NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 96, noviembre de 2017, páginas 103-117

Siguen los problemas, pero resolvemos algunos.

(Problemas Comentados XLVII)

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen Enunciados y soluciones de problemas propuestos en los Torneos para Primaria y Secundaria organizados por la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas, siguiendo las fases de comprender, pensar, ejecutar y responder (analizando, comprobando y respondiendo) y usando distintos métodos de resolución: organizando la información en tablas de doble entrada, por modelización, usando ensayo y error, algebraicamente o geométricamente. Planteamos nuevos ejercicios en la misma línea.

Palabras clave Resolución de problemas. Fases en la resolución de problemas. Métodos de resolución de problemas. Torneos (Olimpiadas) para Primaria y Secundaria.

Abstract Statements and solutions to problems proposed in the Primary and Secondary Tournaments organized by the Canary Island Society "Isaac Newton" of Mathematics Teachers, following the phases of understanding, thinking, executing and responding (analyzing, checking and responding) and using different methods of resolution: organizing the information in double entry tables, by modeling, using trial and error, algebraically or geometrically. We propose new exercises in the same line.

Keywords Problem resolution. Phases in problem solving. Methods of solving problems. Tournaments (Olympics) for Primary and Secondary.

Como siempre, comenzamos nuestro artículo resolviendo los problemas propuestos en el anterior. Recordarán que los primeros procedían de los Torneos de Resolución de Problemas que organiza la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas. El primero se corresponde con el Torneo de Primaria y los dos siguientes con el Torneo de Secundaria.

Estos son nuestros comentarios sobre los mismos.

VIAJE POR ITALIA

Aldo y Bruno organizan un viaje por Italia en bicicleta. Bruno ha planeado recorrer 50 kilómetros por día. Aldo está planeando viajar 50 km en el primer día y aumentar la distancia recorrida 1 km cada día. En otras palabras, recorrerá 50 km en el primer día, 51 el segundo, 52 el tercero, y así sucesivamente. Bruno parte el 1 de abril, Aldo parte el 3 de abril. **¿En qué día Aldo alcanzará a Bruno? (En la respuesta indica la fecha del día)**

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

Sociedad Canaria *Isaac Newton*
de Profesores de Matemáticas

RESOLUCIÓN.

Fase I. Comprender

Datos: A y B organizan un viaje; B recorre 50 km por día; A recorre 50 km en el primer día y aumenta 1 km cada día (es decir, recorrerá 50 km en el primer día, 51 el segundo, 52 el tercero, y así sucesivamente); Bruno parte el 1 de abril, Alfredo parte el 3 de abril.

Objetivo: ¿En qué día Alfredo alcanzará a Bruno? (En la respuesta indica la fecha del día)

Relación: A viaja más rápido que Bruno y lo alcanzará.

Diagrama: Una tabla o dos diagramas rectilíneos paralelos.

Fase II. Pensar

Estrategia: ORGANIZAR LA INFORMACIÓN

Fase III. Ejecutar

Podemos hacer una búsqueda **exhaustiva**. Para ello diseñamos la tabla.

kilómetros				
A	Total de A	B	Total de B	Día
0	0	50	50	1 de abril
0	0	50	100	2 de abril
50	50	50	150	3 de abril
51	101	50	200	4 de abril
52	152	…	…	…

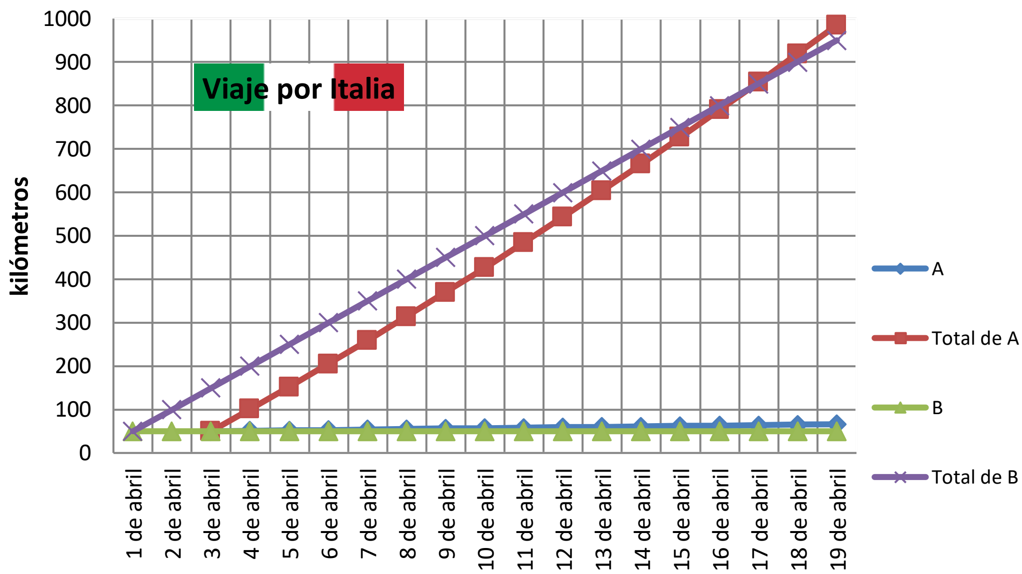
Y la completamos.

