Rev.Acad.Canar.Cienc., III (Núm. 1),221-251 (1991)

GAUSS Y LA GEOMETRIA DEL ESPACIO

Discurso leido por el Académico Electo

Ilmo Sr. Dr. DOMINGO CHINEA MIRANDA

en el acto de su recepción el día 4 de Junio de 1991

DISCURSO DE CONTESTACION

por el Académico Numerario

Ilmo. Sr. Dr. JOSE MANUEL MENDEZ PEREZ

Ecxmo. Sr. Presidente de la Academia Canaria de Ciencias
Iltmos. Sres. Académicos,
Señoras y Señores:

Es para mí un grato deber manifestar mi más profundo agradecimiento por el honor que se me dispensa al proponerme como miembro de número de esta Academia Canaria de Ciencias, honor que creo no ser digno de merecer, y a lo que siempre trataré de corresponder con mi colaboración personal más entusiasta, dedicando los esfuerzos necesarios para contribuir a la consecución de los fines que esta digna institución persigue.

Encontrarse con la tarea de escribir un discurso de ingreso en la Academia, ante un auditorio tan distinguido, e intentarlo hacer sobre alguno de los temas de investigación de las Ciencias Matemáticas, además de un atrevimiento muy osado, es quizás ir directamente al fracaso de audiencia total y posiblemente nadie entendería la sucesión descontrolada de conceptos, definiciones, teoremas y fórmulas que se precisan para abordar un tema de investigación en matemáticas con el suficiente rigor y seriedad que son necesarios en todo campo de cualquier ciencia que se digne como tal.

Lejos de esta intención, y con la idea de que este discurso sea simplemente una introducción a una de las ramas que comprende el inmenso campo de las ciencias matemáticas, afrontamos el mismo desde una óptica retrospectiva en busca de los inicios de la geometría diferencial.

Texto del discurso "Gauss y la geometría del espacio", pronunciado por el Dr. D. Domingo Chinea Miranda en el acto de su recepción como miembro de la Academia Canaria de Ciencias (4-6-91).

Por este motivo he optado por hacer una exposición histórica de la geometría diferencial clásica de superficies, evitando hacer uso de un lenguaje técnico, lo cual no siempre será posible. Lo que sí he logrado es suprimir las fórmulas matemáticas, las cuales irremediablemente hubiesen sido incomprendidas e innecesarias de presentar en un acto como el que se celebra hoy aquí. Así pués, con la intención de, en la medida de lo posible, no abrumar con desarrollos solo apto para unos pocos especializados, presentamos este discurso, el cual he titulado *"Gauss y la geometría del espacio"*, en homenaje a ese gran genio que fue Karl Friedrich Gauss, quién es considerado como uno de los matemáticos que más han aportado al desarrollo de la geometría diferencial de superficies, así como a la geometría del espacio, y a las matemática y física en general.

Los inicios de la geometría diferencial de superficies.

Los estudios en geometría tienen sus orígenes en las observaciones simples que provienen de la habilidad humana para reconocer la forma física y para comparar formas y tamaños. No hay evidencia que nos permita garantizar la fecha de nacimiento de la geometría como ciencia o rama científica de las matemáticas, aunque la inmensa mayoría de los historiadores concuerdan en que este nacimiento tuvo que haber tenido lugar en el valle del Nilo y en otras cuencas de grandes ríos (Tigris y Eufrates en Mesopotamia y otros de Asia) como consecuencia de una necesidad práctica relacionada con problemas de medición. Así, los registros más antiguos sobre la actividad geométrica, y quizás sobre la actividad matemática, pueden fecharse sobre el año 3000 a.c..

