Rev. Acad. Canar. Cienc., XVII (Núms. 1-2), 143-185 (2005) (publicado en agosto de 2006)

CAOS Y COHERENCIA: UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LAS CATÁSTROFES DE RENÉ THOM

Nácere Hayek
Universidad de La Laguna (Spain). (email: nhayek@ull.es)

Abstract
This paper explains in a nontechnical way, accesible to a general scientific community, an introduction of the catastrophe theory by René Thom, a pioneer mathematical tool qualified to put certain order in the chaos. The structural stability and other basic concepts and fundamental properties of this theory, as well as some commentaries and references are also exposed. An overview on the origins of chaos is firstly presented.

Resumen
Este artículo presenta, evitando detalles técnicos, una introducción a la teoría de las catástrofes de René Thom, una obra pionera de la nueva matemática que originó la ciencia del caos. Se tratan la estabilidad estructural y otras nociones fundamentales, incluyéndose algunos comentarios, observaciones y referencias. Una visión global sobre los orígenes del caos precede al artículo.

1. Una panorámica sobre los orígenes del caos

En la Biblia se describe el desorden original al que Dios impuso un orden por el acto de la creación. Los filósofos de la Grecia clásica en los años posteriores al 600 a.C., se afanaron obstinadamente en la comprensión del misterio y fenómenos del cosmos, consiguiendo establecer tipos coherentes de elucubraciones del mundo. Sumamente intrigados por las respuestas que generalmente les habían sido transmitidas por dirigentes religiosos, los griegos se interesaron por las concepciones de carácter geométrico, propulsando el invento más grande de la historia – la fuerza de la razón - , que la aplicaron para indagar si el universo obedecía a leyes matemáticas. Rechazaron el misticismo y contemplaron el caos aparente de los acontecimientos naturales, con una actitud racional, crítica y laica, para mostrar un modelo comprensible derivado de la aplicación de las matemáticas. Ciertamente fueron los pioneros en concebir una ley y un orden en el caos de los fenómenos. Hasta muchos siglos después, en el XV de nuestra era, no volvería a renovarse notablemente el interés hacia la astronomía. Fue en ese siglo en el que la obra *Summa* del matemático Luca Paccioli, así como las de Nicolás de Cusa y del ingeniero Leonardo da Vinci entre otros, produjeron las raíces del saber matemático del siglo siguiente (XVI), en el cual se llevaría a cabo el descubrimiento de la teoría heliocéntrica de Copérnico (1473-1543). Ello significó, en unión de Galileo (1564-1642) [1]que idealizó su mecánica, una estructura conceptual que daba coherencia a sus hallazgos. La ciencia antigua aportó indiscutiblemente las bases que los modernos utilizaron como punto de partida (Diofanto, siglo III a.C.; Arquímedes, 287-212 a.C.; además de Euclides que citamos a continuación). El Renacimiento no fue capaz de crear un orden nuevo, porque la actividad matemática en esa época no había experimentado progresos geométricos notables. Sin embargo, a comienzos del siglo XVII, el uso de las secciones cónicas por Kepler en 1609 para su sistema planetario originó un análisis nuevo del magistral tratado (sobre aquellas) de Apolonio (262-190 a.C., conocido como "el gran geómetra"). Las matemáticas consiguieron así sustituir el antiguo pensamiento aristotélico por una nueva racionalidad en la ciencia que nace con la geometría del libro *Elementos* de Euclides [2], al representar la primera ciencia axiomática con un método deductivo (una perfecta creación del genio griego y libro modélico de matemática pura como ciencia teórica independiente). Con la creación de un cálculo infinitesimal que podía tratar cualquier cantidad que varía de modo continuo, Isaac Newton (1642-1727) en el siglo XVII pudo describir el universo como un mundo tradicionalmente euclidiano, semejante a un mecanismo de relojería de fiel y absoluta precisión. Las leyes de gravitación de Newton representaron el fundamento de una mecánica celeste y ratificaron las conocidas tres leyes de Kepler (1571-1630)[3], a cuya mecánica (denominada hoy <u>mecánica clásica</u>) se asoció el término **determinista**. Y una vez que P. de S. Laplace (1749-1827) afirmara que el universo "está hecho de forma que su estado presente es efecto del estado anterior y causa del que le va a seguir", para la ciencia un fenómeno se consideró ordenado, si sus movimientos se podían explicar mediante un esquema de causa y

---

1 Galileo dio un sentido nuevo al viejo mensaje de la filosofía pitagórica, "la naturaleza está escrita en lenguaje matemático", que ha subsistido con solidez hasta nuestros días.

2 Euclides, *The Thirteen Books of the Elements* (trans. by T.L. Heath, 3 vols., Cambridge, 1908; reimp. Dover, 1958). Estos *Elementos* fueron editados por primera vez en 1482. Todos los matemáticos que vivieron durante los dos mil años siguientes, consideraron los Elementos como el límite práctico del rigor lógico.

3 Más que una curiosidad astronómica, esas tres leyes con la imagen de que los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol han sido, junto a los descubrimientos de Newton, el prototipo y referencia constante hasta el presente, de todo conocimiento científico (I. Ekeland).

efecto representado por una ecuación diferencial. De esa manera, no sólo las ecuaciones (y teorías) que describen el movimiento de los planetas, sino también la trayectoria de una pelota, la elevación del agua en un tubo, las del crecimiento de una planta o las de la combustión del carbón, pongamos por caso, contienen una regularidad y un orden, y tal certidumbre mecánica, que hemos terminado por asociar a las leyes que atribuimos a la naturaleza. Esa clase de ecuaciones dio origen en física a la teoría de **sistemas dinámicos**, que lograría identificarse con la mecánica clásica para representar luego el símbolo del determinismo.

Si bien los principios newtonianos se pudieron imponer como descripción suprema y definitiva de la naturaleza, en los dos siglos que siguieron aparecieron serias dudas y discrepancias, al contrastarse la naturaleza concebida por Newton y lo que realmente ocurría con muchas acciones inexplicables en la propia naturaleza, debido a que en la práctica la primera de las teorías sólo era aplicable a problemas simples y bien estructurados. Además de Laplace (quien consagrara una gran parte de su vida a la astronomía), hombres excepcionales del siglo XVIII, entre ellos Leonhard Euler (1707-1783), y los Bernoulli - Johann (1667-1748) y Daniel (1700-1782) - continuaron ampliando la investigación matemática de nuestro mundo, con una penetración más profunda en su diseño. En ese siglo XVIII, la ciencia obtuvo tal éxito en cuanto al descubrimiento de las leyes de la naturaleza, que muchos pensaron que quedaba poco por desvelar. Sin embargo, de los estudios iniciados a finales del siglo XIX por el matemático, físico y filósofo Henri Poincaré (1854-1912) sobre la estabilidad del sistema solar [4], surgió un acontecimiento que haría tambalear en la segunda mitad del siglo XX la belleza y simplicidad del dogmatismo newtoniano [5], y que propulsó un inusitado interés por los sistemas dinámicos. Hasta tal punto, que ese último campo experimentaría más adelante un gran desarrollo durante las décadas de los sesenta y setenta del último siglo, gracias a los ordenadores de alta velocidad y a los trabajos de numerosos matemáticos y físicos teóricos de todo el mundo, entre los que

[4] *Les Nouvelles Méthodes de la Mécanique Céleste*, Gauthier-Villards, París, 1892.

[5] La gran contribución de Poincaré consistió en propugnar la desviación del pensamiento analítico al geométrico, lo que hizo factible posteriormente la teoría de la relatividad. Fue padre de la topología (*análisis situs)*, un campo matemático básico que enseña a mostrar que ni las matemáticas son exactas ni la realidad es absoluta, sino que todo depende del punto de vista del observador (topológico). La topología permite conocer las propiedades cualitativas de las figuras geométricas, no sólo en el espacio ordinario sino en los espacios de más de tres dimensiones.

destacan especialmente, A.N. Kolmogorov (1903-1987)[6] y V.I. Arnold (1937-) en la Unión Soviética [7], S. Smale[8] en Estados Unidos, René Thom (1923-2002) y David Ruelle [9] en Francia, e Ilya Prigogine (ruso nacido en Moscú en 1917 y Premio Nobel de Química en 1977) en Bélgica. Todo esto configuró aquel acontecimiento en una especie de revolución que hoy se conoce como **la teoría del caos** [10]. La nueva área de los sistemas dinámicos puso de manifiesto que caos y sistemas caóticos no implicaban necesariamente desorden, sino que de la multitud de sistemas que aparecían en diversas situaciones en la vida y la naturaleza como irregulares e impredecibles, no se podía decir que tuviesen comportamientos sin ley, ya que existían leyes que determinaban su comportamiento. Ya se sabía que en la realidad existían desórdenes e inestabilidades momentáneas, que luego retornaban a su cauce determinista: sistemas predecibles que, repentinamente y sin saber la causa, comenzaban a desordenarse y que podían luego regresar a una nueva estabilidad. En consecuencia, se impuso un mayor énfasis en investigar con mucha más cautela la razón oculta de esas inestabilidades, el "porqué el orden puede llevar al caos y el caos al orden" y si, eventualmente, se podrían crear modelos para determinar, tal vez acaso paradójicamente, "si dentro del mismo caos había también un orden".

---

[6] Los siguientes de sus muchos importantes artículos son considerados como el origen de la teoría moderna de la turbulencia (movimientos turbulentos de los fluidos): *The local structure of turbulence in incomprensible viscous fluids*, Dokl. Akad. Nauk **30**, 299-303 (1941) y *Dissipation of energy in isotropic turbulence*, Dokl. Akad. Nauk. **32**, 19-21 (1941). Kolmogorov sentó, sin duda alguna, las bases axiomáticas del cálculo de probabilidades y la teoría de los procesos estocásticos.

[7] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New-York,1978. Uno de sus importantes resultados, fue el teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser para sistemas hamiltonianos.

[8] S. Smale (Medalla Fields, 1966), introdujo un modelo matemático simple e intuitivo que se llamaría *herradura de Smale*, que mostraba la dependencia sensible de las condiciones iniciales, junto con la existencia de una infinidad de órbitas periódicas tipo silla, lo que constataba la existencia de movimiento caótico: *Diffeomorphisms with many periodic points*, Diferential &Combin. Topolog, Princeton Press,63-80(1965). Véase también, *Differ. Dynam. Syst.* (Bull. Am. Math. Soc.,**73**, 747-817 (1976).

[9] Gracias a Ruelle, alrededor de 1975 se consigue reconocer el significado del **caos** con una aceptación generalizada entre la comunidad de científicos y teóricos.

[10] La teoría multidisciplinar que se había denominado *sistemas dinámicos* por los matemáticos, se llamaría *dinámica no lineal* por los físicos y *ciencia no lineal* en general por el resto de disciplinas donde aparecen fenómenos de tipo caótico. La expresión "sistema dinámico" designa todo proceso de evolución temporal en el cual el futuro dependa de un modo determinista del pasado.

En realidad, se produjo un verdadero desconcierto en el mundo científico. El orden dejó de ser sinónimo de ley y el desorden de fuera de la ley. Ambos parecían regirse por leyes, pero con unas directrices o códigos distintos de comportamiento. Una ley para lo ordenado, otra para lo desordenado. Dos teorías, dos formas de concebir el mundo; más estrictamente, dos ideologías diferentes, cada una aplicable únicamente en su propio ámbito de influencia. Y lo curioso fue que en su seno pudo mantenerse inmerso, el inexplicable fenómeno del caos, un término que llegaría a ser tan difícil de definir que decididamente tuvo que tratarse en un Congreso Internacional celebrado en la Real Sociedad Científica de Londres en 1986 [11].

En el Congreso se acordó proponer la siguiente definición técnica de la palabra **caos:** Caos es el comportamiento estocástico que ocurre en un sistema determinista.

La aparición simultánea de las palabras estocástico y determinista, dio lugar a la expresión paradójica de *caos determinista* que, en opinión de René Thom, constituye un atentado a la teoría del conocimiento, al interpretar del siguiente modo la anterior definición: "El comportamiento determinista está gobernado por leyes exactas e inmutables. El comportamiento estocástico es el opuesto: sin ley e irregular. Así, el caos es el comportamiento sin ley gobernado completamente por la ley". [12]

Es necesario agregar aquí que la ya reconocida (y fortalecida) creencia de que sistemas simples (modelizables mediante ecuaciones diferenciales) se comportan de forma simple, y de que sistemas complejos con un comportamiento más complicado, requieren hacer uso de otro tipo de análisis, hizo ilusorio plantearse la posibilidad de que un sistema simple pudiera tener un comportamiento errático o aleatorio. Aún más: ese otro análisis estaba expresamente dirigido al estudio de situaciones sin orden aparente o claramente desordenadas, un análisis estadístico aplicable a fenómenos en los que intervenía un gran número de entidades, cada una con un comportamiento mal conocido, si bien similar al de los demás. Dos paradigmas muy diferentes se impusieron entonces en las postrimerías del siglo XIX para los modelos matemáticos: El primero era aquel análisis de

[11] Debemos precisar que, a diferencia de lo que ocurre en el lenguaje popular, en que el término caos es sinónimo de desorden, *cuando en la ciencia se habla de caos, se refiere a caos determinista.*

[12] El descubrimiento del *caos determinista* ha constituido una verdadera revolución conceptual. La interpretación de Thom dio lugar a ulteriores debates. La revolución fue presentida por Hadamard, Maxwell, pero sobretodo por Poincaré, amén de algunos matemáticos soviéticos que establecieron algunos resultados de alcance general en la década de 1940.

precisión que permitía modelizar sistemas simples con pocos grados de libertad [13], y el segundo, un análisis estadístico destinado a la modelización de sistemas complejos con un gran número de aquellos. La metodología estadística acuñaba sobretodo una palabra nueva para reflejar que incluso el azar tenía sus propias leyes: el término **estocástico.** Y como sus métodos podían definir comportamientos medios aplicables en mecánica estadística (donde se utilizan las probabilidades y las estadísticas de la teoría matemática), pareció revelarse en las leyes físicas esencialmente aleatorias [14], que el aspecto estadístico habría de comparecer como compañero inseparable del desorden. De ese modo, la matemática de los procesos estocásticos (sobreentiéndase, los conjuntos de sucesos marcados por el azar) se fue desarrollando junto a la matemática de los procesos deterministas.

Ahora bien, fue sólo con la llegada de los modernos ordenadores, que se ocasionara un insólito descubrimiento (en 1963) por Edward Lorentz [15], meteorólogo del Massachussets Institute of Technology, quien al tratar de comprender las razones de la imprevisibilidad del comportamiento meteorológico y de todo el desarrollo posterior, daría lugar al nacimiento de aquella nueva convulsión científica, confirmando la *sensibilidad* de ciertos sistemas extremadamente simples a las condiciones externas (conocida hoy como efecto mariposa) [16]. Esto demostraba que habían sistemas reales con

[13] "Variables de estado", que describen esos sistemas.

[14] Para contestar de donde provenía la aleatoriedad, la mayoría de los científicos en la década de los 1970 hubiera dicho categóricamente que era la complejidad (ciencia unificada de los sistemas complejos), atributo que sintetizaba los cambios súbitos en la naturaleza, en el mundo y en la sociedad. Se trata de un tipo nuevo de racionalidad (en contraste con la ciencia tradicional) para una mejor comprensión de las complicadas dinámicas en el mundo actual.

