matematicalia
revista digital de divulgación matemática

CIENCIA

Volumen 7, núm. 4 (diciembre 2011)
7 páginas

http://www.matematicalia.net
ISSN: 1699-7700

Recibido: 11 de enero de 2012
Publicado: 01 de febrero de 2012

¿Modelos deterministas o estocásticos?

Fernando Vadillo
Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística e Investigación Operativa
e-mail: fernando.vadillo@ehu.es
página web: http://www.ehu.es/~mepvaarf

Resumen

Los novedosos modelos estocásticos, su análisis matemático y la aproximación numérica de las soluciones están apareciendo en muchas áreas científicas y técnicas. Una cuestión importante es su comparación con los anteriores modelos deterministas: ¿son mejores aproximaciones de la realidad? En este breve artículo se trata de responder a esta cuestión para un modelo sencillo de Lotka-Volterra.

1. Introducción

La revolución computacional que ha modificado nuestros hábitos de vida también modifica y amplia las utilidades matemáticas. Una nueva disciplina conocida como *Computational Mathematical Modelling* (CMM), basada en resolver modelos matemáticos usando las computadoras, se extiende de forma espectacular por todas las disciplinas: biología, medicina, química, economía, mercados financieros... Cada vez son más frecuentes las reuniones y publicaciones científicas que se ocupan de estos temas, y parece evidente que la *Trilogía Universal*:

- modelización,
- análisis,
- control

que expuso el profesor Jacques-Louis Lions en [8] es una de las herramientas fundamentales en el desarrollo de todas las disciplinas científicas.

Una de las ampliaciones más espectaculares son los nuevos modelos estocásticos, es decir, modelos con resultados inciertos que utilizan variables aleatorias. Son modelos que simulan procesos en numerosas áreas científicas y técnicas (véase, por ejemplo, [1, 2, 3, 5]). Los modelos estocásticos son muy difíciles de tratar matemáticamente, por lo que se suelen estudiar numéricamente mediante ordenadores. Los métodos numéricos habituales son algoritmos que dependen de generadores de números aleatorios; para cada ensayo la sucesión de dichos números es diferente, por lo que el resultado también es distinto y para sacar conclusiones se necesita calcular estadísticos de muchos ensayos.

Con el presente breve artículo, se trata de conocer si los novedosos modelos estocásticos son o no mejores aproximaciones de la realidad. Evidentemente no se conoce la respuesta en todas las situaciones, aunque se tratará de extraer algunas conclusiones en un modelo sencillo de depredador-presa de Lotka-Volterra, analizando y comparando las dos versiones: determinista y estocástica.

Para finalizar, una justificación: en el texto no se han incluido los programas en MATLAB© ya que, aun siendo cortos, precisan de conocimientos que no son necesarios para seguir el resto del artículo. De todas maneras, los programas fuente están a disposición de cualquier lector interesado.

2. El modelo clásico de Lotka-Volterra

Finalizada la primera guerra mundial, el biólogo italiano Umberto D'Arcona observó en el mar Adriático una comunidad dominada por dos especies, una presa y otra depredadora, con la sorpresa de una alta densidad de los cazadores y no así de las presas, ello a pesar de las escasas capturas de los pescadores movilizados durante la contienda. D'Arcone no encontró explicación biológica al hecho de que la baja explotación pesquera sólo beneficiara a una de las dos especies, por lo que consultó con el matemático Vito Volterra, quien formuló en 1931 el modelo que lleva su nombre. Este modelo también lleva el nombre del químico inglés Lotka, quien en 1925 formuló un modelo parecido en el estudio de las concentraciones periódicas de algunos productos en ciertas reacciones químicas.

El modelo matemático de Lotka-Volterra consiste en dos ecuaciones diferenciales que dependen de unos ciertos parámetros. Los detalles son muy conocidos y se pueden consultar en muchos libros de texto; algunas lecturas recomendables son el capítulo 4 de [11], el párrafo 57 de [13] o el capítulo 3 de [10], que es un texto obligado en esta disciplina.