Sin embargo, fueron los filósofos griegos clásicos quienes, entre el año 600 y el 300 a. c., dieron a las matemáticas en general su arquitectura definitiva de abstracción y demostración deductiva, y construyeron la estructura de la geometría euclídea, la cual aplicaron para la comprensión y entendimiento del Universo. La evolución de la geometría a través de los tiempos ha sido lenta, debido en parte a que la geometría de Euclides es obtenida a partir de unos postulados que a priori parecen ciertos sin discusión alguna y reflejan la propia geometría de nuestro espacio. A pesar de ello, desde el nacimiento de la Geometría euclídea, han surgido dudas sobre la validez de la misma, y más concretamente sobre la verificación o no del quinto postulado. Esta discusión llegará a su punto más crítico con la aparición de las denominadas geometrías no-euclídeas, las cuales en un principio provocaron una crisis de las Matemáticas y una necesidad de revisión de los fundamentos, pero que a partir del siglo XIX, con los estudios de N. I.Lobachewsky (1793-1856), J. Bolyai (1802-1860) y K. F. Gauss (1777-1855), se pudo concluir que las geometrías no-euclídeas eran tan consistentes como la euclídea. Otra nueva geometría, que surge motivada por los pintores del renacimiento al tratar de resolver el problema de pintar en un lienzo las escenas reales, es la geometría proyectiva, siendo G. Desargues (1591-1661) y B. Pascal (1623-1662) en el siglo XVII, y posteriormente J.V. Poncelet (1788-1867) en el siglo XIX, los que más aportaron al desarrollo de esta geometría.

La geometría diferencial de curvas y superficies nace, mediante un proceso natural, sobre los cimientos de la geometría analítica, rama esta que aparece a principios del siglo XVII de la mano de R. Descartes (1596-1650) y P. Fermat (1601-1665) como una desviación algebraica de la geometría tradicional, y la de otra rama de las matemáticas: el cálculo infinitesimal de I. Newton (1642-1727) y G.W. Leibniz (1646-1716) que surge en la segunda parte del mencionado siglo XVII. De hecho, en la época de estos dos grandes matemáticos es cuando empiezan a aplicarse los métodos del cálculo al estudio de curvas planas. Sin embargo, puede decirse que esta nueva rama de la geometría tiene su consagración en el siglo XIX con K. F. Gauss, quien realizó un exhaustivo estudio de las superficies en el espacio. Antes de Gauss, algunos matemáticos habían ya elaborado estudios sobre geometría diferencial de superficies.

Uno de los pioneros en la teoría de superficies fue Leonhard Euler (1707-1783). Euler nació en Basilea (Suiza). Su padre era un pastor calvinista y tenía esperanzas de que su hijo estudiase una carrera teológica. Así, con el propósito de estudiar teología y hebreo, Euler entró en la Universidad de Basilea en donde recibió una educación muy completa. Sin embargo, sus conocimientos y aptitudes en matemáticas atrajo la atención de los matemáticos de Basilea, y muy en particular de Johann Bernoulli, quien era uno de los más célebres componentes del clan de los Bernoulli, considerada como la familia que más ha contribuido al desarrollo de las matemáticas. J. Bernoulli intercedió ante el padre de Euler para hacerle comprender que su hijo tenía una gran porvenir en matemáticas, y no se equivocó. Así, Euler fue, sin duda alguna, la figura dominante del periodo comprendido entre los años veinte del siglo XVIII hasta su muerte en 1783. Euler, dotado de una gran inteligencia y una magnifica memoria tuvo grandes aportaciones en casi todas las ramas de las matemáticas puras y aplicadas (son clásicos sus trabajos sobre mecánica, álgebra, análisis matemático, teoría de los logaritmos de los números negativos e imaginarios, geometría analítica y diferencial, cálculo de variaciones,...).

La más célebre de sus obras matemáticas es su *"Introductio in analysis infinitorum"*, escrita en 1748. Entre la gran variedad de temas tratados en esta obra (estudio de series infinitas, teoría de curvas algebraicas, estudio de funciones trigonométricas, teoría de funciones y teoría de números,...) se encuentra el estudio de curvas y superficies, las cuales son investigadas con la ayuda de sus ecuaciones, es decir, desde el punto de vista analítico. Concretamente, Euler presenta un estudio general de las propiedades de las curvas (su forma, singularidades, curvatura,...), en donde representa a las curvas en el espacio en coordenadas paramétricas mediante su longitud de arco, y también realiza una exposición analítica de las curvas y superficies en el espacio.