[15] *Deterministic Nonperiodic flor*, J. Atmos. Sci. **20,** 130-141 (véase también 448-642), 1963.

[16] *La sensibilidad respecto de las condiciones iniciales* significa que en el estado del sistema en el instante cero, un pequeño cambio en la posición y velocidad iniciales, produce un cambio posterior que crece "exponencialmente" con el tiempo. Se conoce también la existencia de una configuración estable que se llama "atractor" hacia la que el sistema tiende en su movimiento. Ahora bien, aquella "sensibilidad" ofreció en el caso de un sistema de ecuaciones matemáticas sencillas con pocos grados de libertad tratado por Lorentz, un modelo de sistemas de comportamiento tan violento como una cascada, muy diferente a lo que venía ocurriendo con otros tipos conocidos de atractores clásicos (puntos fijos, ciclos límites, superficies toroidales), dando lugar a una *órbita* asintótica denominada "atractor extraño". Los experimentos numéricos realizados con el sistema revelaron la existencia de un conjunto de atracción de dimensión algo mayor que dos, que tenía una rara estructura topológica, atractor caótico que hoy recibe el nombre de mariposa de Lorentz. Lo

un número pequeño de variables independientes que podían comportarse de forma impredecible y aleatoria. El trabajo de Lorentz fue el pionero en estimular las investigaciones que originaron el campo matemático que se conocería como *teoría del caos* [17]. Con otro enfoque, de modo más abstracto y matemático, D. Ruelle y F. Takens [18] ratificaron más tarde, que sistemas muy simples podían engendrar comportamientos caóticos [19]. Ello significó un golpe de gracia para el *ultra*determinismo. Algunos llegaron a decir que *la ciencia clásica acaba donde el caos empieza* [20]. Durante las últimas décadas se ha revelado como una extraordinaria área multidisciplinar, pero el esfuerzo para desentrañar la misteriosa relación entre el orden y el caos sumió a los científicos en una perspectiva más aproximada de la realidad. Esto hizo que en diversas disciplinas científicas, muchos de sus colaboradores acabaran explorando de forma exhaustiva las posibilidades del desorden [21].

Estas investigaciones comenzaron en la década de los 1970, cada vez con mayor intensidad. El foco de las que se hacían en física se polarizó hacia la dinámica no lineal, la mecánica de los fluidos y la electrodinámica cuántica; en matemáticas, irrumpieron en escena novedades como la geometría fractal

---

que se designa hoy como *efecto mariposa* quiere enfatizar, por ejemplo, que el *aleteo de una mariposa en Brasil puede desencadenar un tornado en Texas.*

[17] Luego se consideraría la teoría del caos, como otra gran revolución del siglo XX, al igual que lo fueron la relatividad y la mecánica cuántica.

[18] *On the nature of turbulence*, Communications in Mathematical Physics **20**, 167 (1971). Siguiendo el trabajo de S. Smale abordaron la naturaleza profunda de la "turbulencia" y se demostró la presencia de ciertos atractores "extraños" en diversos sistemas dinámicos asociados a comportamientos caóticos.

[19] Se llamaron *caóticos* para identificar su origen determinista, reservando el adjetivo aleatorio para los demás comportamientos erráticos (Véase M. Dubois, *El orden caótico,* Mundo Científico, **68**, p. 430.

[20] Véase J. Gleick, *Caos. La creación de una ciencia*, Edit. Seix-Barral, Barcelona, 1988.

[21] En física, p.ej., el desorden ha sido objeto de intensas investigaciones con dos vertientes básicas: la primera es el estudio de la materia desordenada, y la segunda un análisis más exhaustivo de los sistemas dinámicos, en especial en los casos en que el caos emerge de ecuaciones totalmente deterministas. En el campo de la dinámica de fluidos (caso de la turbulencia), además del precedente de Ruelle-Takens, otro escenario atribuido al físico M. Feigenbaum (Universidad de Rockefeller) ha llegado a ser básico para la comprensión de los fenómenos no lineales. Ese escenario corresponde a la aplicación $x \to x^2 + C$ que tiene lugar sobre el eje real, produciendo una "cascada de duplicaciones" (del período) que se hace tan rápida que la aplicación se vuelve caótica. El desarrollo del proceso conduce a la ya famosa constante universal δ=4,669..., denominada *constante de Feigenbaum* (Véase N. Hayek, Rev. Acad. Can. Cienc. XII, Núm.1-2 , 199-209 (2000), para detalles).

(Benoit Mandelbrot,1924-...) [22] para buscar orden en el caos; en termodinámica, se llevaron a cabo importantes investigaciones de sistemas irreversibles fuera de equilibrio (Ilya Prigogine); en química, se esforzaron en indagar la razón de las inesperadas fluctuaciones en las reacciones; en fisiología, para saber porqué en el ritmo normal del corazón se filtraba el caos ocasionando un repentino paro cardíaco y en biología, la teoría de seres vivos suscitó la idea de que el desorden en un nivel de comunicación dentro de un organismo, podía convertirse en orden en otro; en campos tradicionalmente estáticos, como la meteorología ya mencionada y la epidemiología, brotaron nuevas ideas que revelaron profundas estructuras de orden dentro de un aparente desorden, así como también los economistas intentaron detectar algún tipo de orden en las variaciones imprevistas de los precios. En general, una nueva pléyade cruzó las fronteras de todas las disciplinas científicas ocasionando que, por ejemplo, los físicos se interesaran muy de cerca en problemas de neurofisiología, que una buena parte de matemáticos analizaran con esmero los sistemas biológicos, o que los neurólogos se pusieran al día en matemáticas, dándose lugar a equipos conjuntos de investigación. Herramienta común: el ordenador. Gracias al desarrollo de la computación sucedió un hecho apasionante, y a la par, desconcertante, para las ciencias sociales y humanas: las contribuciones muy significativas procedentes de las ciencias exactas, físicas y naturales con novedosos métodos y procesos computacionales en las aplicaciones, así como la expansión de analogías a partir de los sistemas biológicos y otros. Como ejemplos más sobresalientes se encuentran la teoría y ciencia del caos, y la teoría de las catástrofes (que trataremos a continuación) y más propiamente, las ciencias de la complejidad (o de los sistemas complejos no lineales), mostrando un lenguaje diferente al de las ciencias heredadas del siglo XVIII. Se estaba forjando un nuevo mundo en la ciencia, y en particular un nuevo tipo de matemática, dotándola de un contexto

---

[22] B. Mandelbrot, *Les objets fractals: forme, hasard et dimensión,* Flammarion, París, 1975. Mandelbrot desarrolló la "geometría fractal" de los contornos irregulares y aparentemente caóticos del mundo que nos rodea. Su teoría permite estudiar la configuración de árboles y nubes, costas y cordilleras, células y órganos, compuestos químicos y galaxias. En lo que antes se percibía complejidad y desorden, se puede observar ahora determinadas reglas de construcción. Los patrones tienen un carácter "fractal": los conjuntos "fractales" tienen la propiedad de ser autosemejantes (o sea, invariancia de escala), en la que sus partes son réplicas del todo, pero a una escala menor. El más fascinante de estos conjuntos es el famoso conjunto de Mandelbrot. Para un resumen divulgativo, véase N. Hayek, *El conjunto de Mandelbrot*, Rev.Acad.Canar.Cienc., Vol. XV, núm. 1-2, 169-204 (2002).

fundamental e idóneo para una mejor comprensión de las irregularidades de la naturaleza.

En resumen, el siglo XX ha sido testigo de dos modelos teóricos del universo: uno, el del bloque determinista por un lado, y el del bloque del caos por el otro. Ese siglo XX nos enseñó que en el universo, ni la inestabilidad del átomo ni la velocidad de la luz, encajaban en el esquema clásico de la física de Newton. Al plasmarse un patente divorcio entre lo que los científicos estaban observando y lo que podían realmente explicar, se puso claramente en evidencia que las leyes del movimiento de Newton (y las matemáticas que habían introducido él y su contemporáneo W.G. Leibniz, (1646-1716)), sólo sirvieron para establecer una pauta de dos siglos de descubrimientos. La física clásica y sus matemáticas requirieron ser enmendadas, no solamente para dar origen a sus grandes revoluciones, la mecánica cuántica y la relatividad, sino para que la ciencia abriera otras perspectivas en las últimas décadas de ese siglo, de modo que nos condujera a una nueva concepción de regularidad – a través de la matemática del **caos** – que diera un mejor sentido a la complejidad del mundo real, la de la actual revolución que ha alcanzado y traspasado las fronteras del siglo XXI.

2. René Thom, matemático y filósofo. La teoría de catástrofes.

Desde un punto de vista filosófico, René Thom, reconocido como uno de los más grandes matemáticos del siglo XX, ha sido sin duda de los principales fundadores de una rama entera de esas nuevas matemáticas que ha originado la teoría del caos.
Después de desarrollar su tesis doctoral, para dar origen a la teoría del cobordismo y recibir en 1958 la medalla Fields [23], René Thom a finales de esa década se concentra en el estudio de las relaciones entre el cálculo de variaciones y las singularidades planimétricas investigadas por H. Whitney (de Princeton) [24].

[23] Thom añadió una perspectiva geométrica a la estructura de las nuevas clases características de Pontryagin, de Chern-Weyl y de Stiefel-Whitney, que combinó para revolucionar la topología, la teoría de variedades y la geometría algebraica. Sus conceptos de *genericidad* y *transversalidad* jugaron un papel importante en el desarrollo de los sistemas dinámicos durante las décadas de los 1960 y 1970.

[24] Whitney experimentó con los fenómenos ópticos denominados "cáusticas", que constituían sorprendentes revelaciones de singularidades en las ecuaciones de la óptica, reapareciendo en ondas de choque y ciertas discontinuidades, para generar formas similares una y otra vez.

Thom fue una de las voces más autorizadas de la teoría determinista representada, como ya hemos dejado expuesto, por Newton, Laplace y otros pensadores del siglo XVII en adelante (orientación que seguiría Einstein en el siglo XX). Sería además un persistente crítico de los partidarios del indeterminismo en la teoría del caos y en particular, del Premio Nobel de Química (1977) Ilya Prigogine, defensor a ultranza de aquella corriente por sus trabajos sobre la termodinámica de los sistemas alejados del equilibrio. Prigogine sostiene que la teoría del caos, mediante una combinación de desorden y orden, el universo funciona de manera que en el caos se gestan nuevas estructuras que denomina estructuras disipativas (o estructuras de no equilibrio). En esta área física del no equilibrio, los fenómenos irreversibles juegan un papel fundamental, en donde el nuevo comportamiento conduce a la formación de estructuras de no equilibrio que sólo existen mientras el sistema disipa energía y permanece en interacción con el mundo exterior [25].

Muchos científicos dicen que René Thom es un filósofo y los filósofos que es un matemático. Sin temor a equivocarnos, Thom se ha revelado como un matemático que desarrolla filosofía pura (reivindicando a Aristóteles), y al propio tiempo como un filósofo que descubre nuevos campos matemáticos (nada menos que una teoría topológica de las singularidades y bifurcaciones conocida como teoría de las catástrofes).
Si bien los resultados que como matemático obtuvo Thom serían ciertamente extraordinarios (sus primeros teoremas reconocidos como muy profundos, rigurosos y de gran belleza), no realizaría una gran profusión de publicaciones. Excluyendo los de investigación matemática pura [26], escribió más de 150 artículos. Una quinta parte proceden de la década de 1970 que

[25] Cuando un sistema sufre sólo procesos reversibles, se dice que es conservativo (hamiltoniano); pero si experimenta procesos irreversibles se le llama "disipativo". Las estructuras disipativas experimentan un crecimiento de entropía, y siguiendo a Prigogine, pueden conducir a autoorganización. La palabra caos hace pensar en desorden, imposibilidad de previsión, aunque Prigogine opina que, por el contrario, el caos se puede incluir en las leyes de la naturaleza, pero a costa de generalizar esta noción, incorporándole las de probabilidad e irreversibilidad (I. Prigogine, *Las leyes del caos*, Crítica-Grijalbo, Barcelona, 1997). Su punto de vista era (1977) que "el no-equilibrio es el origen del orden" (en un ciclo de orden, desorden, orden,..., de tal forma que uno lleva al otro y así sucesivamente, quizás en forma indefinida). Es curioso observar que la idea de que el orden es la interacción entre "el azar y la necesidad" (Jacques Monod, Premio Nobel 1965), se aleja de la forma en que se traduce la obra de I. Prigogine e I. Stengers, *La nueva alianza. Metamorfosis de la ciencia*, Alianza, Madrid, 1979, al inglés como *Order out of chaos*, Bantham, N. York, 1984.

[26] Véase *Publications de René Thom*, Publ. Math. Inst. Hautes. Etud. Sci.,**68**, 9-11 (1984).

fueron recopilados en una obra [27], aproximadamente unos dos quintos de la década de los 1980 con algunos del período anterior, componen otro volumen suyo [28], en el que a modo de preámbulo (*advertissement*) se advierte que cubre en general los dominios en que Thom ejercitara su pensamiento: semiología, biología, física y matemáticas, lingüística, teoría de catástrofes, epistemología. Thom escribió asimismo otro grupo de artículos [29] que tratan temas diversos de filosofía de la ciencia como biología teórica, psicología, geografía e incluso poesía, además de otros libros [30].

Su gran obra fue **la teoría de catástrofes** [31], una teoría que desencadenó uno de los episodios más sobresalientes de la vida científica en las décadas de 1970 y 1980, por su gran impacto en la atención pública y en la comunidad ilustrada internacional. Se trata de una teoría brillante y poderosa desarrollada por Thom a finales de los años sesenta, para describir la dinámica de muchos sistemas no-lineales y de cómo esos sistemas podían cambiar catastróficamente de un estado a otro. Atendiendo al gran número de fenómenos interesantes de la naturaleza que presentan discontinuidades, la teoría estudia esencialmente singularidades, lo que conlleva el trato directo de las propiedades de estas últimas cuando se aplica a los problemas científicos. El propósito de la teoría de singularidades es deducir el comportamiento global de las curvas nó algebraicas del conocimiento local en ciertos puntos llamados "puntos singulares", y una extensión de los resultados obtenidos para estas curvas á superficies n-dimensionales fue hecho por Marston Morse en 1934 quien probó que las *superficies suaves*

---

27 René Thom, *Modeles mathématiques de la morphogenése*. Christian Bourgois, 2ª ed., 1980.

28 René Thom, *Apologie du logos*, Hachette, 1990.

29 René Thom fue invitado por la Universidad de La Laguna al Symposium Internacional sobre *La Matemática actual*, que se celebró en dicha Universidad con motivo del XXV aniversario de la creación de los estudios de la Facultad de Matemáticas. Pronunció la Conferencia de Clausura del Symposium, y tuve el privilegio de presentarlo a la comunidad universitaria asistente al acto. Un artículo de Thom titulado *The task of Mathematics in describing the World* fue publicado en la obra " 25 años de Matemáticas (1968-1993) ", Secret. Public. Univ. La Laguna, pp. 83-87 (1996).

