KURT GÖDEL: LA CUMBRE DEL IMPOSIBLE MATEMÁTICO

Antonio Martinón

Los descubrimientos matemáticos que se refieren a una imposibilidad producen en muchos una extraordinaria fascinación.

Los griegos intentaron escribir la medida de la diagonal de un cuadrado, tomando el lado por unidad, como razón de dos números enteros, pero acabaron descubriendo que era imposible. Los tres célebres problemas de cuadrar el círculo, trisecar el ángulo y duplicar el cubo recibieron la misma respuesta, pero muchos siglos más tarde: es imposible.

Otra imposibilidad célebre se refiere a la resolución por radicales de las ecuaciones algebraicas. Después de hallar las fórmulas para las raíces de las ecuaciones de tercer y cuarto grado, que se podían expresar usando radicales, se abordó el estudio de las de quinto grado y superior, aunque finalmente se concluyó poniendo el rótulo de "imposible": no existe una expresión con radicales que valga para una ecuación cualquiera de grado quinto o superior.

Muchos matemáticos posteriores a Euclides consideraban que el *postulado de las paralelas* que figuraba en sus *Elementos* podía deducirse de los otros cuatro. Así, se intentó probar que por un punto exterior a una recta pasa una paralela y sólo una. Tras muchos intentos para demostrar tal cosa, se concluyó que era "imposible"; es decir, el postulado de las paralelas no puede deducirse de los otros cuatro, es *independiente* de ellos.

Estrictamente, toda proposición afirma muchas imposibilidades. Al decir $2 + 3 = 5$ se dice que es imposible $2 + 3 = 4$, $2 + 3 = 6$... Sin embargo, las imposibilidades a las que nos estamos refiriendo son de naturaleza bien distinta. Por un lado, no son triviales en absoluto, sino que son resultados muy profundos. Por otro, el descubrimiento de la imposibilidad ha ejercido una notable influencia en el desarrollo de las matemáticas, a veces dando lugar a nuevas y poderosas teorías. Pero lo que posiblemente sea más característico de las imposibilidades es que resultan sorprendentes en términos históricos: no se esperaba que la respuesta fuera "imposible".

El teorema de Gödel

Uno de los teoremas de imposibilidad establecidos en el siglo XX es el llamado *teorema de incompletitud de Gödel,* que puede considerarse como la cumbre de los imposibles matemáticos.

Para los matemáticos, y para muchos otros científicos, la forma de organizar el conocimiento que utiliza Euclides en sus *Elementos* es el modelo a imitar. La exposición de la geometría que hizo Euclides se perfeccionó por David

Hilbert (1862-1943) en sus *Fundamentos de geometría* (1899) —y también por otros. Poco a poco, Hilbert, que era el matemático más prestigioso de aquellos años, fue diseñando su programa de formalización de las Matemáticas. El método estaba bastante claro: se establecen unas nociones básicas, se fijan unos axiomas y, usando las reglas de la lógica, se van demostrando todas las verdades de las Matemáticas. Pues bien, lo que vino a demostrar Gödel en su célebre teorema es que tal pretensión es un imposible: *no pueden demostrarse todas las verdades de las Matemáticas*. En palabras del propio Gödel:

> Como es bien sabido, el progreso de la matemática hacia una exactitud cada vez mayor ha llevado a la formalización de amplias partes de ella, de tal modo que las deducciones pueden llevarse a cabo según unas pocas reglas mecánicas. Los sistemas formales más amplios construidos hasta ahora [...] son tan amplios que todos los métodos usados hoy en las matemáticas pueden ser formalizados en ellos, es decir, pueden ser reducidos a unos pocos axiomas y reglas de inferencia. Resulta por tanto natural la conjetura de que estos axiomas y reglas basten para decidir todas las cuestiones matemáticas que puedan ser formuladas en dichos sistemas. En lo que sigue se muestra que esto no es así, sino que, por el contrario, en ambos sistemas hay problemas relativamente simples de la teoría de números naturales que no pueden ser decididos con sus axiomas (y reglas).

Tal como ha escrito W. V. Quine: "El famoso teorema de incompletitud de Gödel muestra que no hay ningún método de prueba formal con el que poder demostrar todas las verdades de la matemática, y ni siquiera de la teoría elemental de los enteros positivos. Su prueba de este teorema, en sí misma estrictamente matemática, produjo un brusco giro en la filosofía de la matemática,
31 pues habíamos supuesto que la verdad matemática *consistía* en la demostrabilidad". La ambición formalista de Hilbert era un imposible.

Kurt Gödel

Nació en 1906 en Brno (Moravia, Chequia) en el seno de una familia de origen alemán. En 1924 ingresó en la Universidad de Viena, donde finalizó sus estudios de matemáticas en 1927. Asistió regularmente a las reuniones del *Círculo de Viena* (Schlick, Hahn, Carnap...) y más tarde al *Coloquio matemático* de Menger. Alcanzó el doctorado en 1930 con su trabajo *La completitud de los axiomas*

Gödel y Einstein en 1954 en Princeton (EE.UU.).

del cálculo lógico de primer orden, siendo Hans Hahn (1879-1934) su director. Los resultados de su tesis supusieron un apoyo al programa formalista de Hilbert. Pero poco después, en 1931, con veinticinco años, publicó su célebre *teorema de incompletitud,* que vino a echar por tierra la idea hilbertiana.