kilómetros				
A	Total de A	B	Total de B	Día
0	0	50	50	1 de abril
0	0	50	100	2 de abril
50	50	50	150	3 de abril
51	101	50	200	4 de abril
52	152	50	250	5 de abril
53	205	50	300	6 de abril
54	259	50	350	7 de abril
55	314	50	400	8 de abril
56	370	50	450	9 de abril
57	427	50	500	10 de abril
58	485	50	550	11 de abril
59	544	50	600	12 de abril
60	604	50	650	13 de abril
61	665	50	700	14 de abril
62	727	50	750	15 de abril

63	**790**	**50**	**800**	**16 de abril**
64	**854**	**50**	**850**	**17 de abril**

En este momento la distancia recorrida por Alfredo, que al principio del día era inferior, resulta mayor que la de Bruno. Lo habrá alcanzado en algún momento del día 17 de abril.

Otra manera es la de representar los valores de los kilómetros recorridos por cada uno, día a día, y comprobar cuando se cruzan los caminos.



También podemos realizar un cálculo **aritmético** y usar la prueba y error.

Cuando parte A, B ha recorrido ya 100 km, el equivalente a dos días. A partir de este momento A va avanzando cada vez más rápido, sumando kilómetros de la manera indicada en el problema. O sea:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = 100$$

Faltará por determinar cuántos sumando son necesarios para igualar o superar esos 100 km de diferencia. Para averiguar ese número podemos proceder mediante un cálculo exhaustivo o por Ensayo y Error.

Supongamos que elegimos 10 para ese número.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = (1 + 10) \times 5 = 11 \times 5 = 55$$

Nos quedamos cortos. Podemos hacer una segunda prueba para 16.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = (1 + 16) \times 8 = 17 \times 8 = 136$$

Nos pasamos. Haremos un tercer ensayo para 15.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = (1 + 15) \times 7 + 8 = 16 \times 7 + 8 = 112 + 8 = 120$$

Seguimos pasando. Ensayamos para el 14.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = (1 + 14) \times 7 = 15 \times 7 = 105$$

En este momento lo acaba de pasar. Si probáramos con 13 la distancia recorrida no sería suficiente.

$$(1 + 13) \times 6 + 7 = 14 \times 6 + 7 = 84 + 7 = 91.$$

Así que después de 14 días de salir Alfredo habrá alcanzado a Bruno. Es decir, el día 17 de abril.

O podemos realizar un cálculo **algebraico**. Para ello habremos de basarnos en una pequeña investigación sobre la suma de los términos de la sucesión 1 + 2 + 3 + 4 + …

Para un número par de términos: $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = (n + 1)\, n / 2$

Como ese resultado ha de ser igual o superior a 100, y el primer valor de n es 0, planteamos la desigualdad:

$$(n - 1)\, n / 2 \geq 100 \longrightarrow n^2 - n \geq 200 \longrightarrow n \geq 14.65,$$

que al sumar los dos primeros días ya recorridos por Bruno, nos conduce al 17 de abril, en un momento de ese día que equivale a 0.65 de las 24 horas, o sea, sobre las tres y diez de la tarde del 17 de abril.

También podemos plantear un sistema de ecuaciones:

Llamamos K_a a los kilómetros recorridos por Aldo en n días desde el 1 de abril y K_b a los recorridos por Bruno. Entonces:

$$K_a = 50n + (n-1)n/2, \text{ y } K_b = 100 + 50n, \text{ e igualando:}$$

$50n + n^2/2 – n/2 = 100 + 50\,n \longrightarrow n^2 – n = 200$, y resolviendo la ecuación de 2º grado, obtenemos $n = 14.65$.

Evidentemente, estamos en unas maneras de resolver el problema adecuadas a los alumnos de 3º o 4º de E.S.O. para diferentes momentos del currículo. Así que es un problema con posibilidades.

Solución: Lo alcanzará el **17 de abril.**

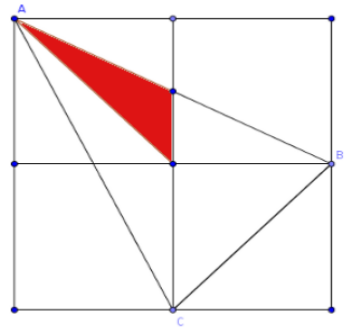
Fase IV. Responder

Comprobación: El trabajo cuidadoso con la tabla o la gráfica, nos permite comprobar la corrección de la respuesta.