En otra de sus obras titulada *"Investigaciones sobre la curvatura de superficies"* se encuentra su contribución más importante en el campo de la geometría diferencial. En este trabajo, la curvatura de una superficie en un punto es definida por Euler como el producto de las dos curvaturas principales (es decir, para calcular la curvatura en un punto P de una superficie, Euler determina las curvaturas máxima y mínima de las secciones planas ortogonales a la superficie en P. El producto de estas dos cantidades es la curvatura de la superficie en P).

En su trabajo *"Sobre sólidos cuyas superficies pueden ser desarrolladas sobre un plano"* (1772), Euler introduce el concepto de superficie desarrollable, es decir, superficies que pueden ser aplicadas o extendida sobre un plano, y prueba que una tal superficie es o un cilindro, un cono o una superficie formada por las tangentes a una curva.

Euler también tiene estudios sobre geodésicas. En el plano euclídeo, las rectas, además de ser las curvas más simples, juegan un importante papel y son la base para todo tipo de construcciones geométricas. En una superficie arbitraria este papel privilegiado es desarrollado por las líneas geodésicas. Así, las geodésicas son las curvas de menor curvatura sobre la superficie (lo que se interpreta como que tienen curvatura geodésica nula, como sucede con las rectas), la distancia más corta entre dos puntos sobre una superficie es a través de una geodésica (así, por ejemplo, las geodésicas del plano son las rectas y las de una esfera son los círculos máximos), dados dos puntos de una superficie existe una geodésica que los une (aunque esta propiedad es sólo local en general), por un punto y una dirección existe una única geodésica en la dirección dada que lo contiene.... El problema de encontrar las geodésicas de una superficie ya había sido planteado por Johann Bernoulli (1667-1748) en 1697, y al parecer encontró la ecuación general de las geodésicas, aunque este resultado fue publicado posteriormente en 1742. Euler fue el primero en publicar la ecuación diferencial de las geodésicas en su trabajo *"Sobre la curva más corta que une dos puntos arbitrarios de una superficie arbitraria"* (1732). Este problema de las geodésicas lo retomó Euler en diferentes trabajos. Así, en el volumen II de su *"Mechanics"* (1736), Euler probó que una masa puntual forzada a estar sobre una superficie si no está sujeta a ningún otro tipo de fuerzas debe moverse a lo largo de una geodésica. También, Euler probó que en una curva geodésica la normal a ésta coincide con la normal a la superficie.

Otros matemáticos de la época de Euler también realizaron contribuciones a la geometría diferencial. Entre ellos destaca Clairaut (1713-1765), quien a los dieciocho años publica una memoria sobre las curvas titulada *"Investigaciones sobre las curvas con doble curvatura"*. El nombre de doble curvatura proviene del hecho de que la curvatura de estas curvas está determinada por la de dos curvas que se obtienen por proyecciones de la curva original sobre dos planos perpendiculares.

Clairaut obtiene fórmulas de la distancia para dos y tres dimensiones, ecuaciones de cuádricas, tangentes de curvas en el espacio,...También, Clairaut estudia las geodésicas de las superficies de revolución.