Para simplificar la exposición se considera sólo un parámetro α , con lo que resulta:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = 2r - \alpha r f, \\ \\ \dfrac{df}{dt} = -f + \alpha r f, \end{cases} \tag{1}$$

donde t es el tiempo, $r(t)$ es el número o concentración de presas –que serán conejos (*rabbits*)–, y $f(t)$ es el número o concentración de depredadores –que podrían ser zorros (*foxes*)–. El parámetro α mide cómo interactúan las dos especies: cuando α =0 no se encuentran y los zorros desaparecen, mientras que cuando $\alpha > 0$ los zorros encuentran a los conejos con una probabilidad proporcional al producto de sus poblaciones.

La solución de este sistema no se puede expresar en términos de funciones conocidas, y sólo cabe hacer dos cosas:

a) Deducir algunos comportamientos cualitativos.

b) Aproximar numéricamente las soluciones.

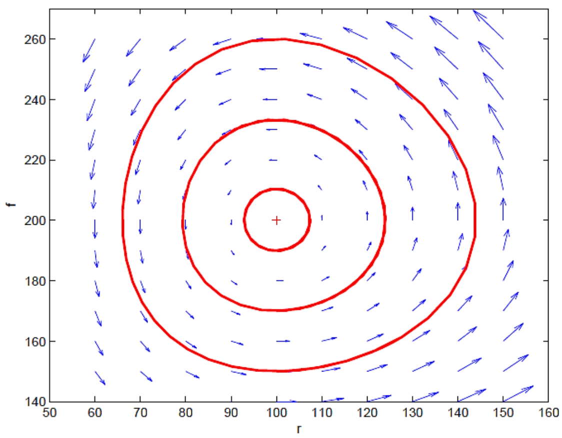


Figura 1. Plano de fases para $\alpha = 0.01$.

El comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema anterior se explica en los textos antes citados. De forma muy breve, tal y como se puede apreciar en la Figura 1, el sistema tiene un punto fijo en el punto $(1/\alpha, 2/\alpha)$, es decir, las poblaciones no se modifican con el tiempo, y en torno a dicho punto las soluciones son órbitas cerradas y periódicas que se van trazando en sentido contrario a la agujas del reloj. Esta gráfica se obtuvo resolviendo numéricamente el sistema con Matlab©, tal como se explica en las referencias [4, 9, 12].

Este modelo clásico de Lotka-Volterra que describe el comportamiento oscilatorio de las dos poblaciones parece lógico, porque si la población de presas crece se fomenta el crecimiento de los depredadores, mientras que con un mayor número de éstos la cantidad de presas disminuye. Sin embargo, cuesta creer que el modelo sirva para representar poblaciones reales; por ejemplo, nadie cree que en ausencia de depredadores la población de presas crecerá exponencialmente. De hecho, el propio Volterra propuso modificaciones de su modelo que corregía algunos defectos. En la bibliografía anterior se analiza alguno de estos modelos, que no consideraremos aquí.

3. El modelo estocástico de Lotka-Volterra

En el modelo estocástico para el problema depredador-presa, $R(t)$ y $F(t)$ son variables aleatorias que miden el tamaño de las dos poblaciones. Para un intervalo de tiempo Δt muy pequeño se suponen definidos los incrementos poblacionales:

$$\begin{aligned}\Delta R &= R(t+\Delta t) - R(t),\\ \Delta F &= F(t+\Delta t) - F(t),\end{aligned}$$

para los que se deduce la siguiente ley de probabilidades:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Prob}\left\{\Delta R = 1, \Delta F = 0\right\} &= 2R(t)\Delta t + \mathbf{o}(\Delta t),\\
\mathrm{Prob}\left\{\Delta R = 0, \Delta F = 1\right\} &= \alpha R(t)F(t)\Delta t + \mathbf{o}(\Delta t),\\
\mathrm{Prob}\left\{\Delta R = -1, \Delta F = 0\right\} &= \alpha R(t)F(t)\Delta t + \mathbf{o}(\Delta t),\\
\mathrm{Prob}\left\{\Delta R = 0, \Delta F = -1\right\} &= F(t)\Delta t + \mathbf{o}(\Delta t),\\
\mathrm{Prob}\left\{\Delta R = 0, \Delta F = 0\right\} &= 1 - P(t)\Delta t + \mathbf{o}(\Delta t),\\
\mathrm{Prob}\left\{\text{otros valores}\right\} &= \mathbf{o}(\Delta t),
\end{aligned}$$

donde $P(t) = 2R(t) + F(t) + 2\alpha R(t)F(t)$ para que la suma salga 1, y la expresión $\mathbf{o}(\Delta t)$ representa términos en Δt de orden mayor que uno y, por tanto, despreciables cuando Δt es suficientemente pequeño.