Análisis: Solución única. Es interesante hacer observar a los alumnos que, en la mayoría de los problemas de este tipo en la vida real, el alcance no se realiza de manera exacta sino que se produce en algún momento de un intervalo determinado.

Respuesta: **Alfredo alcanzará a Bruno el 17 de abril.**

JARDÍN MATEMÁTICO



En el dibujo aparece el plano del jardín cuadrado que se va a construir en la entrada de la Casa Museo de las Matemáticas.

La zona coloreada, que está encerrada en uno de los cuatro cuadrados en los que está dividido, y tiene un lado que es la diagonal y otro que es la mitad del lado de ese cuadrado, mide 5 m^2 y es la zona que está plantada ya de rosales.

El triángulo ABC, limitado por el vértice superior izquierdo, y la mitad de los dos lados opuestos del jardín, será la superficie que ocuparán todos los rosales cuando esté acabado el jardín.

Calcula la superficie del jardín completo y también la superficie de la zona donde irán los rosales.

Razona tu respuesta.

COMENTARIO:

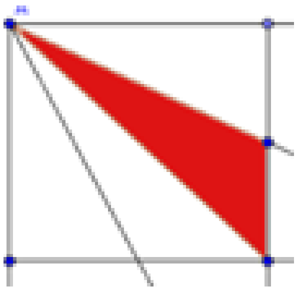
Los datos no son solamente las medidas (5 m^2 del triángulo coloreado) sino también los elementos de las figuras mencionadas. Cuadrado dividido en cuatro cuadrados más pequeños mediante las líneas paralelas a los lados que unen sus puntos medios. Triángulo isósceles ABC formado por un vértice y los dos puntos medios de los lados no incidentes en ese vértice. El triángulo coloreado de rojo, parte del ABC, con vértices en el superior de ese triángulo, vértice opuesto del cuadrado pequeño y punto medio del lado opuesto.

Para que los alumnos trabajen adecuadamente y sean capaces de apreciar todas las propiedades que tienen cada figura y cada uno de sus elementos, se deberá trabajar mediante una modelización adecuada: representación sobre un geoplano y construcción en papel (para poder recortar los triángulos más pequeños) de las figuras.

Están claros los dos objetivos: superficie del cuadrado original y del triángulo ABC.

Las relaciones vendrán dadas en función del cálculo de esas áreas, es decir, figuras que están en el diagrama y las medidas de sus superficies en función de las relaciones entre sus lados.

La estrategia serán la MODELIZACIÓN y ORGANIZAR LA INFORMACIÓN de manera conjunta.

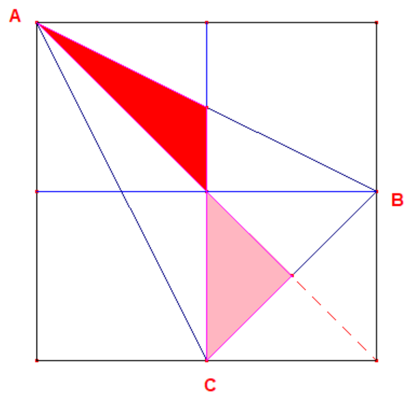


El alumno deberá darse cuenta que los cuatro triángulos que se forman en el cuadrado pequeño de la parte superior izquierda tienen un vértice común, el A, y sus bases son la mitad de la medida de los lados de ese cuadrado; además puede apreciar que las alturas de los cuatro triángulos son los lados del mismo cuadrado pequeño. Eso nos indica que los cuatro triángulos tienen la misma área, 5 m^2 cada uno de ellos. También se puede hacer un cálculo directo del área del triángulo coloreado en función de los lados del cuadrado pequeño; se puede ver así que, como es un triángulo que tiene la altura total del cuadrado y de base la mitad del lado, su área es

S = 1/2 (lado) x (1/2 lado) = 1/4 $(\text{lado})^2$, o sea, una cuarta parte del área del cuadrado pequeño.

El área del cuadrado pequeño es cuatro veces 5 m^2, es decir, 20 m^2. Y el área del cuadrado grande es cuatro veces la del cuadrado pequeño, es decir, 4 x 20 = 80 m^2.

Para trabajar con el triángulo ABC, convendría ahora prolongar el lado del triángulo rojo situado sobre la diagonal. Así, cuando llegue al lado desigual del isósceles ABC, tendremos abajo dos triángulos iguales, siendo seis los triángulos pequeños en que está dividido el ABC.



Esos seis triángulos tienen la misma área que el rojo, aunque tengan formas diferentes. Se puede llegar a esa conclusión de diversas formas, basadas siempre en la manera de calcular sus áreas en función de la base y la altura de cada uno, o bien, de su relación con respecto al área de un cuadrado pequeño.