30 Entre ellos, *Paraboles et catastrophes*, Flammarion, Paris, 1984 (*Parabole e Catastrofi. Intervista su matemática, scienza e filosofia* de *G. Giorello* y *S. Morini*, Tusquets Ed., Barcelona, 1985) y *Esquisse d'une semiophysique. Physique aristotèlienne et théorie des catastrophes*, InterEditions , Paris (1988). En una obra colectiva *La querelle du determinisme* (Edit. Gallimard, Paris, 1990) publica Thom tres artículos, en el primero de los cuales ("Halte au hazard, silence au bruit") sus acusaciones contra el indeterminismo, provocaría un ya famoso debate de controversias sobre el determinismo.

31 *Stabilité structurelle et morphogenèse*, Edit. Benjamin& Paris, New York, 1972, una obra escrita durante los años 1966-67.

son reducibles, por deformaciones locales denominadas difeomorfismos, a superficies suaves cuyos puntos singulares (si existen) son "regulares". El fundamento **básico** de la teoría refleja "la descripción de fenómenos discontinuos de la naturaleza con ayuda de modelos matemáticos continuos", lo que en terminología matemática indica la traducción de las *discontinuidades* que pudieran presentarse en la evolución de un sistema, transformando unos conceptos abstractos en ciertas formas geométricas que Thom compendió con el término de **catástrofes** [32]. En contraposición, con la teoría newtoniana que sólo considera fenómenos regulares y continuos, la **teoría de catástrofes,** siguiendo la idea de un determinismo que rige los fenómenos vitales, nacía realmente para configurar un método universal para investigar todas las transiciones con saltos, discontinuidades y cambios bruscos de cualquier forma y especie (cambios en el curso de acontecimientos, cambios en la forma de un objeto, cambios en el comportamiento de un sistema, cambios en las ideas mismas) [33]. Por ello, resulta muy apropiada cuando se estudian sistemas cuyos mecanismos internos no se conocen y ciertas situaciones en que lo único fiable se refiere a sus discontinuidades, lo cual por otra parte, requiere además cierto conocimiento del sistema que trate. Por ejemplo, consideremos un sistema dinámico cuyo comportamiento sea normalmente regular, pero que en ciertos lugares u ocasiones, muestra singularidades. Se presupone que el estado del sistema en cualquier momento, puede especificarse completamente dando los valores de n variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde n es finito (y quizás muy grande); y además que el sistema sea dependiente o se encuentra "bajo el control" de un número r (pequeño) de parámetros o variables independientes $(p_1, p_2, \ldots, p_r)$ $(1 \leq r \leq n)$ bien conocidos , es decir, que los valores de estas variables determinan los de las x_i , aunque nó unívocamente. En estos casos las x_i $(1 \leq i \leq n)$ son designadas como variables (de estado) internas , y las p_i como variables externas (o parámetros de control). Si admitimos finalmente, que la dinámica del sistema deriva de un "potencial regular" [34], la teoría de catástrofes resulta ser aplicable a

[32] Un término que en francés no tiene ninguna connotación negativa o desastrosa, como sí sucede en español. El término para designar en francés lo que se entiende en español como *catástrofe*, es más bien el de *débacle.*

[33] El teorema de Morse caracterizaría sólo a puntos singulares regulares, dejando abierto el problema de caracterizar los puntos singulares que no son regulares, debido a que corresponden a cambios radicales en el comportamiento del sistema. El estudio de las superficies con puntos singulares no regulares, es el objeto de la teoría de catástrofes desarrollada por René Thom.

[34] A principios del siglo XVIII, Laplace estableció el concepto de potencial, que resumía en una sola cantidad todas las fuerzas que actúan sobre un objeto. Si el objeto en su

conjuntos de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, con independencia de que la dinámica sea de tipo gradiente o nó. Concretamente y como se constatará más adelante, la teoría trata el estudio de un sistema de ecuaciones diferenciales gobernado por un potencial $F(x_1,x_2,\ldots,x_n, p_1,p_2,\ldots,p_r)$ $(1\leq i\leq n)$ de este tipo, con r parámetros externos ($r\leq4$, restricción que luego se aclara) [35]. A este respecto Thom presentó un célebre resultado (su "teorema de clasificación"), que en términos amplios afirmaba: *"En cualquier sistema gobernado por un potencial y en el cual el comportamiento del sistema esté determinado por cuatro factores externos o parámetros de control diferentes y no más, únicamente son posibles siete tipos de discontinuidad cualitativamente diferentes".*

Este teorema quería significar que el número de configuraciones cualitativamente diferentes de discontinuidades no depende del número de variables de estado, sino del número de variables de control; y en particular, si el número de las variables de control no es mayor que 4, sólo hay siete tipos de catástrofes (donde en ninguna de ellas interviene más de dos variables de estado).

3. La estabilidad estructural

Unos años antes de empezar a elaborar su teoría de las catástrofes, las ideas de Thom apuntaban originariamente hacia un lenguaje matemático para la biología, de la cual un área primordial era el de la morfogénesis (u origen de las formas) en la vida y en la naturaleza inorgánica. Y lo que pretendía establecer era una teoría morfológica, una teoría geométrica de las formas, mostrándola como una teoría *cualitativa*, para situarla en un mismo plano que la teoría de las *bifurcaciones* [36]. Para Thom, un especialista mundial en

---

evolución cambiaba de movimiento, indicaba que se desplazaba a una posición de potencial mínimo. Ello le propulsó a acudir al cálculo de variaciones, deduciendo que hallar la posición final del objeto, significaba encontrar una solución mínima para la ecuación del potencial. Es importante observar cómo un potencial regular - una dinámica regular - (al igual que una función de Liapunov, semejante a un potencial clásico con un gradiente que no determina las trayectorias y en que sus mínimos muestran los equilibrios estables), puede dar lugar a un comportamiento discontinuo, mediante la desaparición de estados estables.

[35] La mecánica, la física y la química proporcionan también ejemplos de sistemas regidos por un potencial, que en la mayor parte de los casos se trata de una energía.

[36] Si la catástrofe constituye el salto brusco (imagen antes dada) que surge como respuesta de un determinado sistema ante una alteración ligera en las condiciones externas, la *bifurcación* (palabra sinónima de "ramificación") designa generalmente cualquier metamorfosis cualitativa del sistema frente a un cambio en los parámetros de los que depende. Realmente, hasta el decenio de los 1960, la mayoría de los científicos no habían prestado especial cuidado a las bifurcaciones que llevan a un estado errático, pero al hallarse entonces sistemas como el de Lorentz (recuérdese la "sensibilidad a las condiciones iniciales" en la Nota pie 16 anterior), se propulsó el desarrollo de teorías como

topología diferencial y apasionado estudioso de la embriología, las matemáticas de los cursos estables del cambio y las matemáticas de la forma biológica eran las mismas, en base a que toda forma de un organismo representa un registro parcial de los procesos de desarrollo y metabolismo. En unos modelos embriológicos que había observado en sus visitas periódicas a un museo, reconoció formas de singularidades e intuyó unos desdoblamientos o "despliegues" (catástrofes) asociados a las mismas y que comparecían en las matemáticas que investigaba. Su minucioso estudio de las relaciones entre la estabilidad y la inestabilidad para la producción de formas, le condujo a una mayor acentuación en la regularidad cualitativa, en vez de hacerlo en la cuantitativa [37]. Obsesionado con el problema de su descripción, Thom elaboró una teoría general de modelos, creando un concepto de estabilidad "estructural" (un concepto que involucra "insensibilidad a pequeñas perturbaciones" de la naturaleza), que puede ser explicado de la manera siguiente: Habiendo sido reconocido desde hace tiempo que en la ciencia se encuentra implícita la creencia de que existe un tipo de orden en el universo y en particular, que se repiten los resultados obtenidos en todo experimento repetido bajo las mismas condiciones, y a sabiendas de que, en realidad, no es posible asegurar de que aquellos se repitan exactamente (ya que factores externos podrían inmiscuirse en el experimento mejor diseñado), Thom señala que toda la ciencia se basa en

---

el de la dinámica de los sistemas no lineales, incorporándose al vocabulario científico de las siguientes décadas, conceptos nuevos (amén del de caos) como los de atractor "extraño", fractal y otros. A este respecto y en opinión de Thom, las catástrofes son generadas por bifurcaciones, que interpretan precisamente que una morfología se produce en el "conflicto" de uno o más atractores; en otras palabras, estaba convencido de que no había que fiarse sólo de las singularidades, sino que era necesario utilizar también todos los recursos de la teoría de la bifurcación.

[37] Thom se enfrasca en las cuestiones o problemas sobre las formas recurrentes una y otra vez en la naturaleza y cavila por ejemplo, sobre la similaridad de la configuración de las ramas de un árbol, de un sistema fluvial y una célula nerviosa, y se plantea interrogantes de este tipo: ¿cómo puede surgir esta regularidad cualitativa en tres conjuntos de circunstancias tan diferentes? ¿se trata de una coincidencia o se está apuntando a un principio común en todos los casos? Para Thom la respuesta a esto lleva consigo un signo del tipo especial de estabilidad de los propios procesos, y arguye que en casi todo proceso natural se distinguen "elementos recurrentes identificables", que pudieran ser formas características como la de un copo de nieve o de una mariposa; o bien etapas características de un proceso dinámico, como la formación de copos de nieve a partir del vapor de agua o la metamorfosis que convierte a una oruga en mariposa. La circunstancia de que sus rasgos cualitativos sean recurrentes, no son exactamente las mismas en términos cuantitativos. En cualquiera de los dos casos, tienen la propiedad de "estabilidad estructural" de la que ahora hablaremos (A. Woodcock y M. Davis, *Teoría de las catástrofes*. Edic. Cátedra, Madrid, 1986 (cap. I).

una suposición implícita de una estabilidad estructural: dos experimentos no dan nunca los mismos resultados cuantitativos, porque las condiciones experimentales no pueden reproducirse exactamente y las perturbaciones externas no pueden eliminarse por completo. Convencido además de que la topología podía servir como lenguaje idóneo para definir los conceptos de forma y cambio estructural, la gran aportación de Thom fue la de revolucionar la matemática aplicada, desarrollando una dinámica cualitativa para adaptarla de manera especial a las biociencias, subrayando entonces que *la ciencia sólo es posible, si las observaciones y los resultados son cualitativamente repetibles.* Así, en lugar de atenerse estrictamente al histórico supuesto, Thom se aferra a lo que en realidad ocurre, esto es, si aquellos se repiten aproximadamente en las mismas condiciones se deben obtener aproximadamente los mismos resultados, aunque añadiendo algo más para dar una descripción matemática más práctica: la de que un fenómeno físico debe admitir la misma clase de insensibilidad en las perturbaciones; en cualquier caso, se deben matizar y completar las definiciones para ajustarse al problema que se esté tratando, es decir, que para cada problema por separado o especial, se requeriría además especificar qué clase de perturbaciones se van a permitir y qué estados finales deben ser considerados equivalentes al estado inicial. La noción de estabilidad no sólo ha de depender de las perturbaciones que permitamos sino también del tipo de equivalencia que asumamos. Lo que realmente interesa es ponderar que cualquier pequeña perturbación (debida a ciertas condiciones que hayan sido impuestas) deje inalterada la naturaleza cualitativa de la familia considerada, o sea, cualquiera que sea su forma, la estructura topológica del conjunto de bifurcación tiene que mantenerse[38]. Una propiedad que Thom designa como *estabilidad estructural* [39]. Este sería

[38] Véase T. Poston & I. Stewart, *Catastrophe theory and its applications,* Dover Public., N. York (Copyright, 1978), cap. 6. Ante todo y por otra parte, recuérdese en lo que hemos dicho, la conclusión aleccionadora a la que había llegado el matemático francés Henri Poincaré (1854-1912) tras partir del esquema determinista laplaciano, al afirmar que la situación inicial del universo sólo podemos conocerla con aproximación (porque siempre cometeríamos algún error cuando establecemos aquella situación). Poincaré dijo "aún suponiendo que pudieran conocerse con exactitud las leyes que rigen la evolución del universo en un estado determinado, la predicción de cualquier estado subsiguiente sería aproximada".

[39] La propiedad no es muy diferente a la que ya se está acostumbrado en mecánica elemental, salvo que el sistema ha de ser resistente, no a perturbaciones que partan de una posición de equilibrio, sino a perturbaciones de las condiciones con las que en realidad se realiza el experimento.

el hilo conductor de su teoría de catástrofes [40], en la cual concentraría su interés para la formación de principios profundos de estabilidad estructural en áreas tan diversas como la biología y la lingüística, principios análogos a los que tienen lugar en física.
Entre los antecedentes claros de la teoría de catástrofes se encuentra uno de los principales biólogos del siglo XX, C.H. Waddington, profesor de genética animal en la Universidad de Edimburgo y presidente de la Internacional Union of Biological Sciences, quien jugó un papel importante al anticiparse al pensamiento biológico de Thom y que sería el primer científico que aclamó la teoría de las catástrofes. Como asimismo el trabajo pionero de d`Arcy Thompson que aparece en las bases de la biomatemática. Mas concretamente, las investigaciones de Waddington, un experto en morfogénesis que había presentido que se estaba usando un lenguaje inadecuado en ese campo, convencieron a Thom de la existencia de muchos procesos biológicos que tenían la propiedad de la *homeorhesis* ("un mismo camino") en los cursos de cambios estatales "canalizados" que resistían las fuerzas perturbadoras, como ríos encerrados en sus orillas) para procesos de desarrollo biológico que siguen un curso estable de cambio [41]. Waddington sugirió en 1940, que era deseable un tipo generalmente topológico para la teoría de la morfogénesis, apropiada para las formas biológicas, y también apuntó que la teoría tendría que ser elaborada en términos de operadores topológicos, es decir, con nociones tales como plegamiento a lo largo de una línea, perforación de agujeros, etc. [42]. Esto coincidía con la teoría en la que cavilaba y estaba desarrollando Thom.

[40] La noción de estabilidad estructural había sido ya introducida en el contexto de las ecuaciones diferenciales por los matemáticos rusos A.A. Andronov y L.S Pontryagin en 1937 (como sistemas "coarse") y dio origen al concepto de "sistema dinámico estructuralmente estable", en donde son admitidas pequeñas perturbaciones de la ecuación diferencial implicada, y se requiere una equivalencia topológica del conjunto de curvas soluciones. Ciñéndonos al caso de la teoría de catástrofes, la noción de estabilidad debe permitir perturbaciones regulares pequeñas de la familia pertinente de funciones, así como también una más fuerte equivalencia o difeomorfismo, es decir, la noción depende de las perturbaciones y del tipo de equivalencia que requiramos.

[41] Ideas que eran topológicas y fueron corrientes, aunque rara vez reconocidas en todas las áreas de la biología. Ya en 1917, en la obra de d'Arcy Thompson (*On growth and form*, Cambridge Univ. Press Oxford, edic. abreviada, 1961), que tuvo luego una profunda influencia sobre tres generaciones de científicos, se había mostrado la forma de la calavera de un pez dibujada en una cuadrícula rectilínea, que podía ser alterada mediante una transformación continua en otra calavera de su predecesor en la evolución.