Para obtener las ecuaciones diferenciales estocásticas se debe calcular las esperanzas matemáticas de las dos variables aleatorias $\Delta R(t)$ y $\Delta F(t)$. Siguiendo la referencia [1], resulta:

$$\begin{aligned}E(\Delta R(t)) &\approx R(t)\big(2 - \alpha F(t)\big)\Delta t,\\ E(\Delta F(t)) &\approx F(t)\big(\alpha R(t) - 1\big)\Delta t.\end{aligned}$$

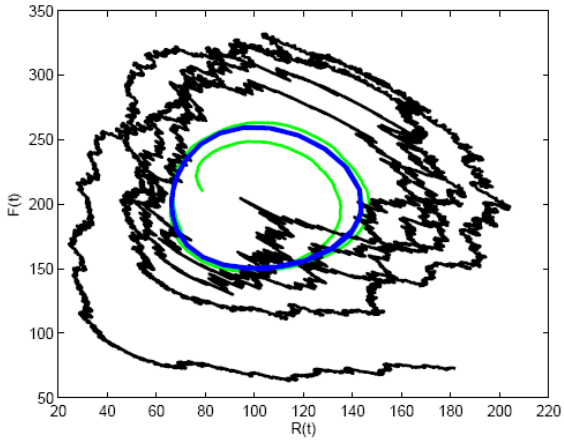


Figura 2. $R(0)=100,\ F(0)=150$. Solución determinista en azul, un camino aleatorio en negro para $0 \le t < 20$, y la media de cien caminos aleatorios en verde para $0 \le t \le 12$.

Técnicamente, lo más complicado y laborioso es calcular la matriz de covarianza de las dos variables aleatorias $\Delta R(t)$ y $\Delta F(t)$. Sin entrar en los detalles (que se pueden consultar en [1] ó [2]), se obtiene que:

$$\mathbf{Cov}(\Delta R(t), \Delta F(t)) \approx \begin{pmatrix} R(t)(2+\alpha F(t)) & 1 \\ 1 & F(t)(\alpha R(t)+1) \end{pmatrix} \Delta t.$$

Finalmente, usando el teorema del límite central se concluye que cuando $R(t)$ es grande y Δt suficientemente pequeña, la variable aleatoria $\Delta R(t)$ se aproxima a una distribución normal de media $R(t)\left(2-\alpha F(t)\right)\Delta t$ y varianza $R(t)(2+\alpha F(t))\Delta t$, es decir:

$$\Delta R(t) \sim N\left(R(t)(2-\alpha F(t))\Delta t, R(t)(2+\alpha F(t))\Delta t\right),$$

y lo mismo para la otra variable aleatoria $\Delta F(t)$:

$$\Delta F(t) \sim N\left(F(t)\left(\alpha R(t)-1\right)\Delta t, F(t)(\alpha R(t)+1)\Delta t\right).$$

Estos resultados teóricos se pueden aprovechar numéricamente de la siguiente forma: suponiendo que Δt es suficientemente pequeño, se puede escribir las ecuaciones para avanzar de t a $t+\Delta t$ siguientes:

$$R(t+\Delta t) \approx R(t) + R(t)(2-\alpha F(t))\Delta t + \sqrt{R(t)(2+\alpha F(t))}\sqrt{\Delta t}\cdot \eta_1,$$
$$F(t+\Delta t) \approx F(t) + F(t)\left(\alpha R(t)-1\right)\Delta t + \sqrt{F(t)(\alpha R(t)+1)}\sqrt{\Delta t}\cdot \eta_2,$$

donde $\eta_1 \sim N(0,1)$ y $\eta_2 \sim N(0,1)$, es decir, son dos variables aleatorias normales de media cero y varianza uno, que se simulan numéricamente con los generadores de números aleatorios; en MATLAB© se usa el comando “randn”. En realidad, este proceso iterativo es simplemente el método de Euler aplicado a una ecuación diferencial estocástica (ver por ejemplo el clásico [6], ó también [7]).