En conclusión, a partir de esa constatación de que los seis triángulos tienen la misma área, siendo uno de ellos el rojo, podremos concluir que el área que ocuparán al final los rosales (triángulo ABC) es de 5 x 6 = 30 m^2.

Otra manera posible de ver el valor de la superficie del triángulo ABC consiste en apreciar en la figura que si quitamos dicho triángulo del cuadrado grande, nos quedan tres triángulos, dos de ellos (situados a los lados) iguales entre sí y con área igual (cada uno de ellos) a la de un cuadrado pequeño. Mientras que el tercer triángulo, situado bajo la base del triángulo, mide la mitad del área de un cuadrado pequeño. Es decir, su superficie es 2,5 x 20 = 50 m^2. Y restando del valor total del cuadrado grande: 80 – 50 = 30 m^2, que coincide con lo calculado anteriormente.

NUMB3RS

Cuando paseaban por la ciudad tres amigos, observaron que el conductor de un automóvil infringió el reglamento de tráfico. Ninguno de los tres recordaba el número (de cuatro cifras) de la matrícula, pero como al menos uno de los tres era matemático, cada uno de ellos advirtió alguna particularidad de dicho número.

Larry advirtió que las dos primeras cifras eran iguales.

Amita se dio cuenta de que también coincidían las dos últimas cifras.

Y, por último, Charlie aseguraba que todo el número de cuatro cifras era un cuadrado exacto.

¿Puede determinarse el número de la matrícula del automóvil valiéndose tan sólo de estos datos?

Explica detalladamente tu razonamiento.

COMENTARIO:

Los alumnos llegan rápidamente a la conclusión de que el número ha de ser del tipo **aabb**.

A partir de ahí, la tercera condición o relación la utilizan para encontrar por ENSAYO Y ERROR el valor de la matrícula. No es un método eficaz ni rápido pero, si se dispone de tiempo y comienzan de mayor a menor, son capaces de encontrar la solución. Algunos utilizan un ENSAYO Y ERROR DIRIGIDO, mediante el uso de propiedades de las potencias que recuerdan o deducen. Eso les da la solución con más rapidez que en el caso anterior.

Pocos son los que razonan utilizando la divisibilidad.

Si expresamos como descomposición decimal el número aabb, tendremos:

$$1000\ a + 100\ a + 10\ b + b = 1100\ a + 11\ b = 11\ (100\ a + b)$$

Como consecuencia observamos que este número es divisible por 11.

Aplicando criterios de divisibilidad por 11, ya tenemos más datos del número aabb. El más importante consiste en darse cuenta de que al ser un cuadrado exacto y contener el factor 11, deberá contener también el factor 11^2. Es decir, si el número es 11 (100 a + b), también el factor (100 a + b) es divisible por 11.

Como a y b son valores de una cifra (inferiores a 10), deducimos que a + b = 11, para que se cumpla el criterio de divisibilidad por 11.

Buscamos cifras que sumadas den 11. Con el 0 y el 1 no podemos encontrar un valor menor que 10 para la segunda. Obtenemos pues,

$$2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6 = 6 + 5 = 7 + 4 = 8 + 3 = 9 + 2 = 11$$

Los números cuadrados sólo pueden tener como última cifra los valores 0, 1, 4, 5, 6, 9, únicos posibles al elevar al cuadrado la última cifra del número de partida:

$$(0^2 = 0;\ 1^2 = 1;\ 2^2 = 4;\ 3^2 = 9;\ 4^2 = 16;\ 5^2 = 25;\ 6^2 = 36;\ 7^2 = 49;\ 8^2 = 64;\ 9^2 = 81).$$

Como ya hemos descartado los valores de 0 y 1, quedan estos posibles valores:

a = 7 b = 4 → **7744** | a = 6 b = 5 → **6655** | a = 5 b = 6 → **5566** a = 2 b = 9 → **2299**

Hemos reducido las posibilidades a sólo cuatro. Cuatro multiplicaciones que nos darán rápidamente la solución del problema.

O razonar, a partir de sus descomposiciones en factores primos, si contienen los mismos elevados al cuadrado en su totalidad.

El número 6655 es divisible por 5, pero no por segunda vez (6655 : 5 = 1331).

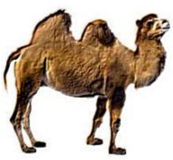
El número 5566 es divisible por 2, pero no por segunda vez (5566 : 2 = 2783).

El número 2299 = 12 x 19 = 2^2 x 3 x 19 no se puede dividir de nuevo ni por 3 ni por 19.

Solamente nos queda 7744 = 2^6 x 11^2 = 8^2 x 11^2 = 88^2 , que es la solución del problema.

Habíamos propuesto también dos problemas del Rally Matemático Transalpino (ya saben lo que nos gustan sus problemas) y les pedíamos que pensaran, de manera especial, en una forma de resolverlos por MODELIZACIÓN.