[42] A. Woodcock y M. Davis, **ibid.**, cap. 2., 36-40.

A causa de la persistente recurrencia de formas similares que había observado en la naturaleza [43], según antes hemos señalado, Thom creía que, al menos para los procesos simples, habría también un número limitado de estructuras arquetípicas; y aún más, se había asegurado de que debía haber un desdoblamiento único para cada singularidad [44]. Tras haber trabajado a fondo en las singularidades topológicas, tuvo que plantearse cuestiones fundamentales, en consonancia con lo hecho por Andronov y Pontryagin: "Dadas las ecuaciones que describen cualquier sistema dinámico, ¿cómo se distribuyen topológicamente las soluciones estables de dichas ecuaciones? ¿cuántas estructuras topológicas diferentes eran posibles? ¿un cambio cuantitativo pequeño alteraría ligeramente las soluciones o produciría unas nuevas muy diferentes, o no dejaría ninguna?" [45]. El desarrollo de sus ideas respecto a la estabilidad estructural en la naturaleza, requería unos modelos topológicos que fuesen compatibles con ellas. Cada modelo debía retener su estructura cualitativa a pesar de variaciones cuantitativas pequeñas, resumir la aparición y desaparición de estabilidad pero hacerlo de forma estable [46]. Después de haber afrontado el precedente planteamiento, fue demostrado por Thom en 1965 con su propio teorema de transversalidad, de que para una amplia gama de procesos sólo eran posibles siete desdoblamientos estables, las "siete catástrofes elementales".

El concepto de estabilidad estructural que nos ocupa es subyacente a la teoría entera de catástrofes y se manifiesta en sí mismo en una constancia local de estructuras cualitativas. De las aplicaciones de la teoría se deriva también que debemos interpretar la palabra "local" (en cuanto al análisis de la naturaleza de los resultados) en el sentido de "asociado con una singularidad".

La propiedad de estabilidad estructural, permite especialmente tratar unos nuevos conceptos que conviene tener presente, por ser luego necesarios para el contexto que nos ocupa.

El primero de esos conceptos puede ser definido del siguiente modo: Si una familia (f) de funciones depende de n parámetros que varían de modo continuo, éstos pueden concebirse como coordenadas de un espacio E de n

[43] ¿cómo era posible que dos procesos pudieran tener rasgos en común incluso cuando se encuentran en escalas físicas diferentes, operan bajo leyes cuantitativas diferentes y son afectados por conjuntos diferentes de causas? (A. Woodcock y M. Davis, **ibid**, p. 41).

[44] B. Malgrange demostró la unicidad de estos desdoblamientos en 1964.

[45] A.Woodcock y M. Davis, **ibid**, cap. 2 , 33-34.

[46] A. Woodcock y M. Davis, **ibid**, p. 59.

dimensiones [47]. Entonces, si f_p es la función de la familia que corresponde al punto P de ese espacio E, y sucede que, para cualquier punto Q de E suficientemente próximo al P, la correspondiente función f_q tiene "*la misma forma*" que f_p, esta f_p representa una función genérica o *estructuralmente estable* de la familia (f). El conjunto de todos los puntos P cuyas funciones correspondientes sean genéricas, representa un subconjunto de puntos *estructuralmente estable* del espacio E. Al complemento de este conjunto, es decir, el conjunto de todos los P tales que f_p no sea genérica, es denominado *conjunto de bifurcación* [48] [49] .

Otros conceptos interesantes a tener en cuenta son los de *corrango* y *codimensión* [50].

No todos los sistemas de la naturaleza son estructuralmente estables, ni de hecho lo son los sistemas dinámicos en matemáticas. La mayor parte de los sistemas no se pueden describir adecuadamente mediante una sola variable de estado; sin embargo, el análisis matemático nos enseña que, sabiendo analizar previamente lo que ocurre con las singularidades (puntos críticos) de las funciones de varias variables, revela generalmente que lo que se haya conseguido de interés, puede ser reducido al caso de una o dos variables.

Consideremos una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables con un punto crítico en el origen, de modo que f y todas sus derivadas parciales de primer orden se anulan en el mismo. Si formamos la *matriz hessiana* de f constituida por sus derivadas parciales de segundo orden $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ $(i,j= 1, \ldots, n)$, es sabido que si el rango de esa matriz hessiana es n (o sea, si su determinante no se anula), existe una transformación de coordenadas que permite escribir el desarrollo de Taylor de f, mediante una expresión de la forma

$$f = e_1 x_1^2 + e_2 x_2^2 + \ldots + e_n x_n^2 + \text{términos de orden más elevado,}$$

en la cual las e_i representan constantes, cada una de ellas iguales a ± 1. En este caso, f es *estructuralmente estable*, y el número de signos más y menos

---

[47] Podría llevar a confusión más adelante el hecho de que nos refiramos a la $f(x)=x^4+ u x^2+ v x$ (por ejemplo) como una función, cuando en realidad de lo que se habla es de una familia biparamétrica (dos parámetros u y v) de funciones. Por tanto, cuando se diga que una función como la f(x) anterior es estructuralmente estable, quiere decir que es estable al considerarla como una familia biparamétrica.

[48] Obsérvese que así se ha logrado definir una clase de estabilidad estructural para una familia matemática de funciones, si bien no se ha precisado la expresión "de la misma **forma**", (o "del mismo tipo o igual configuración)").

[49] Para mejor ilustración de este conjunto, véase la **(1)** de las **Notas finales** del presente artículo.

[50] Thom conjeturó en 1964 que con el corrango y la codimensión se podían clasificar todas las catástrofes. En 1966, J. Matter resolvió esta conjetura.

determina su tipo[51]. Si por el contrario, el rango de la matriz hessiana es n-r para algún r> 0, podríamos escribir f en la forma:

$$f = e_{r+1}\, x_{r+1} + e_{r+2}\, x_{r+2} + \ldots + e_n\, x_n + \text{términos de orden más elevado.}$$

La inestabilidad estructural queda así reducida a las variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$, y puede analizarse exclusivamente en términos de estas variables "esenciales" (por lo que para nuestros efectos, las restantes variables x_{r+1}, $x_{r+2}, \ldots, x_n$, pueden ser "ignoradas").

En consecuencia, el número de clases de catástrofes que pueden aparecer, dependería nó del número n de variables de estado, sino sólo del número r de variables de estado "esenciales". A este número se le denomina *corrango* de la matriz hessiana, o lo que es equivalente, de la función f. El corrango se puede interpretar también como el número de direcciones en que la función es degenerada.

Por otra parte, es conocida la siguiente regla que se infiere de la representación analítica de curvas y superficies de la geometría (de una o más dimensiones): "El número de ecuaciones precisas para representar un objeto geométrico es, en general, igual a la diferencia entre la dimensión del objeto y la del espacio en que está sumergido". Concretamente, a esta cantidad se la llama *codimensión* del objeto, la cual posee por otra parte una importante propiedad, y es la de que generalmente se conserva, si cambiamos la dimensión de un problema ignorando las coordenadas inesenciales[52]. Por consiguiente, cualquier función que sea degenerada en dos direcciones es de codimensión al menos tres, y requiere al menos tres parámetros de desdoblamiento. En general, se deduce que la codimensión

---

[51] Los signos ± indican posibilidades duales. En el cuadro general completo de las siete catástrofes elementales que se estudiarán más adelante, figuran en las obras especializadas catástrofes "duales", en las que las de signo negativo se refieren a las cúspide y mariposa "duales", que en las obras generales no suelen ser distinguidas por no ser significativas.

[52] Es fácil ver que, en general, una familia uniparamétrica continua de objetos de dimensión p, es un objeto de dimensión p+1 (una familia de puntos es una curva, una familia de líneas es una superficie, y así sucesivamente). Y también que, una familia continua r-paramétrica de objetos de dimensión p es un objeto de dimensión p+r. Del mismo modo, una familia r-paramétrica de objetos de codimensión p, es un objeto de codimensión p-r. Puede asimismo ser probado que si se tiene una función de n variables, la condición para que la función sea estructuralmente estable y el problema no se reduzca a otro con menos de n variables, es que una forma cuadrática en n variables se anule idénticamente, es decir, que el rango de su matriz hessiana sea cero. Si n=1, esta condición es $f_{xx}=0$, que es una sola ecuación, por lo que la codimensión puede llegar a ser uno como mínimo. Sin embargo, si n=2 la condición es $f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = 0$, que proporciona tres ecuaciones y requiere al menos tres parámetros de desdoblamiento (para detalles, véase P.T. Saunders, *Una introducción a la teoría de las catástrofes*, Ed. Siglo XXI, Madrid (1980), cap. 2.

mínima para una función de corrango n es ½ n (n+1), número de componentes independientes para una matriz simétrica nxn "[53].
La última de las concepciones, la de "despliegue universal" que vamos a tratar en el parágrafo siguiente, es una de las nociones que, en opinión de Thom, no resulta fácil comprender sin la ayuda de un lenguaje técnico adecuado. Es de importancia muy relevante para el resto de la exposición.

4. El despliegue universal

Uno de los conceptos fundamentales que llegó a ser **clave** para el desarrollo de la teoría de las catástrofes, es el de "*despliegue universal* o *desdoblamiento*", el cual puede interpretarse como una forma de desplegar toda la información intrínseca concentrada en una singularidad. Thom mostró que la idea de "despliegue universal" servía para las estructuras diferenciables. La idea fue la de que si se dispone de un *germen* de una función, es posible introducirlo en una familia maximal. Este germen analítico [54] genera una familia, que es la familia de todas sus deformaciones.

---

[53] Además del topológico, el término "singularidad" tiene otro significado en cálculo y análisis, donde designa un punto en el gráfico de una curva en el que la dirección de la curvatura cambia; por ejemplo, un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión, en una curva del plano. Para curvas *suaves* las únicas catástrofes son las inflexiones donde la curva es plana debido a que atraviesa la tangente, pero al considerar superficies de n dimensiones se tienen diferentes posibilidades que dependen del *corrango* (o número de direcciones en que la curva sección es plana) y de la *codimensión* (o número mínimo de deformaciones necesarias para eliminar la irregularidad).

[54] Una función f definida en un abierto D (de R o de C) es, como es sabido, "analítica" en D, si admite un desarrollo en serie de término general $a_n x^n$ en cualquier x_0 de D. Dicho esto, en términos más rigurosos, consideremos el conjunto de las funciones de R^q en R^m continuas en un entorno de un punto x (por, ejemplo, x=0), y definamos una relación de equivalencia $\approx$, de modo que $f \approx g$ si, y solo si, existe un entorno de x en que f y g coincidan. La clase de equivalencia para la relación $\approx$ (o sea, el conjunto de funciones g tales que $g \approx f$) se denomina *germen* de la función f. Denótese con E(q,m) el espacio vectorial de los gérmenes de las funciones R^q en R^m que son C^∞ en 0; en particular, si m= 1, se escribe E(q) en lugar de E(q,1). E(q) es un álgebra local cuyo único ideal maximal es el conjunto M(q) de los elementos η de E(q) tales que $\eta(0)= \eta$. Un germen η de E tal que $\eta(0)= D\,\eta(0)= 0$ recibe el nombre de singularidad. Además, se define como *r-despliegue* de una singularidad de R^n en R a un germen F de M(n+r) tal que $F(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) = \eta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y se indica usualmente (r,F). Si es un punto de R^r y x abrevia $(x_1, \ldots, x_n)$ se podrá escribir $(x,u) = F_u(x)$. Definiendo ahora convenientemente la "equivalencia" para todo par F y G de gérmenes del espacio E(n+r) (como r-despliegues), provisto de la topología de Whitney o topología C^∞ (Ver Nota pie 55), se puede especificar que un (r,F) es (*estructuralmente*) *estable*, si cualquier pequeña perturbación (r,G) de (r,F) en E(n+r), pequeña respecto de la citada topología, resulta equivalente a (r,F). Un despliegue (r,F) de η se denomina *versal*, si cualquier despliegue de η es inducido por (r,F) mediante un

Los despliegues *versales*, que se acaban de definir en términos rigurosos en la Nota 54 a pie de la presente página, pueden interpretarse en lenguaje más clásico, del modo que sigue: "los despliegues (o desdoblamientos)" que son estructuralmente estables son llamados *versales*; y los que siendo versales tienen el mínimo número de parámetros de un desdoblamiento versal se llaman *universales* (su propiedad importante es la de que dos despliegues universales de la misma singularidad son equivalentes). La idea de "despliegue universal", involucra en cierto sentido, toda la parte cualitativa de la conocida fórmula de Taylor para las funciones. En relación con dicho despliegue (o desdoblamiento), la estabilidad de la singularidad de una aplicación, concreta toda la estructura global en una estructura local Sentado esto, cuando se tiene un germen de una función diferenciable (que localmente es un desarrollo de Taylor), es tal que si este desarrollo se trunca en un cierto punto, el desarrollo truncado seguirá igual proceso y tendrá el mismo tipo topológico del germen de aquella función. No es sólo eso. Toda la teoría de singularidades puede dar condiciones suficientes para que el germen truncado sea equivalente (vía un cambio de variable adecuado) al germen de la función inicial, es decir, permite reducir localmente un germen descrito por una serie infinita, a una serie que consta de un número finito de términos, lo que conduce a un medio único para describir todas las deformaciones posibles de este régimen.
Después de que Thom se interesara por las singularidades planimétricas del topólogo americano H. Whitney y por la relación de las mismas con el cálculo de variaciones, examinó singularidades de dimensión más elevada de las investigadas por Whitney [55], descubriendo modelos interesantes para diversos procesos.
Imbuido en la creencia de que debía haber (al menos para los procesos simples) un número limitado de estructuras arquetípicas, en 1965 llega a la notable conclusión que antes ya hemos anticipado (su "teorema de clasificación"), el cual afirma que para una serie muy amplia de procesos,

morfismo adecuado. Sea r el número más pequeño por el cual (r,F) es versal: (r,F) constituye entonces un *despliegue uni-versal* (de los que solo son posibles siete tipos). Para m =q , en E(q,q) se indicará con B(q) el conjunto de los gérmenes invertibles R^q en R^q que aplican 0 en 0. (Véase R. Thom, *Parábolas y Catástrofes*, **ibid.**, pp. 65-75 y 176-177).

55 Las singularidades planimétricas estudiadas por Whitney son fenómenos que ocurren si los puntos de una superficie se proyectan sobre otra, cuando ambas superficies están topológicamente deformadas. Una idea de la topología de Whitney es la siguiente: Sea E(q,1), o más brevemente E(q), el espacio de los gérmenes de las funciones de R^q a R infinitamente diferenciables, es decir, C^∞ en O. Tal espacio puede estar provisto de una topología, llamada *topología de Whitney* o topología C^∞ adaptada al nivel diferenciable, o sea la topología de la convergencia uniforme de un elemento F de E(q) y de todas sus derivadas en los compactos de R^q.

sólo son posibles siete despliegues o desdoblamientos estables, a los que Thom llamaría *catástrofes elementales* [56], es decir, Thom dio las siete singularidades que aparecen en un despliegue de dimensión inferior o igual a cuatro, que se interpretaron más adelante como las siete catástrofes elementales [57].
Para seguir expresándonos en lenguaje más cómodo y asequible al lector no especializado, limitaremos nuestra atención a la clase de funciones que pueden ser incorporadas a familias estructuralmente estables con un número finito de parámetros de desdoblamiento. De este modo, al ser factible probar que toda función de ese tipo, resulta ser equivalente a un polinomio del mismo corrango y codimensión, se derivaría como consecuencia, la ventaja de trabajar en términos de desarrollos de Taylor de dichas funciones (Para más información y detalles, véase **Nota final (2)**).