Otra figura importante en la historia de la geometría diferencial fue Gaspar Monge (1746-1818). Su introducción en el estudio de la geometría diferencial fue motivado por problemas prácticos, concretamente por el estudio de problemas de fortificación. Monge comienza sus investigaciones de geometría diferencial con un estudio en teoría de curvas en el espacio titulado *"Memoria sobre las evolutas, los radios de curvatura y los diferentes géneros de inflexión de las curvas de doble curvatura"* (1785). Monge desempeñó un papel esencial en la creación de la Escuela Normal y la Politécnica de Francia, siendo en esta última su profesor más activo. En esta escuela Politécnica, Monge impartió un curso sobre aplicaciones del análisis a la geometría, siendo este curso esencialmente una introducción a la geometría diferencial. Al no disponer de ningún texto Monge escribe un libro titulado *"Hojas de análisis"*, (1795), el cual es considerado como el primer libro sobre geometría diferencial. No obstante, el mencionado curso era muy difícil para los alumnos de entonces, sobre todo en lo referente al estudio diferencial de las curvas y superficies. En 1802, Monge y J.P Hachette elaboran un estudio más general al anterior en la memoria *"Aplicación del algebra a la geometría"*, a fin de responder a las exigencias de los programas de la Escuela Politécnica. Puede decirse que en estas dos obras nos encontramos con la mayor parte de la geometría del espacio y de la geometría diferencial clásica que suelen incluirse en los actuales textos elementales de estas materias.

No sólo Monge es importante por su contribución a las matemáticas sino por la escuela que creó. Así el impulso dado por Monge en la geometría del espacio fue acelerado por sus discípulos, alguno de los cuales también elaboraron libros de textos elementales de geometría analítica del espacio. Así, aparecen cuatro obras debidas a Lacroix (1765-1843), J.B. Biot (1774-1862), L. Poissant (1769-1843) y F. L. Lefrancais, todas ellas inspiradas directamente de las lecciones dadas en la Escuela Politécnica.

Otro de sus discípulos, Charles Dupin (1784-1873), también contribuyó al desarrollo de la geometría diferencial. Joven ingeniero naval en la época Napoleónica, aplicó los métodos de Monge a la teoría de superficie, encontrando las líneas asintóticas y las conjugadas.

Sus obras tituladas *"Desarrollos de geometría pura"* y *"Aplicaciones de geometría y mecánica"* publicadas en 1813 y 1822, respectivamente, contienen un gran número de resultados interesantes en geometría diferencial (introduce la indicatriz que actualmente lleva su nombre, la cual nos da una aproximación de cualquier superficie en un punto dado, estudia la intersección de superficies,...).

El impulso definitivo al desarrollo y consagración de la geometría diferencial fue dado por Karl Friedrich Gauss.

Karl Friedrich Gauss.

Karl Friedrich Gauss nació en Gotinga (Alemania) en 1777. Su padre era un obrero, dominante en el entorno familiar, quien no quería que su hijo recibiera una educación adecuada, la cual consideraba inútil. Sin embargo su madre animó siempre a Gauss en sus estudios, sintiéndose más tarde orgullosa y maravillada por los logros de éste. Sin ayuda de ningún tipo, se suele decir que Gauss aprendió a calcular antes que hablar. Su tremenda inteligencia provocó que sus profesores se fijaran en él y gozara de la protección del duque de Brunswick, Carlos Guillermo, quien le envió a estudiar, primero a un colegio y posteriomente a la universidad de Gotinga, en 1795, adquiriendo una formación clásica y científica superior al resto de los estudiantes. A los diecinueve años, Gauss duda todavía entre la filosofía y las matemáticas, decidiéndose finalmente por éstas tras uno de sus brillantes descubrimientos: la construcción del polígono regular de 17 lados con sólo regla y compás. Es de observar, que en aquella época, y desde hacía más de 2.000 años se sabía cómo construir con regla y compás el triángulo equilátero, el cuadrado y el pentágono regular, pero ningún otro polígono regular con un número primo de lados. Después de haber leido su Tesis en 1798, sobre la demostración del teorema fundamental del álgebra, en 1801 Gauss escribe su obra fundamental: las "*disquisitiones Arithmeticae*" la cual, por su grado de maduración y perfección se usó de modelo en los estudios posteriores de la teoría de números. Este carácter de perfección y rigor es lo que marcará la obra de Gauss, quien a pesar de todo no le gustaba publicar, y además sus trabajos los publicaba tarde, mucho tiempo después de haberlos obtenido.