CAMELLOS Y DROMEDARIOS



Cleopatra ha dibujado camellos y dromedarios, en total ha hecho 23 jorobas y 68 patas. Cleopatra sabe que los camellos

tienen dos jorobas y que los dromedarios tienen sólo una. Luego dibujó un hombre en la grupa de cada camello.

¿Cuántos hombres ha dibujado Cleopatra en total?

Explica cómo encontraste tu respuesta.

Viñeta de Alberto Montt, que une puzles con *camelus*

Datos

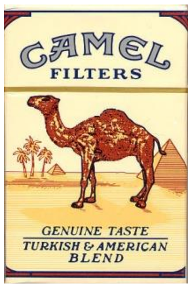
Cleopatra ha dibujado camellos y dromedarios, en total ha hecho 23 jorobas y 68 patas.

Un hombre en la grupa de cada camello.

Objetivo

Cuántos hombres ha dibujado Cleopatra en total.

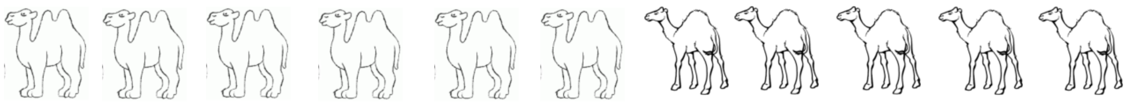
Relación



¿Dromedary o Camel?

Camellos y dromedarios son animales de cuatro patas.

Cleopatra sabe que los camellos tienen dos jorobas y que los dromedarios tienen sólo una.



Luego dibujó un hombre en la grupa de cada camello.

Diagrama

Modelo. Tabla. Partes/Todo.

Estrategia

MODELIZACIÓN; ENSAYO Y ERROR; ORGANIZAR LA INFORMACIÓN

Por **modelización**:

Utilizaremos un modelo consistente en representar los animales con tarjetas de visita (más de 30) o cartas de baraja, las patas con pinzas de tender (68) y las jorobas con peones de juego (23).

Colocaremos las trabas de 4 en 4 sujetas a las tarjetas hasta agotar las trabas. Esos son los animales que hay: 17.

Tomaremos las 23 jorobas y colocaremos 1 en cada animal (todos tienen, al menos, una joroba). Nos sobran 6 jorobas que corresponderán a los 6 camellos existentes. El resto se queda con una sola, son los 11 dromedarios que hay.

Por **ensayo y error**:

P R O B L E M A S

Daremos como dato oculto el que al saber el número de patas podremos saber la cantidad de animales. 68/4 = 17 animales.

Utilizaremos la siguiente tabla:

Camellos	**Animales**	**Dromedarios**	**Jorobas**	**Conclusión**

Haremos un ensayo para los camellos:

Camellos	**Animales**	**Dromedarios**	**Jorobas**	**Conclusión**
10	17	17 – 10 = 7	10 x 2 + 7 x 1 = 27	27 > 23 error

Y continuaremos haciendo ensayos, disminuyendo el número de camellos:

Camellos	**Animales**	**Dromedarios**	**Jorobas**	**Conclusión**
10	17	17 – 10 = 7	10 x 2 + 7 x 1 = 27	27 > 23 error
8	17	17 – 8 = 9	8 x 2 + 9 x 1 = 25	25 > 23 error
6	17	17 – 6 = 11	6 x 2 + 11 x 1 = 23	23 = 23 acierto

La solución es, pues, 6 camellos y 11 dromedarios.

Mediante **organización de la información**:

Representaremos mediante álgebra la situación. Llamamos x al número de camellos e y al número de dromedarios.

Planteamos las ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 23 \\ 4x + 4y = 68 \end{array}\right\}$$

Y resolvemos el sistema que es equivalente al siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 23 \\ x + y = 17 \end{array}\right\}$$

De donde: x = 23 – 17 = 6; y = 17 – 6 = 11.

<u>Solución</u>

6 camellos y 11 dromedarios

<u>Comprobación</u>

6 + 11 = 17; 17 x 4 = 68; 6 x 2 = 12; 11 x 1 = 11; 12 + 11 = 23

Análisis

Solución única. Los hombres se dibujan sobre los camellos. Por tanto, hay tantos hombres como camellos.

Respuesta

Cleopatra ha dibujado 6 hombres

CONCURSO DE PESCA

Alfredo, Carlos y Blas participan en un concurso de pesca. Al terminar el concurso descubren que: Blas ha pescado 7 truchas más que Alfredo; Carlos ha pescado el doble de las truchas pescadas por Blas y que es también el triple de las pescadas por Alfredo.

¿Cuántas truchas ha pescado cada uno de los tres amigos?

Explica tu razonamiento.

Datos

Tres pescadores: Alfredo, Carlos y Blas.

Objetivo

Cuántas truchas ha pescado cada uno de los tres amigos.