Pueden fijarse mejor y más concretamente las ideas de lo que llevamos últimamente expuesto, considerando por ejemplo, el caso de una familia funcional de polinomios de una variable x de grado menor o igual a n, en donde sus coeficientes pueden ser considerados como parámetros de la familia. Partamos del supuesto de que dos polinomios son del mismo tipo, si tienen "la misma configuración de puntos críticos en el entorno de x=0 ". En particular, si n es el número de variables x de estado y r el de parámetros de control, sigue en particular:
Cuando n=1, un despliegue de la función (germen) $\eta(x)= x^3$ sería por ejemplo: $F(x,p_1)= x^3 +p_1x$ donde r= 1; si se toma $\eta(x)= x^4$, un despliegue sería $F(x,p_1,p_2)=x^4+p_1 x^2 +p_2 x$ donde r= 2.
Tengamos en cuenta ahora las perturbaciones: Perturbemos la función $\eta= x^3$, añadiendo un término ε x. Si fuese $\varepsilon>0$, no se encuentra punto crítico alguno, y si fuese ε negativo, se tienen dos: un máximo y mínimo relativos. Para $\varepsilon= 0$, se tiene un punto de inflexión.

---

[56] En muchas ocasiones los despliegues o desdoblamientos se llaman catástrofes, porque cada uno de ellos tiene regiones en que un sistema dinámico puede "saltar" repentinamente de un estado a otro, aunque los factores que controlan el proceso cambian continuamente (Woodcock y Davis, **ibid**, 40-41).

[57] Dado un campo continuo de dinámicas que se bifurcan en ciertos lugares del espacio de control, existe el problema de aclarar la naturaleza de las bifurcaciones genéricas de las bifurcaciones estructuralmente estables, de las que a Thom sólo interesan las segundas. Se ha objetado al respecto, que la teoría antes citada de la bifurcación (que supuso un desafío al principio de la "estabilidad estructural") no conduce a un despliegue de dimensión finita, contrariamente a lo que ocurre en general, con las singularidades de funciones (Véase R. Thom, *Paraboles et catastrophes*, **ibid**, 80-81).

Análogamente, $\eta = x^4$ perturbado con εx^2 proporciona un mínimo relativo para $\varepsilon > 0$, y un máximo y dos mínimos (relativos) para $\varepsilon < 0$. Cuanto más se incremente el exponente k, más complicado resulta el comportamiento de x^k; de este modo, si perturbamos x^5 se obtendrían cuatro puntos críticos, etc. Así pues, intuitivamente no todos los despliegues funcionan bien en el sentido de que resistan pequeñas perturbaciones, esto es, de poderse privilegiar en el modelo los despliegues estables. Por otra parte, es de sumo interés observar que se sabría, por ejemplo, que el polinomio x^4 no es estructuralmente estable, porque es posible comprobar que existen polinomios cercanos a él que no son del mismo tipo, como ocurre con el $x^4 + p_1 x^s$ para $|p_1|$ pequeño y s entero para ciertos valores de s, por lo que en particular, la familia $x^4 + p_1x^2$ tampoco lo sería; se infiere de ese modo que si se pasa del despliegue x^4 al despliegue $x^4 + p_1 x^2$, el perfil sería todavía inestable. Aún más: con la debida formulación de estabilidad respecto a un despliegue (para valores mas bajos de r), se conseguiría una mayor estabilidad en los despliegues. Debe advertirse asimismo que, para el caso x^2 (singularidad=mínimo estable), resulta ser su propio despliegue universal; en el caso x^3, su despliegue universal es $x^3 + p_1 x$; en el caso de x^4 es $x^4 + p_1 x^2 + p_2 x$; en el caso de x^5 sería $x^5 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x$, etc.[58] Si nos ciñéramos, por ejemplo y en particular, al caso de x^4, se vería que el potencial $F(x,p_1,p_2) = x^4 + p_1x^2 + p_2x$, se identifica con la forma canónica de la catástrofe en cúspide [59].

Hasta aquí y en lo últimamente dicho, hemos examinado solamente polinomios, aunque adelantamos que esto no supone una seria limitación, puesto que una función suficientemente regular puede desarrollarse (al menos, formalmente) en una serie de Taylor, y como el coeficiente de x^n es (salvo un factor constante) es simplemente la derivada de orden n, $F^{(n)}(0)$, ello nos proporciona el enfoque que se necesitaría para afrontar de manera adecuada la nueva situación[60].

---

[58] Más adelante veremos que en el caso (n=1, r=2) de la singularidad de x^4, su despliegue universal representa el potencial $F(x,p_1,p_2)$.

[59] Interpretando el potencial como función de la única variable de estado x, para hallar los puntos críticos se establece que $dF/dx = 4x^3+2p_1x+p_2 = 0$, o lo que es lo mismo $x^3+ax+b=0$ ($a = p_1/2$, $b = p_2/4$), una ecuación de tercer grado que tiene como mínimo un radical real y como máximo, tres. La naturaleza de los radicales depende de los parámetros a y b que aparecen en el discriminante de la ecuación cúbica $D=4a^3+27b^2$. Se tiene: para $D<0$ hay tres radicales reales diferentes; para $D>0$ hay un solo radical real y dos complejos conjugados; para $D=0$ vuelve a haber tres radicales reales (si a o b = 0, dos de los radicales reales son iguales, y si $a=b=0$, los tres radicales son iguales). Geométricamente, la situación se interpreta fácilmente en el "plano de control". Véase **Nota final (3).**

[60] Véase P.T. Saunders, **ibid,** (cap. 2), para una visión más general.

En un excelente e ilustrativo trabajo Ivar Ekeland [61], señala que la teoría de catástrofes se separa del determinismo clásico como también del indeterminismo cuántico, y expone que esa teoría sigue la idea de un determinismo que rige los fenómenos vitales expresada por un sistema de ecuaciones diferenciales, si bien hay que renunciar a la tarea (a veces sobrehumana) de identificar las variables internas que intervienen en el mismo y de explicitar las ecuaciones que describen aquel sistema.
Con el propósito de dar una mayor comodidad a la exposición, conviene separar una teoría "**restringida**" de otra teoría "**generalizada**", de la que solamente expondremos a continuación algunas consideraciones:

Uno de los problemas más interesantes y difíciles que se presentan en la biología es el de la morfogénesis o comprensión del desarrollo (a la que ya nos hemos referido con anterioridad), es decir, el proceso por el que un huevo fertilizado se convierte primero en un embrión y después en un organismo completamente formado; y un aspecto importante del desarrollo, es la aparición de las distintas formas características del organismo y sus partes constituyentes (recuérdese lo dicho en la Nota pie 37).
La teoría de las catástrofes puede contribuir al estudio de la morfogénesis, estudiando las morfologías asociadas con las siete catástrofes elementales. Ahora bien, la teoría elemental de catástrofes quizás no sea del todo suficiente [62]. El mismo Thom considera que gran parte de lo que se observa sólo puede ser descrito por lo que él llama *catástrofes generalizadas*, aún no bien conocidas. La idea principal a la que apunta una catástrofe generalizada es la de un atractor que hasta un cierto instante gobierna en exclusiva un dominio D, dejando repentinamente de hacerlo, para ser reemplazado por cierto número de atractores nuevos, cada uno de los cuales gobierna únicamente una parte de D. No se podrá predecir lo que pueda ocurrir a continuación, aunque si dependiera de la codimensión de las nuevas fases, el dominio podría distribuirse en una especie de terrones, burbujas o en unas bandas de filamentos [63].

[61] *La théorie des catastrophes,* La Recherche , **81** vol. 8, 745-754 (1977).
[62] La teoría no-elemental de catástrofes incluye la teoría del caos; por ejemplo, el comienzo de la turbulencia puede algunas veces ser modelado por un salto catastrófico del equilibrio al caos.
[63] Un precioso ejemplo de esta imagen de catástrofe generalizada, puede apreciarse (con ayuda de una fotografía de alta velocidad) cuando una gota alcanza o se introduce en la superficie de un fluido. Véase P.T. Saunders, **ibíd.**, p. 154, y para más detalles, el cap. 8.

5. La teoría de catástrofes "restringida".

La teoría de catástrofes (**restringida**) se concentra en el estudio de los sistemas (S) de ecuaciones diferenciales del tipo:

$$dx_i/dt = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_r) \quad (1 \leq i \leq n)$$

cuyo estado interior viene descrito por n variables <u>internas</u> (o de estado) x_1, x_2, ... , x_n (supuestas a priori "ignoradas", la mayoría de las veces debido a su inaccesibilidad a la experiencia, dado el generalmente elevado número de ellas), y bajo el control de r <u>parámetros</u> independientes (o <u>factores de control</u>) <u>externos</u> p_1, p_2, ... , p_r $(1 \leq r \leq n)$[64].
Desde el punto de vista matemático, puede afirmarse que se trata del único caso en que se podrán resolver las ecuaciones diferenciales que describen el sistema. En esencia, la teoría de catástrofes elementales representa una reducción de la teoría de singularidades a las funciones numéricas.
La teoría de catástrofes (**restringida**) está basada en la existencia de un potencial $F(x_1,\ldots,x_n, p_1,\ldots,p_r)$ que por sí mismo rige el sistema considerado. Las características de los modelos que son obtenidos mediante esta teoría dependen sustancialmente del potencial F. Este potencial F representa un germen de R^n x R^r en R que es C^∞ en el origen O y que constituye el despliegue de un germen η de R^n en R, C^∞ en el origen O. Lo que quiere decir que F depende de las variables de estado o comportamiento x_1, ..., x_n y de los parámetros o variables (factores de control) p_1,..., p_r, y además vale $F(x_1, \ldots, x_n ; O, O, \ldots, O) = (x_1, \ldots, x_n)$. En resumen, un despliegue no es más que una familia de funciones reales de las variables de estado que depende de r parámetros (variables de control).

La hipótesis de que las ecuaciones diferenciales del sistema dependan de un potencial implica necesariamente que la "dinámica externa" que reglamentan los parámetros sea lenta, y que la "dinámica interna" que permite expresar las ecuaciones sea rápida; puesto que de ese modo, los sistemas no se encontrarán nunca fuera de equilibrio, y la evolución será suficientemente lenta para que en cada instante se recupere el estado de equilibrio inicial. Aquí se considera que el potencial F permanece ignorando las variables internas x_1, x_2, ..., x_n: la teoría de catástrofes "restringida" postula simplemente su existencia, sin indagar explicitarlas.

[64] Se deberá observar que no es necesario interpretar al conjunto de parámetros p_i, como capaces de influir sobre (S) cualquiera que sea su estado, sino sólo porque a ellos se limita el estudio, presuponiendo constantes a las otras.

El teorema fundamental de clasificación que estableció Thom no es fácil desarrollar aquí sin utilizar el lenguaje de la topología diferencial. La prueba rigurosa del teorema de Thom que efectuó J. Matter puede ser enunciada de la manera siguiente[65]:

"Se supone $r \leq 4$. El conjunto de los (r,F) es un abierto denso (o sea, su clausura coincide con el espacio completo E(n+r), dotado de la topologia de Whitney). Además, a menos de la adición de una forma cuadrática no degenerada y del producto por ± 1, cualquier (r,F) resulta ser equivalente a uno de los siete despliegues universales de las singularidades η relacionados en la tabla que sigue (las x son las variables de estado y p_1,p_2,p_3,p_4 variables de control)" :

r	Singularidad η. Gérmenes:	Despliegue universal
1	x^3	$x^3+ p_1x$
2	x^4	$x^4+ p_1x^2+p_2x$
3	x^5	$x^5+ p_1x^3+p_2x^2+p_3x$
3	$x_1^3+x_2^3$	$x_1^3+x_2^3 + p_1x_1 x_2+p_2x_1 +p_3x_2$
3	$x_1^3 + x_1 x_2^2$	$x_1^3-x_1 x_2^2+p_1(x_1^2+x_2^2)+p_2x_1 +p_3x_2$
4	x^6	$x^6+p_1x^4+p_2x^3+p_3x^2+p_4x$
4	$x^2+ y^4$	$x_1^2+x_2^4+p_1x_1^2+p_2x_2^2+p_3 x_1 +p_4x_2$

Se debe añadir que la teoría de catástrofes "restringida" es ante todo una teoría que modeliza la acción y reacción de un sistema, o sea, no es el sistema en sí (con sus variables y su potencial) lo que realmente interesa, sino su excitación a reacciones exteriores definidas, descritas por cuatro parámetros como máximo; es decir, no aporta conocimiento alguno del propio sistema, ni tampoco de los estímulos exteriores, sino de la respuesta de algunos de ellos acerca de los otros; y aunque el conocimiento de alguno no sea trasladable a otro, cabe inferir que, cualquiera que sea el sistema que dependa de cuatro parámetros de variación continua, se puede saber cuáles son las formas cuya composición permite reconstituir el conjunto de las catástrofes [66].

Desde el punto de vista físico, el teorema de clasificación de Thom puede interpretarse en el sentido de que a todo valor $p_1, \ldots, p_r$ que se imponga a los parámetros externos, las variables internas reaccionan a su vez situándose sobre un mínimo local de la función $F(p_1, \ldots, p_r)$. Los valores $p_1, p_2, \ldots, p_r$ de

65 R. Thom, *Paraboles e catastrophes* (1985), **ibíd.** (Notas), 167-179..
66 I. Ekeland, *La theorie des catastrophes*, **ibid**, Notas.

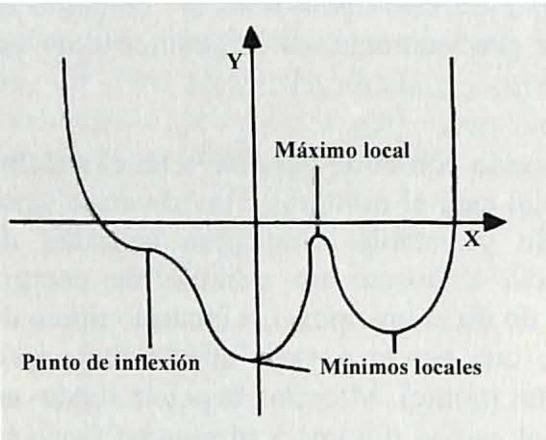
esos parámetros son reproducidos, según se dijo antes, por puntos P de un espacio de n dimensiones. En cada uno de esos puntos, el potencial $F(p_1, p_2, \ldots, p_r)$ puede presentar varios mínimos locales en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde cada uno de ellos representa un equilibrio estable. El sistema conduce así a la consideración de puntos "catastróficos", que al ser franqueados por los parámetros externos implica un salto en las variables internas y un cambio de la morfología del sistema. El lugar de estos puntos es el "conjunto de catástrofes" y lo que vamos a tratar precisamente, es la geometría de ese conjunto[67].