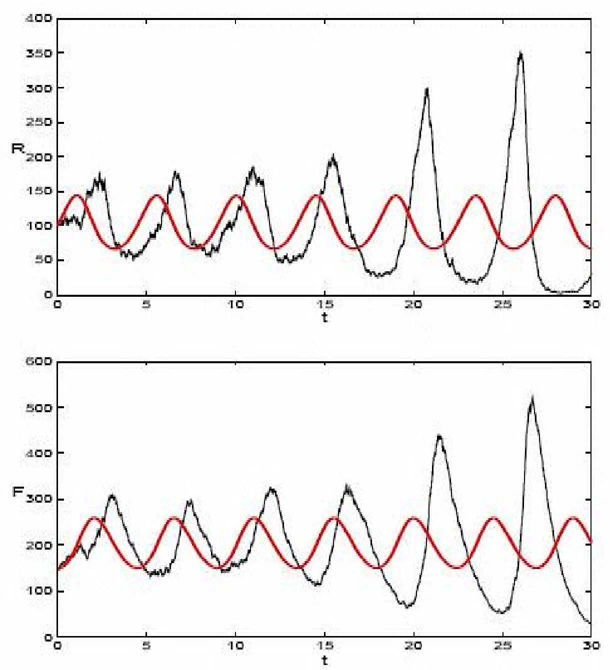


Figura 3. Evolución de las poblaciones de conejos y zorros.

Si se observa la parte determinista de las ecuaciones, que es el factor multiplicado por Δt, se apreciará que coincide con el modelo determinista (1) salvo en el nombre de las variables: las mayúsculas han reemplazado a las minúsculas. Esto significa que, en realidad, sólo se han añadido términos estocásticos al modelo determinista sumando lo que se conoce como un *"white noise"* ("ruido blanco"). En la Figura 2 se pueden comparar la solución determinista, una trayectoria aleatoria y la media de cien trayectorias para $R(0)=100, F(0)=150$. La solución determinista es eterna, pero la órbita media (coloreada en verde) desaparece poco después de $t=12$.

En la Figura 3 se compara la evolución de las poblaciones de conejos y zorros, respectivamente, del modelo determinista (en color rojo) y un ensayo del modelo estocástico (en color negro); como en caso anteriores, $\alpha = 0.01$. Las dos trayectorias estocásticas se aproximan a las deterministas, aunque a medida que transcurre el tiempo se van separando: en los resultados estocásticos las oscilaciones son más amplias, con seudo-periodos más largos. De hecho, se observa que en algún momento se anulará algunas de las dos poblaciones, lo que provoca una ruptura del modelo. Si desaparecen los conejos los zorros están condenados a extinguirse, y, por contra, si no hubiera zorros la población de conejos aumentaría exponencialmente, en cuyo caso la mixomatosis resolverá el problema.

En la Figura 4 se han representado en color verde las medias resultantes en 500 ensayos. Su coincidencia al principio con las soluciones deterministas, coloreadas en rojo, parece confirmar que se trata del mismo problema, si bien las trayectorias se van separando con el tiempo. Las otras líneas más oscilantes representan los dos primeros cuartíles de los resultados en los 500 ensayos; esto significa que el 50% de los ensayos se encuentra en esa franja.

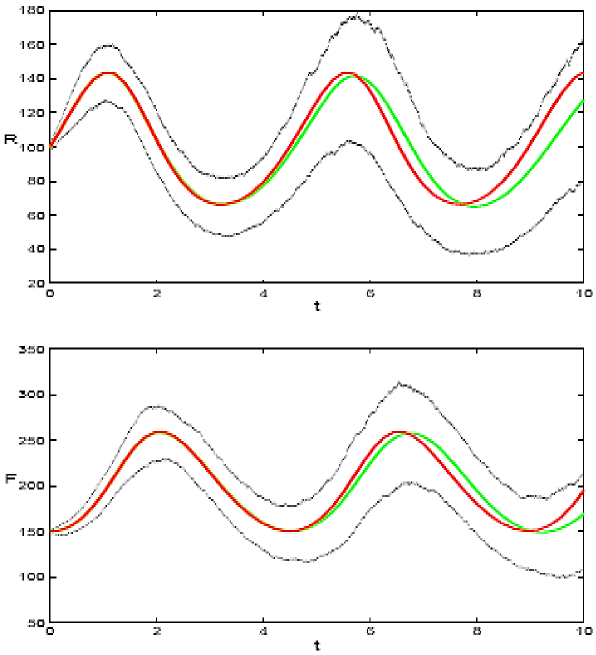


Figura 4. Evolución de las medias de poblaciones de conejos y zorros.