Relación

Blas ha pescado 7 truchas más que Alfredo.

Carlos ha pescado el doble de las truchas pescadas por Blas.

Carlos ha pescado el triple de las pescadas por Alfredo.

Diagrama

Modelo. Tabla Partes/Todo

Estrategia

MODELIZACIÓN. ENSAYO Y ERROR. ORGANIZAR LA INFORMACIÓN (mediante aritmética o mediante álgebra)

Mediante **modelización**

Tomamos como modelo tres cartulinas que representarán a cada uno de los tres pescadores. Para Carlos necesitaremos una más. Varias tarjetas iguales que representarán cada una de ellas la cantidad (desconocida) de peces pescados por Alfredo. Fichas en cantidad indeterminada para representar con cada una de ellas una trucha.

En la primera cartulina (Alfredo) colocaremos una tarjeta que representa la cantidad de truchas que pesca.

En la segunda cartulina (Blas) colocaremos una tarjeta igual y siete fichas.

A Carlos lo representaremos dos veces, con dos cartulinas, ya que tenemos dos relaciones diferentes que lo conectan con Blas y con Alfredo.

En la tercera cartulina colocaremos el doble de lo que tiene Blas, es decir, dos tarjetas y 14 fichas.

En la cuarta cartulina colocaremos el triple de lo que tiene Alfredo, es decir, tres tarjetas.

Como ambas representaciones deben ser equivalentes, cancelaremos lo que tienen de igual (dos tarjetas) y compararemos lo que nos queda: una tarjeta y 14 fichas. Esto quiere decir que esa tarjeta vale 14 fichas. O sea, Alfredo pescó 14 truchas.

A partir de esa solución averiguamos las truchas pescadas por Blas (21) y por Carlos (42).

Mediante **ensayo y error**

Elaboramos una tabla simple que represente la situación de los tres pescadores:

Alfredo	Blas (A + 7)	Carlos (2 x B)	Carlos (3 x A)	comparación	Conclusión

Hacemos un ensayo a partir de los peces pescados por Alfredo. Por ejemplo:

Alfredo	Blas (A + 7)	Carlos (2 x B)	Carlos (3 x A)	comparación	Conclusión
10	10+ 7 = 17	2 x 17 = 34	3 x 10 = 30	34 > 30	error

Continuamos haciendo ensayos hasta encontrar la solución, el momento en que ambas expresiones para Carlos sean iguales.

Alfredo	Blas (A + 7)	Carlos (2 x B)	Carlos (3 x A)	comparación	Conclusión
10	17 + 7 = 17	2 x 17 = 34	3 x 10 = 30	34 > 30	error
20	20 + 7 = 27	2 x 27 = 54	3 x 20 = 60	54 < 60	error
15	15 + 7 = 22	2 x 22 = 44	3 x 15 = 45	44 < 45	error
14	14 + 7 = **21**	2 x 21 = **42**	3 x 14 = 42	42 = 42	acierto

Tendremos así que la solución es: **14, 21 y 42** truchas, respectivamente.

Mediante **organizar la información**

Utilizando razonamiento aritmético

Observamos que las relaciones de Carlos con Blas y con Alfredo indican la existencia de dobles y triples.

Solución de un alumno

Lo que hice fue coger múltiplos (comunes) de 3 y de 2.

6 – 12 – 18 – 24 – 30 – 36 – 42 – 48 – 54 – 60 – 66 – 72 - …

A continuación, los dividí entre 2 y 3 hasta ver si la diferencia de ambos números es 7. 30/2 = 15; 30/3 = 10; 15 – 10 = 5.

Hasta este valor, la diferencia entre los cocientes es inferior a 7.

Sigo probando:

36/2 = 18; 36/3 = 12; 18 – 12 = 6;   42/2 = 21; 42/3 = 14; 21 – 14 = 7.

42 es la solución y corresponde a lo pescado por Carlos; 21 y 14 son la pesca de Blas y Alfredo, respectivamente.

Utilizando codificación algebraica

Representaremos con x la cantidad de truchas pescadas por Alfredo.

Entonces la cantidad pescada por Blas es x + 7.

Y la cantidad de truchas pescadas por Carlos será, según cada una de las dos relaciones que tenemos:

$$2(x+7) \quad y \quad 3x$$

Como ambas expresiones han de representar la misma cantidad, igualamos: $2(x+7) = 3x$

Obtenemos así la ecuación, que resuelta nos da: $2x + 14 = 3x \longrightarrow x = 14$

A partir de este resultado podemos obtener los tres valores de la solución:

$$14;\ 14 + 7 = 21;\ 3 \times 14 = 42$$

Solución

14, 21 y 42 truchas, respectivamente

Comprobación

14 + 7 = 21; 14 x 3 = 42; 21 x 2 = 42

Análisis

Solución única.