Buena parte de su vida la dedicó Gauss a trabajos de geodesia, en particular a la triangulación de Hannover y a la invención del heliotrofo, lo que junto con su afición a la astronomía le condujo al mundo de la física, donde realizó notables aportaciones en física teórica, mecánica, óptica,...

Otra de sus obras fue la edificación y puesta en marcha del observatorio de Gotinga, siendo su director durante 40 años a partir de 1807. Dicho observatorio comienza a funcionar después de muchos esfuerzos en 1816. Además, Gauss ocupó frecuentemente el puesto de decano de la Facultad de Gotinga.

Gauss tenía una salud más bien delicada y una fatiga continuada debido a los grandes esfuerzos físicos ocasionados por sus excesos de trabajo durante buena parte de su vida. Así, terminó padeciendo de asma y del corazón. Además sus problemas familiares también influían sobre este brillante matemático. Gauss se casó a los veintiocho años en 1805 con Johanne Ostof. De esta unión nacen dos hijos, pero en 1809 al nacer el tercero muere Johanne, y además el niño sólo vive algún tiempo. En 1810, Gauss se casa por segunda vez con Minna, amiga íntima de su primera esposa, y de este nuevo matrimonio nacen dos niños y una niña. Posteriormente, desde 1818, su esposa sufre tuberculosis y neurosis histérica. Además, en esa época su hijo mayor abandona el hogar familiar, después de una discusión. Finalmente, en 1831 muere su mujer. Todos estos problemas familiares, unido a su estado precario de salud, es lo que le marca como un hombre solitario, frío y poco comunicativo en la vida, a pesar de que en el campo de las ciencias siempre estuvo rodeado de numerosos alumnos y discípulos. A partir de 1850, su estado de salud empeora, lo que le obliga a reducir considerablemente sus actividades, y estar a los cuidados de un médico, muriendo finalmente en 1855.

Gauss enriqueció diferentes ramas de las matemáticas (álgebra, análisis matemático, estadística, geometría,...), y es considerado como uno de los genios universales que han marcado y dirigido el desarrollo de las matemáticas.

La geometría diferencial de Gauss.

La teoría de superficie de Gauss estuvo fuertemente influenciada por sus trabajos prácticos como topógrafo. Los años entre 1818 y 1832 fueron dominados por el vasto proyecto de topografiar el Reino de Hannover. El propio Gauss dirigió la puesta inicial de esta aventura. Bajo grandes esfuerzos físicos, Gauss trabajó como topógrafo en el Reino de Hannover en la parte norte de Alemania, lo que le enfermó y le condujo a abandonar su participación activa en los trabajos de triangulación en 1825 . En esa época había gran interés por los estudios geodésicos, lo que constituía una práctica natural y un deseo teórico por determinar, mediante mediciones, la verdadera forma de la tierra. Esta cuestión había sido ya abordada en el siglo XVIII, cuando, mediante reiteradas tomas de medidas, se había llegado a la aceptación universal de la teoría de la Gravitación de Newton. Otra cuestión que se venía estudiando desde siglos era la cartografía. En concreto la aplicación entre superficies que satisfacen ciertas propiedades era un problema básico y fundamental para la reproducción de partes de la superficie de la tierra en cartas geográficas planas. Así, por ejemplo, es imposible aplicar parte de una superficie de la tierra sobre el plano conservando la longitud (lo cual es consecuencia directa del famoso Teorema Egregium de Gauss, del cual nos ocuparemos más adelante). Si queremos obtener cartas geográficas para la navegación, un concepto tan fundamental como la distancia es la dirección, para así determinar las rutas de los barcos. Por ello, parece lógico plantearse el estudio de aplicaciones más débiles, por ejemplo, aplicaciones que conserven los ángulos (las cuales se denominan aplicaciones conformes). Además las regiones conformemente relacionadas son similares, si consideramos regiones suficientemente pequeñas. Casos especiales de aplicaciones conformes de la superficie terrestre sobre el plano son la proyección estereográfica, conocida por los griegos, y la proyección de Mercator (1512-1594), la cual es todavía usada en la cartografía actual.