4. Algunos comentarios finales

Para alcanzar algunas conclusiones se debe tener en cuenta la diferencia en los paradigmas de partida. Mientras que conocida la situación de un sistema determinista en un instante inicial se puede determinar su estado en cualquier momento, en los modelos estocásticos los resultados son inciertos y sólo se puede hablar de ensayos y calcular medias, desviaciones típicas...

Parece que se volviera a la polémica entre azar y determinismo que provocó la controversia entre Thom y Prigogine. René Thom, famoso matemático francés, creador de la discutida teoría de catástrofes y medalla Fields en 1958, sostiene que, puesto que la naturaleza de la ciencia es la propuesta de leyes, cualquier estudio científico desembocará necesariamente en una formulación determinista. Por su parte, el físico nacionalizado francés de origen ruso Ilya Prigogine, premio Nobel de Química en 1977, defiende la irreversibilidad de los fenómenos que afectan a los seres vivos. En esta polémica quizá los modelos estocásticos den un poco la razón a ambas partes: es imposible retroceder en el tiempo, pero también el proceso aleatorio se puede analizar matemáticamente.

Para finalizar, una reflexión personal. La oscilación perpetua que pronostica el modelo determinista parece poco creíble. Recuerda la leyenda homérica de Sísifo, condenado perpetuamente a empujar por la ladera empinada, cuesta arriba, una piedra que antes de alcanzar la cima siempre rueda hacia abajo. El modelo estocástico parece más realista porque, si bien comienza oscilando, desaparece razonablemente transcurrido un periodo de tiempo. La sabia naturaleza, eso que modernamente se ha dado en denominar medio ambiente, evoluciona sin cesar. Como ya dijo hace 2500 años el filósofo Heráclito: *Todo cambia, nada es.*

Referencias

[1] a b c E. Allen: *Modelling with Itô Stochastic Differential Equations.* Springer, 2007.

[2] a b L.J.S. Allen: *An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology*. Pearson-Prentice Hall, 2003.

[3] ^ V. Capasso, D. Bakstein: *An Introduction to Continuous-Time Stochastic Processes: Theory, Models, and Applications to Finance, Biology, and Medicine*. Birkhäuser, 2005.

[4] ^ D.J. Higham, N.J. Nigham: *MATLAB Guide.* SIAM, 2000.

[5] ^ F.C. Klebaner: *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. Imperial College Press, 2005.

[6] ^ P.E. Kloeden, E. Platen: *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Cambridge University Press, 1998.

[7] ^ P.E. Kloeden, E. Platen, H. Schurz: *Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments*. Springer, 1994.

[8] ^ J.-L. Lions: *El Planeta Tierra. El papel de las Matemáticas y de los superordenadores*. Instituto de España - Espasa Calpe, 1999.

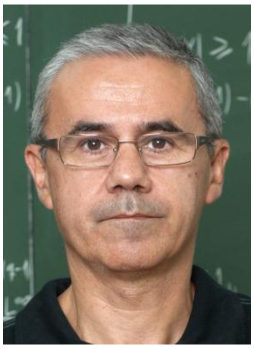
[9] ^ C.B. Moler: *Numerical Computing with MATLAB*. SIAM, 2004.

[10] ^ J.D. Murray: *Mathematical Biology I: An Introduction*. Springer, 2002.

[11] ^ G.F. Simmons: *Ecuaciones diferenciales, con aplicaciones y notas históricas* (segunda edición). McGraw-Hill, 1993.

[12] ^ I.F. Shampine, I. Gladwell, S. Thompson: *Solving ODEs with MATLAB*. Cambridge University Press, 2003.

[13] ^ J.L. Romero, C. García: *Modelos y sistemas dinámicos.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, 1998.



Sobre el autor

Fernando Vadillo es doctor en Matemáticas por la Universidad de Valladolid (1985). Desde enero de 1988 es profesor titular de Matemática Aplicada en el Departamento de Matemática Aplicada y Estadística e Investigación Operativa de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad del País Vasco. Investiga en la resolución numérica de ecuaciones en diferencias, sobre lo que ha publicado en revistas especializadas.