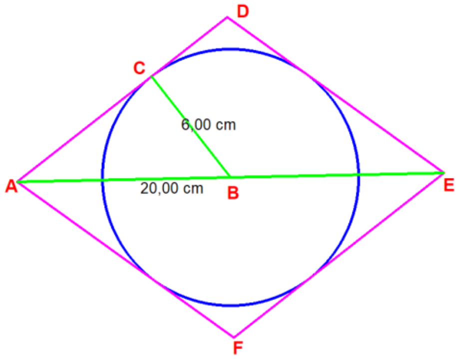
Respuesta

Alfredo ha pescado 14 truchas, Blas ha pescado 21 truchas y Carlos ha pescado 42 truchas.

Finalmente añadíamos un par de problemas más, uno geométrico (tomado de García Ardura, M.; Problemas gráficos y numéricos de Geometría; Madrid 1964) y el otro basado en un problema publicado por Adrián Paeza en su obra Matemagia.

ÁREA DE UN ROMBO

La diagonal mayor de un rombo mide 20 cm y el radio de la circunferencia inscrita 6 cm. Calcular la superficie del rombo.

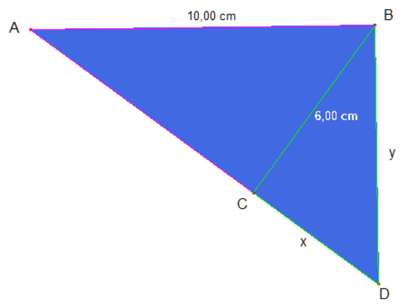


Consideraremos dos maneras de abordar el problema: algebraico y geométrico, aunque en ambos casos necesitamos conocimientos geométricos básicos.

Extraemos de la figura del enunciado el triángulo ABC de la imagen, en azul. El área total del rombo es:

$A_t = \frac{20 \cdot 2y}{2} = 20$ y usando la fórmula de $A = \frac{D \cdot d}{2}$, siendo D la diagonal mayor y d la diagonal menor.

En el triangulo azul de la figura, la longitud del segmento AC, aplicando Pitágoras es de 8 cm. Siendo el área del triángulo ABD



$$A_{ABD} = \frac{1}{4} A_t$$

El área del triángulo ABC es: $A_{ABC} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24\ cm^2$

Mientras que el área de ABD la podemos calcular como:

$$A_{ABD} = \frac{(8+X) \cdot 6}{2} = 3(8 + x)$$

En el triángulo BCD: $y^2 = 6^2 + x^2$, luego $x = \sqrt{y^2 - 6^2} = \sqrt{y^2 - 36}$

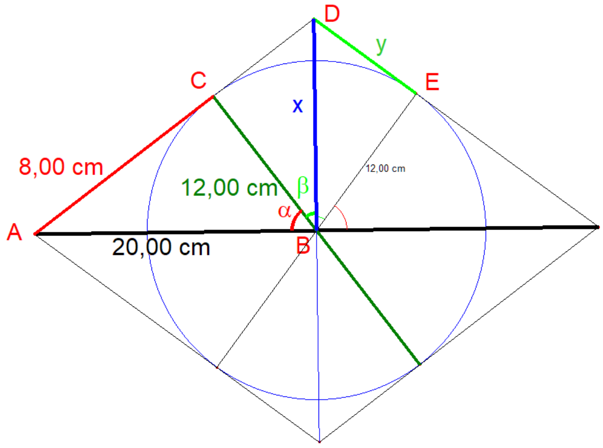
Sustituyendo en $A_{ABD} = 3(8 + x) = 3(8 + \sqrt{y^2 + 36})$ y como $A_t = 4\ A_{ABD}$, entonces:

$$4 \cdot 3\left(8 + \sqrt{y^2 + 36}\right) = 12 \cdot 8 + 12\sqrt{y^2 + 36} = 20y$$

Operando y simplificando: $3\sqrt{y^2+36} = 5y - 24$ y elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación: $\left(3\sqrt{y^2+36}\right)^2 = (5y-24)^2$ y tras algunas operaciones nos queda la ecuación de segundo grado $\mathbf{4y^2 - 60y + 225 = 0}$**,** que una vez resuelta nos da un único valor: y = 7.5 cm, con lo que la diagonal d es de 15 cm. Así pues el área del rombo es $A_t = 10 \cdot 15 =$ **150 cm²**.

Veamos cómo resolverlo usando la semejanza de triángulos.

Podemos ve en la figura que los ángulos α y β son complementarios, luego el ángulo CDB es igual a α.



Al ser los triángulos ABC y BCD semejantes por tener sus tres ángulos iguales y el lado BC común, establecemos las relaciones:

$$\frac{6}{y} = \frac{8}{6} = \frac{10}{x}$$

De donde obtenemos x = 7.5 cm e y = 4.5 cm.