El concepto de potencial está relacionado con el de *equilibrio* (si el sistema se encuentra en equilibrio, el potencial está al mínimo). Hay diversos tipos de equilibrio: inestable, semiestable y estable. Una gran cantidad de sistemas se rigen por una tendencia a buscar un mínimo de energía potencial, si bien la energía suele ser de diversos tipos. Un ejemplo típico de un sistema físico es la tendencia de una pelota a rodar cuesta abajo (por ejemplo, desde la cuesta o colina de un monte). Mientras la pelota rueda en la base al pie de la cuesta, el potencial está al mínimo y el sistema físico se halla en equilibrio. Si se coloca la pelota en equilibrio en la cima de una colina y se le da un ligero empujón, se la echará a rodar cuesta abajo: está en equilibrio inestable. Si la pelota se encuentra sobre un reborde estrecho, un empujón en una dirección la dejará allí, pero un empujón en la otra dirección la enviará por encima de él: está en equilibrio semiestable. Si se encuentra en el fondo de un valle, ofrece resistencia al empujón en cualquier dirección: está en equilibrio estable. Obsérvese, como ejemplo, la curva de la **figura** 1 adjunta, la cual da una imagen gráfica del potencial y el

---

[67] Una categoría especial de sistemas dinámicos es el de los sistemas "disipativos", con una dinámica simple en la que todo movimiento se atenúa con el tiempo y tiende a una posición de reposo (llamada de "equilibrio"). Su ejemplo más familiar es la del péndulo amortiguado, en la que cualquier movimiento se reduce a una posición de equilibrio estable (posición vertical). El modelo matemático de los sistemas se presenta bajo la forma de un potencial que, en general, rige la evolución de una multitud de variables (internas) que intervienen en el potencial. Paras tratar el exterior del sistema se supone que éste depende de un cierto número de parámetros exteriores (externos) que, para abreviar, trataremos con dos de ellos. Puesto que los valores de estos dos parámetros intervienen en la expresión del potencial, si se modifican lo hace también el potencial y, por consiguiente, se desplazan los equilibrios. Se puede añadir que lo que se denominará *catástrofe* para un sistema disipativo general, es: la desaparición de un equilibrio estable y el establecimiento de algún otro, consecutivos a una modificación continua del potencial (Véase I. Ekeland, *Le Calcul, l'imprévu*, Éditions du Seuil, París, 1984; (obra traducida al inglés *Mathematics and Unexpected*, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1988), cap. 3).

equilibrio. El eje Y representa los niveles de un potencial (que aparece como "altura" y es equivalente a un potencial gravitatorio) y el eje X interpreta una condición que puede asimilarse a "distancia", cuyo valor determina el valor del potencial. Supuesta colocada una pelota en cualquier punto de la curva, en todos los sitios salvo en cuatro, la pelota empieza a rodar inmediatamente.



Singularidades de una curva

Fig. 1

Catástrofe simple: Cambio repentino en la energía potencial

Fig. 2

En esos cuatro sitios la curva no tiene ni pendiente ascendente ni descendente: son puntos de equilibrio. Uno es un "reborde", otro es una "cima" y los dos del fondo son "valles". Sólo los dos mínimos son puntos de equilibrio estable, el punto de inflexión es semiestable y el máximo local es inestable.

El antes enunciado teorema de clasificación, expresa en dimensión 3 (tres parámetros externos o factores de control), la existencia de cinco conjuntos de catástrofes elementales. A cada uno de ellos está asociado un sistema descrito por *un potencial* de una (casos (1),(2),(3)) o de dos *variables internas* (casos (5),(6)). La extensión a cuatro parámetros implica la introducción de dos formas nuevas (casos (4),(7)) , en las que resulta mucho más difícil su representación, puesto que se pasa a dimensión 4 [68].

La nomenclatura acuñada por Thom para las catástrofes elementales es la siguiente: (1) el *pliegue (pli),* (2) la *cúspide (fronce)*[69], (3) la *cola de milano*

---

[68] A. Woodcock y M. Davis, **ibíd.**, cap. 3; I. Ekeland, La theorie des catastrophes, **ibíd**.,pp. 748 y sigs.

[69] La traducción literal pliegue del francés "pli", parece más adecuada que la también usada del inglés "doblez"; la nomenclatura inglesa de cúspide basada en la geometría del

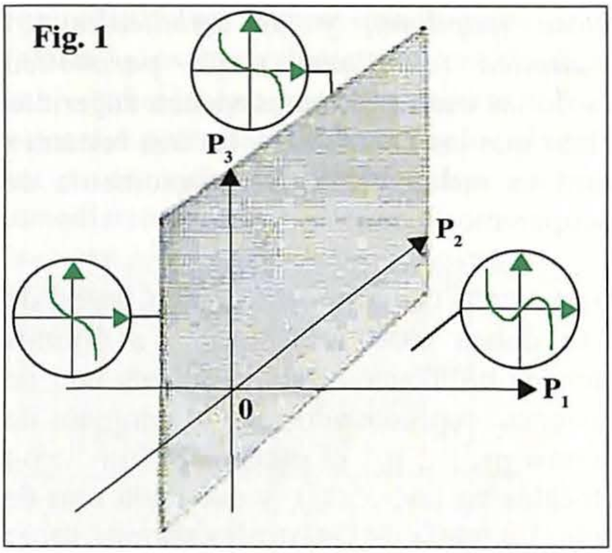
(queue d'aronde), (4) la *mariposa (papillon)*, y las *umbilicales* (5) *hiperbólica (hiperbolique)*, (6) *elíptica (elliptique) y* (7) *parabólica (parabolique)*; las denominaciones de las cuatro primeras vienen sugeridas por los rasgos visuales de las gráficas que las describen, y las tres restantes (difíciles de visualizar) llevan nombres matemáticos. De la geometría de estas catástrofes elementales nos ocuparemos luego.

Hay que anticipar ahora un esbozo de ciertas concepciones (o bien, leyes) de interés en las aplicaciones que se deben tener en cuenta. Ya dijimos anteriormente al hablar del conjunto de bifurcación, que para cada uno de los puntos del espacio de r dimensiones representados por el conjunto de los valores de los parámetros externos $p_1, \ldots, p_r$, el potencial $F(p_1, \ldots, p_r)$ podría presentar varios mínimos locales en $(x_1, \ldots, x_n)$, y que cada uno de ellos representa un equilibrio estable. La teoría de catástrofes permite saber cuántos equilibrios estables existen para una elección dada de los parámetros de control, aunque no nos dice cuál de ellos encontraremos en el sistema. El criterio que determina cuál de los equilibrios posibles se elige, se ajusta en general, a dos reglas conocidas como "regla del retraso" y "regla de Maxwell". El modelo del sistema que no contiene más que una variable <u>interna</u> x y un parámetro <u>externo</u> p, donde la conducta <u>x</u> depende de la excitación de <u>p</u>, permite comprender una buena parte de las premisas de la teoría de las catástrofes. Los sistemas que se mantienen en la rama de la superficie de equilibrio en que se encuentran hasta que desaparece, obedecen a la <u>regla del retraso.</u> El *modelo hidráulico* en una sola dimensión es su mejor ejemplo. Otros sistemas en que la variable interna se desplaza en cada instante sobre un mínimo global del potencial siguen la <u>regla de Maxwell</u>, que aparece en la termodinámica clásica debido a que el proceso se rige por las leyes de la mecánica estadística.

Las **figuras** que seguidamente se adjuntan, al igual que algunos párrafos de sus leyendas, han sido reproducidas del citado artículo de Ivar Ekeland, *La theorie des catastrophes,* Revista La Recherche). Resúmenes de ciertas consideraciones expuestas en la misma, han sido también recogidos.

---

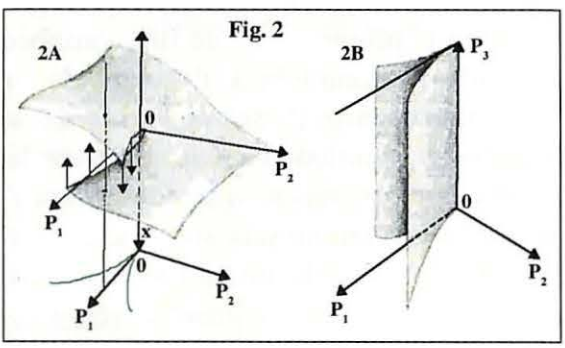
conjunto de bifurcación, para la locución francesa "fronce", encaja mejor para esta singularidad (P.T. Saunders, **ibid**, Nota pie, p. 61).



(1) El *pliegue* está asociado a un potencial de la forma

$$F_p = x^3 + p_1 x$$

Su corrango es uno y uno la codimensión.
Es la más simple de las catástrofes elementales, tiene un eje de control y un eje de conducta y es, por tanto, bidimensional. El conjunto de catástrofes es el plano $p_1=0$. El comportamiento de F_p a un lado y otro de este plano se indica en la figura. El gráfico de la catástrofe en pliegue representa la conducta de todos los sistemas que son dependientes de un parámetro de control solamente.



(2) La *cúspide* está asociada a un potencial de la forma

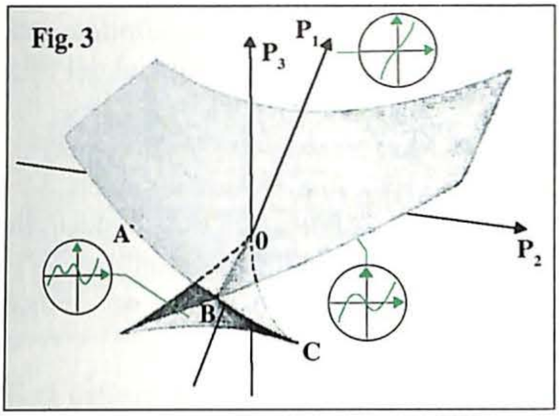
$$F_p(x)= x^4- p_1x^2-p_2 x$$

Tiene corrango uno y codimensión dos.

(2A) Cúspide en dos dimensiones. Aplicando la regla del retraso, se representan sobre un mismo dibujo los valores (p_1 ,p_2)de los parámetros y la respuesta x del sistema.

(2B) Cúspide en tres dimensiones: Se completa introduciendo el tercer parámetro p_3 , de hecho inoperante.

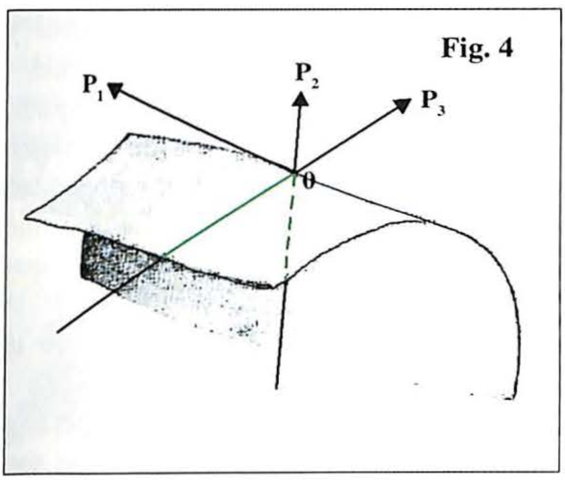
La catástrofe en cúspide ocurre en sistemas cuya conducta depende de dos parámetros de control. Su gráfico es tridimensional, una superficie curva con un pliegue. Cada punto de la superficie representa un estado de equilibrio. Todos los puntos de la cara inferior del pliegue son máximos inestables y todos los situados a lo largo de la línea de pliegue son puntos de inflexión semiestables; el resto de puntos son mínimos inestables.



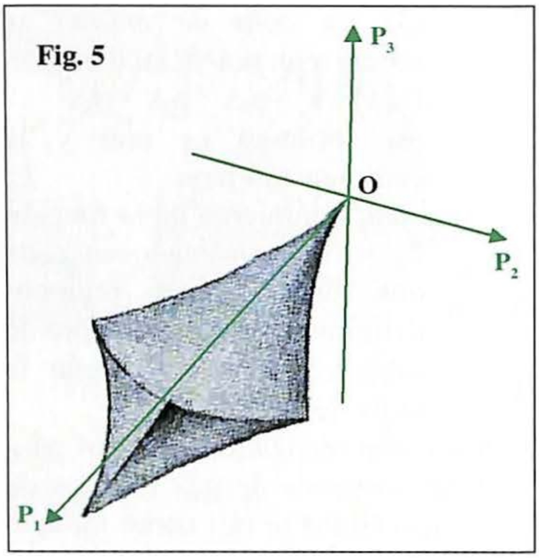
(3) La *cola de milano* se asocia a un potencial del tipo:
$F_p(x)= x^5 +p_1x^3+p_2x^2+p_3x$
Su corrango es uno y la codimensión tres. El comportamiento de la función F_p se ha presentado en cada una de las tres regiones delimitadas por el conjunto de catástrofes, trazado según la regla del retraso.

La catástrofe en cola de milano puede usarse como modelo de procesos para sistemas en los que la conducta (un eje) depende de tres factores de control. Su gráfico tetradimensional no es especialmente útil como modelo cualitativo (al no existir ningún estado estable).

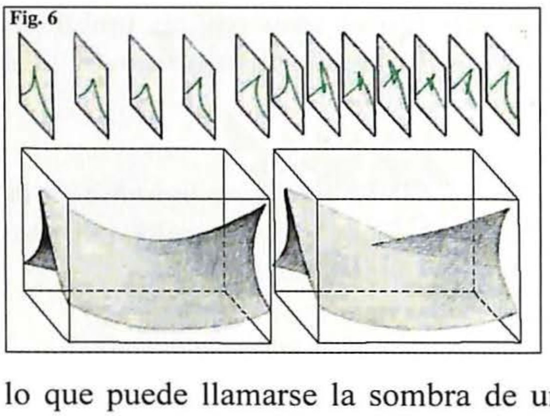
La conexión existente entre las series de Taylor y la de las catástrofes es muy sorprendente para el de las *umbílicas* (en el caso real,las umbílicas elíptica e hiperbólica exhiben una geometría drásticamente diferente, si bien no ocurre igual en el caso complejo).



(4) La *umbílica hiperbólica* es la que corresponde a un potencial de la forma
$F_p(x_1,x_2)=$
$x_1^3+x_2^3+p_1x_1x_2+p_1x_2+p_2x_1$
Su corrango es dos. Espacio de control tridimensional.
Tiene dos ejes de conducta
Partes de los ejes p_2 y p_3 están trazadas sobre la superficie.
El gráfico de esta catástrofe es de cinco dimensiones.

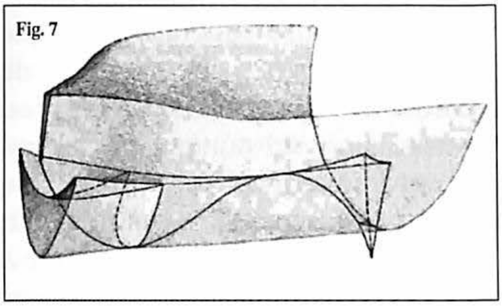


(5) La *umbílica elíptica* está asociada a un potencial del tipo $F_P(x_1,x_2)=x_1^3/3-x_1x_2^2+p_1(x_1^2+x_2^2)-p_1x_1-p_2x_2$
Tiene dos ejes de conducta.
Es de corrango dos. Espacio de control tridimensional.
Su gráfico es de cinco dimensiones.