En 1822, Gauss escribe su memoria "*Solución general al problema de aplicar regiones de forma que cualquier porción pequeña y su imagen sean similares*". En este trabajo Gauss obtiene un procedimiento para determinar, sobre superficies analíticas, todas las aplicaciones conformes (localmente), por lo que recibió un premio de la Real Sociedad de Ciencias de Copenhague. Al parecer, durante la elaboración de este trabajo, Gauss tenía ya en proyecto la elaboración de una teoría general de superficies, pues en la portada de la memoria antes mencionada Gauss escribió que esta obra era el punto de partida para obtener cosas más interesantes. No obstante, el desarrollo de la teoría general de superficies no fue simple. De hecho, durante su elaboración el mismo Gauss reconoció que no conocía ninguna otra época de la vida en donde hubiese tenido tanto trabajo agobiante (cabe señalar que durante esta época Gauss estaba inmerso todavía en el proyecto de triangulación de Hannover). Por ello, a pesar de que Gauss tenía las ideas básicas

1816, el 8 de octubre de 1827 Gauss presentó la teoría general de superficies. El título de su trabajo fue *"Disquisitiones generales circa superficies curvas"*, considerada como la obra maestra de la teoría de la geometría diferencial clásica de superficies, siendo también la antesala de los posteriores desarrollos de la geometría diferencial de variedades.

La obra está dividida en veintinueve secciones. En las tres primeras secciones, Gauss introduce las nociones elementales, convenios de notación y algunos resultados (esencialmente conocidos) sobre trigonometría esférica. Concretamente, en la sección primera, para obtener las distintas direcciones en el espacio, Gauss considera la esfera unidad e identifica los puntos de ésta con el vector unitario que lo representa. En particular destaca a los tres vectores básicos en la dirección de los ejes de coordenadas. En la sección segunda define los ángulos entre rectas, planos y rectas y planos en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$, identificando para ello sus direcciones con los puntos de la esfera (por ejemplo, el ángulo entre dos rectas lo define Gauss como el arco entre los puntos de la esfera que se corresponde con las rectas, etc.). Además, usando relaciones de trigonometría esférica, obtiene el volumen de una pirámide. En la siguiente sección Gauss define lo que es un punto regular o singular de una superficie imponiéndole la existencia o no de plano tangente en ese punto, respectivamente.

En las secciones cuatro y cinco, Gauss introduce el concepto de vector normal a la superficie y obtiene diferentes representaciones de una superficie: por medio de una ecuación en implícitas del tipo $f(x,y,z) = 0$; por la imagen de una inmersión de un abierto de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ (con lo que los puntos de la superficie están caracterizados por dos parámetros (u,v)); y finalmente, como el grafo de una función en explícita z = f(x,y). También, Gauss trata el tema de orientación de una superficie, comentando la posibilidad de elegir dos orientaciones distintas (opuestas), en función de la elección de dos posibles vectores unitarios y normales en cada punto regular de una superficie.

Antes de la aparición de las disquisitiones, las superficies eran representadas en $\mathbb{R}^3$ por una ecuación del tipo f(x,y,z) = 0, aunque Euler ya había introducido la idea de que las coordenadas de cualquier punto sobre una superficie podía ser representadas en términos de dos parámetros (u,v). En su trabajo, Gauss retoma esta idea y usa sistemáticamente la representación de la superficie en función de estos dos parámetros, es decir, representa la superficie con una función vectorial **x**(u,v) = (x(u,v),y(u,v),z(u,v)). Usando esta representación, Gauss deduce la Primera forma fundamental y obtiene las longitudes de arcos y el ángulo entre dos curvas sobre una superficie arbitraria.