Podemos aplicar la misma fórmula de antes para hallar el área del rombo o utilizar la expresión $A_t = 2lr$, donde *l* es el lado del rombo (8 + y), y *r* el radio de la circunferencia inscrita. $A_t = 2 \cdot (8 + 4.5) \cdot 6 =$ **150 cm².**

Es este un tipo de problema que puede plantearse para ser resuelto en dos momentos del currículo para unos mismos alumnos, haciéndoles ver -recordando cómo se resolvió la vez anterior-, que las matemáticas son un instrumento que permite resolver situaciones problemáticas de distintas maneras. De ahí que hablemos de belleza de la solución de un problema, de economía en los medios usados, de visualización del planteamiento y de las soluciones, etc.

Afrontemos ahora el otro ejercicio planteado en el artículo anterior.

SUMA DE PAREJAS

En una bolsa opaca se introducen 15 bolas numeradas con los números pares 2, 4, 6, …, 28 y 30. Se extraen *n* bolas. ¿Qué valor mínimo debe tener *n* para asegurarnos de que al menos hay un par de bolas que suman 36? ¿Y para que sumen 28?

Podemos dividir el conjunto de 15 bolas en tres subgrupos: A = {2, 4,… 16}, B = {20, 22,… 30} y C = {18}.

¿Por qué de esta manera?

De las $C_{15,2} = 15 \cdot 14/2 = 105$ parejas posibles, las que suman 36 son (6, 30), (8, 28), (10, 26), (12, 24), (14, 22) y (16, 20). Como podemos comprobar, el primero número de cada pareja pertenece a A y el segundo pertenece a B. Por ello, la extracción debe garantizar que se extraigan todos los elementos de uno de los subconjunto y al menos uno del otro. Puesto que card (A) = 8, mientras que card (B) = 6, debemos extraer de la bolsa al menos 9 bolas… ¡craso error! Nos olvidamos de la bola con el 18, la que forma el conjunto C. Tendríamos que extraer al menos 10 bolas, pues en el peor de los casos serían las 8 de A más la de C, y como la décima ya ha de ser de B tendremos dos bolas que sumen 36.

Para que dos de las bolas extraídas sumen 28, el razonamiento es parecido. Dejamos que nuestros lectores encuentren la solución y nos comenten, al llevar el ejercicio al aula, los resultados.

Terminada la labor de resolver y comentar queremos ofrecerles un tiempo entretenido hasta nuestro próximo artículo, así que aquí van dos nuevas propuestas.

El primero es una variante de un problema clásico, "El cubo de las caras pintadas". Aquí hemos añadido algunas dificultades: un ortoedro en lugar de un cubo, en lugar de dimensiones el número de cortes, una cara sin pintar.

EL CARPINTERO

El padre de Ramiro, que es carpintero, hizo un ortoedro de madera y lo pintó totalmente de verde con un spray sobre la mesa en la que estaba apoyado, sin levantarlo en ningún momento.

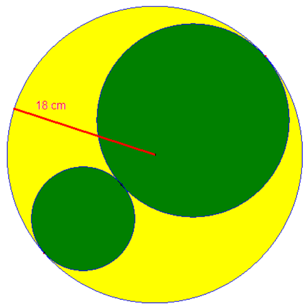
Al cabo de unos días, como le parecía que era muy grande para utilizarlo, decidió cortarlo en cubitos pequeños mediante cortes paralelos a las caras del ortoedro. Hizo 6 cortes a lo largo, 5 a lo alto y 4 a lo ancho.

¿Cuántos cubitos salieron? Clasifícalos según el número de caras pintadas de verde que tengan. Justifica tus respuestas.

El segundo, aparecido en un antiguo ejemplar de la revista QUIZ.

De una placa circular de un material homogéneo de 18 cm de radio y 360 g de peso, se cortan dos discos (en verde) como indica la figura.

El material sobrante (en amarillo) pesa seis veces más que el disco pequeño. Calcular los radios y los pesos de los discos cortados.



Se nos ocurre que para próximos artículos vamos a deslizar alguna errata y desafiaremos a nuestros lectores a encontrarla; igual hasta tenemos un premio para ellos. Por ahora las erratas que aparecen son involuntarias, al menos por nuestra parte, pero todos conocemos la existencia de ciertos duendes digitales y analógicos que les da por intervenir…

Y hasta aquí llegamos. Terminamos con nuestro mantra particular: resuelvan los problemas, singulares y alejados de los cotidianos; utilícenlos con los alumnos y, sobre todo, aporten sus comentarios a la revista, sus soluciones e, incluso, nuevas propuestas. O, simplemente, cuéntennos lo sucedido en el transcurso de la clase en que probaron el problema. Queremos pensar que nuestras propuestas tienen uso en el aula. Eso nos alegraría mucho y también al resto de lectores. Vamos, anímense… ¡Si es *divertido*!

Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista NÚMEROS.

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**