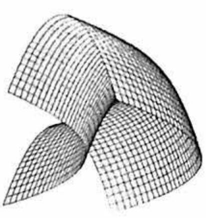
(6) La *mariposa*, de potencial $F_p(x)=x^6+p_1x^4+p_2x^3+p_3x^2+p_4x$
Es de corrango uno y tiene de codimensión cuatro.
Esta catástrofe depende de <u>cuatro</u> parámetros de control y su gráfico es pentadimensional.
No puede dibujarse el conjunto de bifurcación. Una imagen tridimensionalpodría representar lo que puede llamarse la sombra de una sección transversal. Manteniendo constante un factor de control se obtienen dos imágenes de ese tipo, que permiten que otro tome dos valores fijos diferentes. El modelo de la mariposa presenta una amplia gama de conductas similares a las de la cúspide.
El despliegue puede ser tratado por la misma vía que los anteriores, pero se requiere definir una descomposición del espacio R^4 cuyas coordenadas son los términos cuadrático, cúbico, cuártico y quíntico de las series de Taylor.

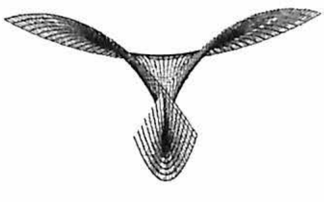
Fig. 7

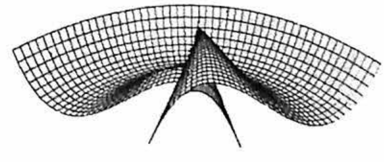


(7) La *umbílica parabólica*, está asociada a un potencial de la forma $F_P(x_1,x_2)=x_1^2x_2+x_2^4+p_1x_1^2+p_2x_2^2+p_3x_1+p_4x_2$
Su corrango es dos.
Tiene cuatro parámetros de control y dos ejes de conducta, por lo que el gráfico de esta catástrofe es de seis dimensiones.
Esta catástrofe es muy complicada de manejar. Requiere una interpretación cuidadosa, y dramatiza el papel de "umbílico" como transición entre las otras catástrofes elíptica e hiperbólica.
Puesto que los gráficos de las tres catástrofes umbílicas elíptica, hiperbólica y parabólica tienen dos ejes de conducta en vez de uno, resulta que una transición catastrófica debe imaginarse, nó como el salto de un punto a lo largo de una línea recta (como en el caso de la cúspide), sino como una línea saltando en un plano (para más información, véase T. Poston & I.N. Stewart, **ibid.**).

Se pueden estudiar las formas complejas de los gráficos de las catástrofes umbilicales, programando un ordenador de modo que dibuje proyecciones planas de ellas para diversas combinaciones de valores de los parámetros de control. Como con los demás modelos, la catástrofe ocurre en los modelos umbilicales cada vez que el sistema abandona la superficie. Las tres **figuras siguientes** están reproducidas de la obra Woodcock y Davis, **ibíd.,** págs. 74 y 75):







6. Observaciones.

Cada una de las catástrofes elementales representa una línea de comportamiento determinada sólo por el **número** de factores de control, no por su naturaleza ni por los mecanismos interiores que los conectan al

comportamiento del sistema. Por tanto, las catástrofes elementales pueden ser modelos de una amplia variedad de procesos, incluso aquéllos de los que sabemos poco de las leyes cuantitativas implicadas. El número de configuraciones cualitativamente diferentes de las discontinuidades, depende no del número de variables de estado, sino del número en general pequeño, de las variables o parámetros de control, el cual se elige igual o menor que cuatro, que posibilita sólo siete tipos diferentes de catástrofes. En toda curva o superficie determinada por diferentes condiciones conforme a una amplia variedad de relaciones matemáticas, lo que sólo interesa saber es su forma cualitativa, la cual cambia sólo cuando se crea o se destruye un punto de equilibrio. Para cada una de las gráficas de las familias se requiere un nuevo gráfico que tenga una dimensión, o eje, para cada *factor de control* que determine el comportamiento del sistema. Debe tener además, un eje o dos adicionales que representen el comportamiento en sí.
Después de explorar a fondo la relación de las singularidades topológicas con los puntos críticos del cálculo, Thom intuyó cómo se "desdoblarían" las primeras en disposiciones de los últimos, imponiéndoles una estructura (la disposición de máximos y mínimos de un proceso) lo que equivalía a conocer su comportamiento cualitativo. Dedujo entonces que los cimientos de la teoría que elaboraba requería de modelos topológicos estables, para retener su estructura cualitativa ante posibles variaciones cuantitativas pequeñas. De este modo, en los casos generales, los puntos de equilibrio podían representarse como desdoblamiento de las singularidades topológicas. Para situar los puntos de equilibrio y determinar su estabilidad, predecir donde y en qué condiciones aparecerán las discontinuidades, cabe reemplazar el potencial por un polinomio con los mismos puntos críticos. Además, el tipo cualitativo de cualquier discontinuidad estable *nó* depende de la naturaleza específica del potencial implicado, sino simplemente de su existencia; ni depende tampoco de las condiciones específicas que regulan el comportamiento, sino de su número. En definitiva, para una amplia gama de situaciones (físicas, biológicas e incluso psicológicas), existe un potencial y una posible discontinuidad, indicando el teorema de clasificación que sólo hay siete maneras fundamentalmente diferentes de que eso ocurra [70].

[70] Se han sintetizado algunos párrafos significativos de la obra de A. Woodcock y M. Davis, *La teoría de catástrofes*, **ibid.** Para detalles, y una descripción técnica completa de la geometría de las siete catástrofes elementales, consúltese la obra de T. Poston & I.N. Stewart, **ibid.**, cap. 9.

7. La controversia.

La aparición en 1972 del libro de Thom, *Stabilité structurelle et morphogenèse* con un título muy poco atractivo propulsó la teoría de catástrofes que, como ya hemos señalado con anterioridad, fue uno de los mayores acontecimientos científicos que ocurrieron en las décadas de los 1970 y 1980, acaparando de inmediato las primeras páginas de las revistas internacionales ilustradas más leídas. Contenía un prefacio de Waddington quien lo comentaba como "una contribución muy importante a la filosofía de la ciencia y en particular , a la biología teórica". Un número considerable de personas quedaron contagiadas por las ideas de la teoría de catástrofes y se originaron controversias, unos defensores y otros detractores de la misma. Al principio, la reputación adquirida por René Thom, antes comentada, sobre terrenos más técnicos como la teoría del cobordismo y la topología diferencial y la obtención de la medalla Fields en el año 1958, no pareció ser tenida muy en cuenta en muchos ámbitos. Ya hemos anticipado que la teoría estudia singularidades, y cambios bruscos de cualquier forma y especie, en la dinámica de muchos sistemas no lineales. Thom había descrito su teoría como un *arte* o "teoría general de modelos", una forma de generar y clasificar analogías en el seno de las áreas científicas de modo interdisciplinario. En la presentación de su obra se dirigía a los biólogos, más bien que a los matemáticos, físicos, químicos e ingenieros, resaltando que los modelos de la teoría de las catástrofes eran inherentemente cualitativos y sugerían nuevos tipos de experimentos. Cabría añadir aquí que con su ya afamada frase para describir los fenómenos del mundo exterior, afirmando que "a toda exploración científica se le plantea el dilema de *magia o geometría*", Thom quiso ampliar la intuición de *forma*, ofreciendo como respuesta al dilema el recurso a la topología (una sutil descendiente de la geometría), un campo especializado que se ocupa de todas las formas (concebibles) abstractas y multidimensionales, que combina esas formas con elementos del cálculo para tratar cuestiones de estabilidad y transformación. Al asumir la premisa de que los cambios de forma (tanto en los procesos como en los objetos) son reales, pudo identificar el objetivo de la ciencia con la incesante creación, evolución y destrucción de formas del universo. A causa de su fundamento en la topología se propuso así que su obra de las catástrofes hubiese de ser cualitativa y no cuantitativa, y que por el hecho de serlo, proporciona resultados cualitativos [71] .

[71] Por otra parte, en ciertas áreas científicas, como por ejemplo la biología, que posee una gran riqueza de datos cualitativos, la teoría matemática no ha conseguido asentarse del todo. Casi todas las matemáticas que utilizaron los biólogos, incluso en los casos

Un alto contenido filosófico de su presentación de la teoría de catástrofes desvió un tanto la atención, oscureciendo los brillantes resultados de Thom en la teoría de singularidades y en especial, su extraordinario teorema de clasificación, que seguía la iniciativa propugnada por Poincaré para desarrollar una teoría cualitativa de los sistemas dinámicos [72].

De todos modos, la presentación de la obra hizo que el trabajo de Thom resultara incomprensible e inaccesible para algunos que se estaban beneficiando directamente en problemas puntuales de los contenidos de aquella y que no llegaron a profundizar en su desarrollo. Por otra parte también, quizás un optimismo exagerado con su planteamiento de las cosas, llevaron a algunos entusiastas de la teoría topológica de Thom a extrapolaciones que, a la larga, fueron contraproducentes para su desarrollo.

Siguieron rápidamente otras oportunidades para la extensión de la teoría. El matemático E. Christopher Zeeman de la Universidad de Warwick, se convirtió en el mayor portavoz que divulgó la teoría de catástrofes. Intuyó claramente que la teoría de modelos podría ser un instrumento de trabajo sumamente útil en muchas disciplinas no muy desarrolladas en infraestructura matemática. Su énfasis principal fue la localización de las catástrofes elementales en la modelización de los fenómenos discontinuos. Las publicaciones de Zeeman estuvieron dirigidas a una amplia audiencia de matemáticos y no matemáticos por lo que solía evitar el uso de la terminología matemática tanto como le fuera posible. Casi paralelamente a la aparición de la obra de Thom en inglés, aplicó dicha teoría a una multitud de materias de las ciencias biológicas y sociales [73], desde los latidos de

---

especiales, proporcionan resultados cuantitativos. Los éxitos de la física fueron tan grandes que muchas personas aún mantienen que otras disciplinas sólo son científicas, en la medida en que siguen la pauta marcada hace unos tres siglos por Newton, debiendo encajarse todas las piezas sueltas del pensamiento cualitativo. "Toda ciencia es, *o física o coleccionismo de sellos*", dijo el experimentador atómico lord Rutherford a sus alumnos a principios del siglo XX. Lo cualitativo no es sino deficientemente cuantitativo". Pero, en realidad existen circunstancias en las que lo *cuantitativo es simplemente una mala aproximación de lo cualitativo.* Es presumible, como ya se han planteado algunos científicos, que ¿no sería mejor darle la vuelta en biología, a la afirmación de Rutherford?.

[72] Después de introducir el concepto de "transversalidad" en su discusión de la estabilidad estructural, Thom la utilizó para describir las formas canónicas de una clase de singularidades de aplicaciones f: $R^n \to R^1$ (funciones) que luego llamaría "catástrofes".

Thom reiteró en algunas ocasiones que, en su opinión, la teoría de singularidades es una parte de la teoría de las catástrofes.

[73] Una de las primeras ilustraciones de Zeeman se refiere al comportamiento de un perro bajo tensión. Los dos factores que tienen una influencia mayor en la agresividad de los perros son el furor y el miedo. El nivel de agresividad crece con un aumento de furor exclusivamente y decrece con un aumento de miedo exclusivamente. Ahora bien, ¿cuál es el efecto de un aumento simultáneo de ambos factores? Se observan características típicas

corazón hasta los motines en las prisiones (precisamente, el modelo de estos últimos provocó el primer estallido de la controversia), originando tantos críticos como partidarios. Por todo ello, la mayor parte y fondo de la controversia creada se refiere a las aplicaciones de la teoría de catástrofes, que se concentró principalmente en Zeeman, y nó a la veracidad de los teoremas demostrados en los que se basa la teoría.
No hubo dudas sobre la creciente divergencia entre las concepciones de Thom y de Zeeman (al principio gran defensor de Thom), respecto al modo de usar la teoría de las catástrofes, si bien ello no disminuyó la amistad entrambos, ni el respeto que se tenían el uno al otro. La obra de Thom se había presentado como una investigación pura de la topología diferencial, con capacidad para aplicarse a la biología y otras disciplinas, pero desde luego, se tendría que indagar el *sentido* de la matemática sin reducirla a un mero lenguaje formal – forma pura – ni convertirla en una matemática aplicada predispuesta a degradar cualquier sistema a la que se asociara. El proyecto exigía una filosofía que permitiera encontrar el sentido de las cosas, en tanto en cuanto se trata de formas, *morfologías*. Como teoría científica, Thom extendió la aplicación de las matemáticas a las formas o morfologías del mundo, con el fin de comprenderlo, de encontrar su sentido. Hubo ante todo un debate fuerte entre Zeeman y Thom respecto al real y adecuado significado de las catástrofes, que no sólo se polarizó en el origen del concepto, sino en la propia extensión y sentido de la teoría. El paso de la matemática pura al de las aplicaciones fue tan rápido en las manos de Zeeman , que dio lugar a una fuerte reacción negativa. Los portavoces más significativos de esta reacción fueron el matemático argentino Héctor J. Sussmann (de Rutgers) y R.S. Zahler (de Yale)[74], que se inició sobre todo por un artículo de 1975 del primero de ellos, bien informado y expuesto con claridad, en el que manifiesta: "el autor (Thom) no adopta posición alguna sobre si la teoría de catástrofes tiene realmente aplicaciones importantes". También S. Smale toma una posición crítica tajante: "La teoría de catástrofes tiene más de filosofía que de matemáticas". Ciertamente, a medida que pasó el tiempo Thom llegó a ser (lo que se aprecia claramente

de la catástrofe en cúspide: las variables de control son el furor y el miedo, y la variable de estado es el comportamiento. Debe observarse que cuando dos variables de control están en conflicto (o sea, el aumento de una de ellas tiene el efecto opuesto en la otra), los ejes no coinciden con los ejes p_1 y p_2 de la cúspide canónica. El ejemplo de Zeeman resultó ser más útil como ilustración, que como contribución científica (Véase un esquema en P.T. Saunders, **ibíd.**, cap. 1).

