática actual,ciencia lógico-deductiva basada en una axio mática de absoluta abstracción,con los procesos didácticos propios de una docencia de grado medio,donde la motivación intuitiva juega un señalado papel. Una cosa es la"ciencia acabada" y otra las intuiciones y caminos para llegar a ella o,al menos,motivar hacia sus métodos,en función formativa.

A partir de este enfoque se ha llegado a producir en los estusdios medios,y con mayor razón en los universitarios,la marginación de la rama más rica,interesante y fecunda en el proceso histórico de la Matemática : la Geometría. Nos referimos,claro está,a la Geometría en el sentido euclidiano. Con esta supresión se desmorona el proceso didáctico natural para acceder a la Matemática,que consistía fundamentalmente en la iniciación a los métodos demostrativos y al rigor mediante una guía intuitiva para el razonamiento geométrico : la figura,esquema gráfico de relaciones abstractas. Debemos señalar que en tales intuiciones se encuentra el germen vocacional de la Matemática,que la formalización imperante condena a muerte por falta de motivación. Por otro lado,y por añadidura,al desaparecer el enfoque geométrico en la enseñanaza de la Matemática,se ha perdido una fuente de abundantes recursos didácticos y de motivación : los problemas gráficos,tan llenos de sugerencias para los alumnos y muchas veces apasionantes por su interés.

Con independencia de estas cuestiones,exclusivamente relacionadas con la didáctica de la Matemática,hemos creído necesario referirnos a una serie de factores extraños a la propia Matemática,a su docencia,y que están por encima de las posibilidades del profesor. Son factores impuestos por unas estructuras docentes derivadas de condicionantes más o menos ajenos a la enseñanza,que hemos reseñado cumplidamente. Modificar tales condicionanantes corresponde a los legisladores e,incluso,a las comisiones encargadas de estructurar planes de estudio,que siempre han volado en espacios teóricos,muy por encima de las posibilidades reales de nuestra enseñanza media,reducida hoy a su "forma canónica". Al ser así,el profesor,pese a la amplia visión que posea de la Matemática, su vocación y sus habilidades y destrezas didácticas,muy poco puede hacer,dentro del encasillado legal,para mejorar el rendimiento de los alumnos.

A partir de tales consideraciones,hemos procedido en un plano un tanto idealista,dentro del marco en que se desenvuelve la enseñanza a nivel europeo,remarcando ciertas consideraciones expresivas del valor formativo que queremos ver en la enseñanza de nuestra ciencia,siguiendo una directriz inspirada en la posibilidad de que,algún día,en España se pueda contar con un Bachillerato completo,dentro de las normativas aconsejadas hace más de tres lustros por la O.E.C.E.

Unas consideraciones didácticas concretas sobre la motivación escolar,que a nuestro parecer debe ser geométrica,junto con algunas precisiones de carácter eurístico,responden a las orientaciones didácticas de tal Bachillerato,que tendría en su primer ciclo el centro de gravedad de la motivación,para lograr el tránsito de lo inductivo al razonamiento abstracto. El segundo ciclo tiene desde un punto de vista didáctico una menor incidencia,y la formalización puede ser tomada en cuenta si los alumnos,como sería de esperar,hubiesen alcanzado el tono de madurez y formación objetivo del primer ciclo.

Nota.-Lo extenso de este trabajo nos ha obligado a resumirlo. Esperamos haberlo hecho sin menoscabo de su contenido y claridad expositiva.

BIBLIOGRAFIA

Berman et Bazard.-Mathématiques pour maman

Bernard et Bazard.- Mathématiques pour papa

Bourbaki,N.-Elements de Mathématique- Herman Editeur,París

Choquet,G.- L'enseignement de la Geométrie-Herman Ed.,Paris,1967

Choquet,G.- Sobre la enseñanza de la Geometría elemental- Ed. Aguilar Madrid,artículo 1965.

Choquet,G.- Quelques mots sur une question importante- Artículo en L´Ecole Liberatrice,1973

Dieudonné.- La abstracción en Matemáticas y las estructuras operatorias- Ed. Aguilar,Madrid,artículo 1965

Dupont,E.- Apprentissage mathématique,vols. I,II y III - Sudel Ed.

Inspección de Bachillerato.- Proyecto de evaluación de programas- 1979-1980

Klein,F.- La Matemática elemental desde un punto de vista superior

Klein,F.- Programa de Erlangen 1877-Mathematische Annalen 1893,vol.43

Kline,M.- Why Johnny can´t add : The failure of the new Math- St. Martin´s Press, Nueva York,1973

Lehmann,M.- Notre point de vue- Artículo publicado en L´Ecole Liberatrice en 1973

Lelong-Ferrand,J.- Mathématiques "modernes" ; un remede pire que le mal - L´Ecole Liberatrice,1973

Leray,J.- La modernisation de l´enseignement mathématique á l´ecole- L´Ecole Liberatrice,1973

Lorenzo,Javier.- Introducción al estilo matemático - Ed.Tecnos,1971

Lichnerowicz,A.- Introducción al espíritu del Algebra Moderna en el Algebra y la Geometría - Ed. Aguilar,1965

Lichnerowicz,A.- Mathématiques et enseignement - L´Ecole Liberatrice 1973

O.E.C.E. Bureau du personnel scientifique et technique.- Un programme moderne de Mathématiques pour l´enseignement secondaire,1961

Papy,G.- Matemática moderna,vols.I,II,III y IV - Ed. Eudeba,Bs.Aires

Puig Adam,P.- La matemática y su enseñanza actual - Ed. Revista de Enseñanza Media,madrid,1959

Piaget,J.- Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia- Ed. Aguilar,1965

Revuz,A.- Le cours de l´A.P.M.I. -vols. I y II,1962.