Tras el eco que produjo su teorema, Gödel logró en 1932 su habilitación como profesor *privatdozent* en la Universidad de Viena. Realizó varios viajes a Estados Unidos, invitado por el *Instituto de Estudios Avanzados* de Princeton, y finalmente, en 1940, decidió quedarse en aquel país a la vista de la situación durante el nazismo. Ya no volvería de nuevo a Europa.

En el *Instituto* coincidió con Albert Einstein —con quien mantuvo una estrecha relación—, John von Neumann, Hermann Weyl... Durante su etapa americana trabajó en teoría de la relatividad, escribió sobre filosofía y filosofía de las Matemáticas, y continuó prestando atención a la *hipótesis del continuo* (HC). Ya Gödel había demostrado en 1938 que no-HC no puede deducirse a partir del sistema habitual de axiomas de la teoría de conjuntos, e intentó demostrar lo mismo para HC, pero no lo logró. Fue Paul J. Cohen quien lo demostró en 1963 y por ello obtuvo la medalla Fields en 1966.

Kurt Gödel fue un enfermo psicótico. A lo largo de toda su vida sufrió frecuentes episodios de paranoia y fue ingresado varias veces en sanatorios. Temía ser envenenado y finalmente murió en 1978, víctima de su negativa a comer. Al morir desapareció el lógico más notable de todos los tiempos.

La demostración

Damos ahora una somera idea de la demostración del teorema de incompletitud de Gödel. Una aproximación puede encontrarse en el libro de Nagel y Newman, y la demostración propiamente dicha en la obra de Gödel.

Los *signos* son el alfabeto con el que se va a construir todo el lenguaje formal. A cada uno de ellos se le asigna su *número de Gödel*. Por ejemplo:

Signo	Significado	Número
-	[no]	1
v	[ó]	2
→	[si... entonces]	3
∃	[existe]	4
=	[igual]	5
0	[cero]	6
s	[siguiente]	7
(	[signo de puntuación]	8
)	[signo de puntuación]	9
x	[variable numérica]	11
y	[variable numérica]	12
z	[variable aleatoria]	13

A partir de los signos se escriben los *enunciados*. También a cada uno de ellos se le asigna su número de Gödel. Consideremos el enunciado 'existe un número x que es el siguiente de 0', o más brevemente '0 tiene un siguiente', que se simboliza así:

$$(\exists x)\ (x = s0)\ ,$$

Se escriben ahora los números correspondientes a cada símbolo en su orden:

$$8 - 4 - 11 - 9 - 8 - 11 - 5 - 7 - 6 - 9$$

Tomando los primeros primos como base y los anteriores como exponentes se obtiene el *número de Gödel* del enunciado:

$$2^8\ 3^4\ 5^{11}\ 7^9\ 11^8\ 13^{11}\ 17^5\ 19^7\ 23^6\ 29^9$$

Algunos enunciados son los *axiomas*. A partir de ellos, haciendo uso de las reglas de inferencia, se obtienen, mediante *demostraciones,* los *enunciados demostrables*. A las demostraciones se les asigna también un número de manera similar a como se ha hecho con los enunciados. Así pues, se ha asignado un número a cada signo, a cada enunciado y a cada demostración, de tal forma que si dos tienen el mismo número, entonces son iguales.

La idea esencial de la demostración es construir un enunciado G que signifique 'G no es demostrable', de forma que G sea autoreferente. Representamos por *sust(y,13,y)* el *número de Gödel* del enunciado *A(y)* que se obtiene sustituyendo en el enunciado *A(z)* que tiene número *y* el signo variable *z,* que
31 tiene número 13, por el número *y*. Consideremos el enunciado

$$(\forall x)\ no\text{-}Dem(x,sust(y,13,y))$$

que significa: 'cualquiera que sea el número x, la demostración con número x no es una demostración del enunciado que tiene número *sust(y,13,y)*'. Este enunciado tiene un número n. Entonces, por fin, tenemos G:

$$(\forall x)\ no\text{-}Dem(x,sust(n,13,n)).$$

Resulta que el *número de Gödel* de G es *sust(n,13,n)*. Además, G es demostrable si y sólo si *no-G* es demostrable. Esto significa que si los axiomas son consistentes (no contienen contradicciones), entonces G es *indecidible:* ni G ni su negación *no-G* son demostrables. Como o bien G o bien *no-G* es cierto, se concluye que *hay verdades de la Aritmética que no son demostrables.*

Bibliografía

Gödel, K.: *Obras completas.* Alianza, Madrid, 1989.

Gödel, K.: *Ensayos inéditos.* Mondadori, Barcelona, 1994.

Mosterín, J.: *Los lógicos.* Espasa, Madrid, 2000.

Nagel, E.; Newman, J. R.: *El Teorema de Gödel.* Tecnos, Madrid, 1994.

Wang, H.: *Reflexiones sobre Kurt Gödel.* Alianza, Madrid, 1994.