[74] Según estos autores, " la filosofía de Thom era una nueva versión del idealismo matemático de Pitágoras y Platón, que situó a la geometría en un plano más elevado que nuestras imperfectas y cambiantes percepciones de la naturaleza".

en la década de los 1990) más filósofo que matemático. Ya en varias ocasiones tuvo que afirmar que su teoría de catástrofes no debía ser examinada como una teoría científica, lo que sembró de mayor dificultad evaluar sus ideas en los términos usuales de los matemáticos. Por otra parte, John Guckenheimer (quien quizás fuera el mejor crítico y con mayor información del modo en que se presentó la teoría de catástrofes), un experto en teoría dinámica y topología, aunque tenía sus reservas acerca de las aplicaciones, advertía también "que la teoría de catástrofes no se trataba de una obra matemática y que sería un error aplicarle criterios técnicos en cuanto a las demostraciones rigurosas, puesto que esa no era la pretensión de Thom". Desde luego, nadie discute el gran papel del trabajo de Thom sobre la teoría de singularidades (cuyo supremo avance fue debido a Whitney, Mather, Malgrange, Arnold y el propio Thom), pero evaluar la teoría de catástrofes como filosofía, es una cuestión bien distinta. Según J. Guckenheimer [75], los modelos de Zeeman, especialmente en las ciencias sociales y para la propagación de impulsos nerviosos, suministran cierto tipo de ilustraciones y crean algunos escepticismos, hasta el punto de que Sussman y Zahler aprovechan la oportunidad para analizar y criticar con dureza artículos de aquel, en cuanto a predicciones, razonamientos incorrectos en algunos modelos, y otros pormenores (*Synthese* 1978, 117-216). No obstante, las críticas de estos últimos, en general no han sido universalmente aceptadas. De todos modos, la teoría de catástrofes no va a depender en el futuro de los argumentos a favor o en contra, sino en lo útil que resulte; incuestionablemente, es una teoría ambiciosa y sus promesas aún mayores que sus logros.

Cuando la polémica, ya a finales de los años setenta, se apaciguó, los ánimos se calmaron y las acritudes se transformaron en juicios más razonables y positivos. En las páginas de algunas revistas internacionales entre ellas *Nature* (**270**, 381-384, Dic. 1977), apareció uno de los primeros resultados de esa reacción, que fue la de retrasar unos años la aceptación de la teoría de catástrofes y considerarla como un instrumento útil de trabajo para científicos e ingenieros. Siguieron, desde luego, existiendo cuestiones y problemas de importancia relativos a la teoría, lo que de ningún modo fuera óbice para que ésta continuara su desarrollo y se la reconociera como avance científico trascendental.

[75] *The catastrophe controversy*, Math. Intelligencer, **1**, 15-20 (1978).

Por último, no es intención nuestra a partir de aquí, la de examinar la polémica de los pros y los contras de la teoría de catástrofes, si bien añadiremos seguidamente sólo algunas acotaciones puntuales.
La controversia ha sido tratada en diversos artículos y obras, en particular las siguientes ya citadas en este trabajo: A. Woodcock y M. Davis, **ibid** (cap. 4), I. Ekeland, *Le calcul, l'imprèvu*, **ibid** (cap. 3) (y también en la *Recherche*, **ibid**), J. Guckenheimer (**ibid**), T. Poston and I.N. Stewart, **ibid** (cap. 18), además de en R. Gilmore, *Catastrophe theory for scientists and engineers*, Dover Public. Inc., New Cork (1984), Epilogue, 643-646), entre otros [76].

La división algo arbitraria entre las matemáticas puras y las aplicadas también jugó un papel en la controversia. El matemático aplicado no está acostumbrado a que le pasen a veces por encima [77].

La teoría de catástrofes se puede aplicar en ocasiones con éxito, tanto para las ciencias "duras" (física, química, ingeniería) como para las "blandas". Las primeras son las más beneficiadas con la teoría, sobretodo como instrumento para descubrir consecuencias de modelos matemáticos con hipótesis ya establecidas, pero con implicaciones aún en exploración. Es posible que para muchos lectores, mayormente para los no especializados que estudian sistemas diversos en las aplicaciones, no se sientan cómodos con la teoría de catástrofes, ya que a menudo suele sólo proporcionar una *descripción* del sistema y no una *explicación*. Precisamente, este ha sido uno de los puntos principales de incidencia en la gran parte de las polémicas que se suscitaron y rodearon a la teoría de catástrofes.
Existe un número de hechos que pueden ocurrir en los sistemas físicos que sugieren la presencia de una catástrofe. El reconocimiento de la presencia y tipo de catástrofe, es frecuentemente un importante potencial para la

---

[76] Las obras referenciadas representan, por otra parte, excelentes introducciones a la teoría de las catástrofes. En la de Poston y Stewart, se realiza en lenguaje más técnico dirigido a investigadores y lectores con mayor conocimiento matemático, un estudio completo de la teoría, incluyéndose una extensa lista de aplicaciones. En lenguaje más asequible y claro para el lector menos preparado, la de R. Gilmore.

[77] En una reunión celebrada en Bellaggio (Italia), para reforzar su opinión en lo que estaba tratando en su intervención, Zeeman contó: El matemático aplicado dice al matemático puro, "usted no sabe las suficientes matemáticas para saber cómo es el mundo real, ni para ver la cantidad de defectos que tiene". Ambos son conscientes de que hasta incluso el significado de la palabra "catástrofe", se pierde en las explicaciones no técnicas de la teoría (A. Woodcock y M. Davis, **ibid**, p. 91).

descripción peculiar apropiada de un sistema físico (véase R. Gilmore, **ibid**, cap. 9).

La teoría de catástrofes posee la fuerte ventaja de garantizar que las conclusiones derivadas de la teoría sean "estructuralmente estables", lo que no siempre sucede en otros métodos (por ejemplo, las ecuaciones de Lotka-Volterra son estructuralmente inestables). Además, como se trata de una teoría topológica, proporciona resultados cualitativos. Por supuesto, no es la única que tiene esta propiedad, ni la única tampoco que estudia singularidades.

La teoría de catástrofes habrá de ser durante bastante tiempo un fundamental método para describir la influencia de parámetros exteriores sobre los sistemas dinámicos; pese a que resulte restrictiva, ya que no se aplica más que a los sistemas disipativos (e incluso bajo ciertas condiciones). Ahora bien, el proyecto de Thom, más que científico era metafísico, y el postulado central de su metafísica es que a todo objeto natural se encuentra asociado una cierta dinámica, y la forma bajo la cual aparece al observador, no es otra que una frontera de catástrofes anexa a este sistema, cuyo objeto natural ocupa el espacio de los parámetros.
Queda un último punto a subrayar (del que se hace una breve referencia): el papel del tiempo. En realidad, el matemático se puede contentar afirmando que el tiempo es simplemente el cuarto parámetro t constante, siendo los otros tres las coordenadas del espacio, y al referirse a la teoría de catástrofes decir que se despliegan en un espacio de cuatro dimensiones. Lo que observa el físico o el biólogo, no es una catástrofe en ese espacio-tiempo, sino sus secciones con t constante, lo que no representa la magnífica catástrofe de cuatro dimensiones, sino una sucesión temporal de catástrofes tridimensionales.
¿Si no seguimos a Thom sobre el terreno metafísico, qué queda de la teoría de catástrofes? (I. Ekeland, *Le calcul, l'imprèvu*, **ibid**, pp. 124 y sigs.).

Si se tuvieran que enmarcar escrupulosamente los métodos matemáticos que incrementan en grado sumo nuestro saber científico, no seríamos capaces de apartar del cuadro a la teoría de catástrofes.

Notas finales.

(1) Dado un potencial V , se define su superficie (regular) de equilibrio M por la ecuación $\nabla_x V = 0$, donde el subíndice x indica que el gradiente se toma con respecto a las variables de estado solamente. Esta superficie M está formada por todos los puntos críticos de V, es decir, todos los equilibrios (estables o no) del sistema. El conjunto de singularidades S, viene definido como el subconjunto de M constituido por todos los puntos críticos degenerados de V, los cuales son los puntos en los que $\nabla_x V = 0$, y también $\Delta \equiv \det\{H(V)\} = 0$, donde H(V) representa la matriz hessiana de V, o sea, la matriz de las derivadas parciales de segundo orden. Si se proyecta S sobre el espacio de control C (eliminando las variables de estado de las ecuaciones que lo definen), se obtiene el *conjunto de bifurcación*, conjunto de todos los puntos de C en los que se producen cambios en la forma de V (obsérvese que se puede determinar la forma de V en todo punto de C).

(2) Ante todo debemos indicar que no se pierde generalidad en lo que se está tratando, definiendo los *difeomorfismos* [78]en términos de polinomios. Así, se evita repetir una y otra vez, que se pueden despreciar términos de orden superior , al referirnos "a la serie de Taylor formal de una función f truncada tras el término de grado k, como el desarrollo de grado k de f ", que denotaremos $j^k(f)$ (en topología diferencial se expresa k-jet). Por ejemplo: $j^3(\text{sen } x)= x- x^3$.
Recuérdese que en matemática aplicada o en física, para aproximar una función analítica regular f: R→R en un entorno de un punto x_0 (el cual, como es sabido y para abreviar, se supone en principio, sea el origen 0), se define su serie formal de potencias al truncar esta serie en el grado k para dar lugar a la k-jet, esto es: $j^k\ f(x) = 1/r!\ f^{(r)}(0)$, la cual es apta para representar funciones polinómicas $j^k(f)$:R→R converja o nó la serie de Taylor. Se dice que una función f está k-determinada, si cualquier otra función con el mismo desarrollo de grado k, es del "mismo tipo".
Lo expresado es generalizable a toda función regular $f:R^n \rightarrow R^n$.
En general, para poder maniobrar con jets se llevan a cabo operaciones algebraicas truncadas y se hace uso de técnicas de cambios de coordenadas, siendo además importante restringir el tipo de cambio para que la información que interese no sea destruida. Por ello, los cambios deben ser regulares y reversibles, para lo cual el término técnico requerido es precisamente es el de difeomorfismo.
El hecho de mayor importancia en las aplicaciones físicas y matemáticas es el de la *clasificación de puntos críticos.* Un lema debido a M. Morse clasifica los puntos críticos para cualquier número de variables, pudiendo

---

[78] Un difeomorfismo es una transformación con derivada continua e inyectiva. Cuando haya lugar, será necesario presuponer que "dos catástrofes son equivalentes, si una puede transformarse en la otra mediante un difeomorfismo de las variables de control seguido de un difeomorfismo de las variables de estado por cada punto del espacio de control".

desarrollarse dicho lema para puntos críticos "*nasty*" en el caso de una sola variable. Mediante una generalización de la prueba del lema de Morse se ha logrado obtener un extraordinario resultado denominado lema *splitting* el cual, si se cumplen ciertas circunstancias, permite la reducción del número de variables de determinados problemas.
Los puntos críticos de Morse tienen una notable propiedad de *estabilidad* que, intuitivamente, puede ser identificada como conservación del tipo ante la acción de pequeñas perturbaciones. Aunque esta propiedad puede constatarse algebraicamente, llega a ser más clarificadora si se reformula como una propiedad de transversalidad geométrica. Esto conduce a una visión geométrica que explota argumentos de transversalidad.
El lema de Morse permite asimismo, con el uso de cambios de coordenadas, reducir funciones a formas más simples de las mismas. En particular, en el entorno de un punto crítico no degenerado, una función $f:R^n \rightarrow R$ puede, mediante un cambio de coordenadas adecuado, ponerse en forma standard simple.
En el caso más simple de una función regular $f:R \rightarrow R$, tal que $f(0)= f'(0)= f''(0)=\ldots= f^{(k-1)}(0) = 0$, pero $f^{(k)}(0)$ distinta de cero, existe un cambio local regular de coordenadas, en virtud del cual f adquiere la forma:

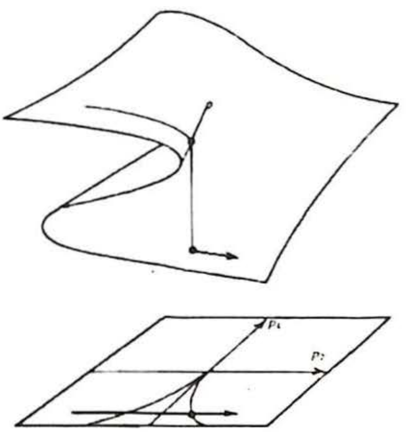
$$x^k \quad (k \text{ impar})$$
$$\pm x^k \quad (k \text{ par}) \quad ,$$

el último de los cuales tiene el signo de $f^{(k)}(0)$.
La antes anunciada generalización del lema de Morse que dio lugar al lema *splitting* de mayor alcance, afirma explícitamente, que el comportamiento de una función regular $f:R^n \rightarrow R$ en el entorno de un punto crítico degenerado cuyo hessiano tiene rango r (y corrango n-r), puede determinarse estudiando una función que incluye un número de variables igual al corrango del hessiano. Esto quiere decir que, por ejemplo, un punto crítico de una función de 2017 variables, de corrango tres, requiere solamente estudiar una función de tres variables. Esa reducción a un pequeño número de variables, es lo que hace sumamente útil al lema splitting (para más detalles sobre ésta y otras cuestiones, puede consultarse T. Poston y I.A. Stewart, *Catastrophe Theory and its Applications*, **ibid**, especialmente los capítulos 3, 4, 6, 8 y 9).

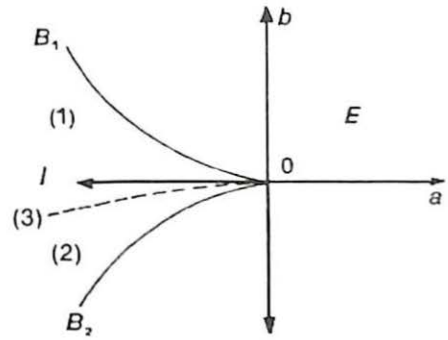
(3) Haciendo un esquema de la superficie $4x^3+ 2p_1 x +p_2 =0$, se tiene el conjunto de valores de equilibrio de (x,p_1,p_2) para el sistema considerado [79]. Si el estado del sistema viene representado por un punto en el espacio (de

[79] La primera de las **figuras** adjuntas se ha reproducido de P.T. Saunders, *Una introducción a la teoría de catástrofes*, **ibíd.**, p.14; la segunda, de R. Thom, *Paraboles et catastrophes*, **ibíd.**, p. 77.

fase) tridimensional con x,p_1,p_2 como coordenadas, el punto (*fase*) tiene que caer siempre en la superficie. De hecho, debe encontrarse siempre, sea en la hoja superior o en la inferior, ya que la hoja intermedia corresponde a equilibrios inestables. La situación del punto P está representada por un punto del plano (p_1,p_2) (plano de control). Al cambiar de valor las variables p_1, p_2 , este punto describe un camino que se llama "trayectoria de control". Al mismo tiempo, el punto se mueve a lo largo de una trayectoria en la superficie de equilibrio, directamente por encima de la trayectoria de control.



La superficie de equilibrio y el conjunto de bifurcación de la catástrofe en cúspide.



Parábola semicúbica de ecuación $4a^3+27b^2=0$ en el plano de control (a,b). En la región *I* la línea punteada (3) que sale del origen = 0 indica los puntos de catástrofe (este es el estrato de conflicto entre las dos regiones (1) y(2).

Variaciones regulares en la p_1 y en la p_2 producen siempre variaciones regulares en la x. Las únicas excepciones ocurren cuando la trayectoria de control *cruza* el conjunto de bifurcación $4\ a^3 + 27\ b^2 = 0$, que es la proyección en el plano (p_1,p_2) de los pliegues de la superficie de equilibrio. Si el punto resulta estar en el lado de la superficie que termina en ese punto (doblándose hacia atrás para formar la hoja central), entonces tiene que "saltar" a la otra hoja. Esto da lugar a un cambio repentino en la variable x.