En la sección seis, inspirado por sus trabajos sobre astronomía y geodesia, Gauss introduce la aplicación esférica (la cual lleva su nombre), la curvatura total y lo que hoy denominamos la "curvatura de Gauss". Su definición de curvatura es una generalización para superficies de la indicatriz usada para curvas en el espacio por Euler y usada para superficies por Olinde Rodrigues. La aplicación de Gauss de una superficie regular es una función definida sobre la superficie y con valores en la esfera unidad que a cada punto P de la superficie le asigna el vector normal de la superficie en ese punto (que al ser unitario, el punto P' que representa este vector está sobre la esfera unidad). Para definir Gauss la curvatura en un punto P, considera un trozo suficientemente pequeño de superficie rodeando a dicho punto.

Entonces, la curvatura de Gauss es el límite de la razón inversa del área de este trozo de superficie con el área de la región correspondiente a través de la aplicación de Gauss, cuando ambas áreas tienden a sus respectivos puntos. Gauss evalúa esta razón, notando que el plano tangente en P' sobre la esfera es paralelo al plano tangente a la superficie en P. Por lo tanto, la razón de las dos áreas es la razón de sus proyecciones sobre los respectivos planos tangentes.

En las secciones comprendidas entre la siete y la diez, Gauss sigue con el estudio de la curvatura, obteniendo fórmulas para el cálculo de ésta, estudia su signo y demuestra que su curvatura en un punto P es el producto de las dos curvaturas principales en ese punto, las cuales habían sido introducidas por Euler.

La sección 11 contiene la fórmula que se puede considerar como el resultado central de su trabajo. Esta fórmula, conocida hoy como la ecuación de Gauss, expresa la curvatura de Gauss en función de la parametrización de la superficie, o más concretamente, en función de la primera forma fundamental. Como aplicación de esta fórmula, Gauss en la sección 12 obtiene el teorema Egregium que nos dice que la curvatura de Gauss es un invariante isométrico, es decir que si dos superficies son isométricas, la curvatura de Gauss en puntos correspondientes es la misma. En la sección 13, Gauss interpreta una superficie, no como el borde de un sólido, sino como un cuerpo flexible y en donde las propiedades de la superficie depende en parte de su forma y de la forma en que podamos deformarla. Por ejemplo, desde este punto de vista, una superficie plana y una desarrollable (es decir una superficie cónica, cilíndrica o tangencial) pueden considerarse iguales.

En las secciones comprendidas entre la catorce y la diecinueve, Gauss estudia propiedades básicas de las geodésicas sobre una superficie, obteniendo, por ejemplo, las ecuaciones diferenciales cuyas soluciones son las geodésicas (parametrizadas por su longitud de arco), demuestra que el vector normal a una geodésica es normal a la superficie (lo que ya había obtenido Euler) y obtiene también el denominado Lema de Gauss.

Las geodésicas son básicas para el estudio de trayectorias sobre superficies, hecho que también había considerado Euler, y tienen una primordial relevancia en la teoría de la relatividad sobre el movimiento de luz y de masas en nuestro universo. Por ello, no es de extrañar que Gauss dedicara parte de su obra al estudio de estas curvas tan distinguidas.

En la sección veinte, Gauss estudia triángulos geodésicos y prueba el conocido Teorema de Gauss-Bonnet, sobre la curvatura total para un triángulo geodésico, el cual es establecido por Gauss como "la integral de la curvatura sobre un triángulo geodésico es igual a lo que excede la suma de los ángulos interiores de π ó, cuando la suma es menor que π, a lo que le falta para que alcance el valor π". De este resultado se sigue, por ejemplo que la suma de los ángulos interiores de un triángulo sobre el plano es π, sobre la esfera es mayor que π y sobre la pseudoesfera es menor que π.

En los últimas nueve secciones Gauss obtiene teoremas para comparar ángulos y el área de un triángulo geodésico en una superficie con los mismos elementos de triángulos y con las mismas longitudes en el espacio euclídeo. Gauss generaliza resultados de Legendre para triángulos geodésicos esféricos a triángulos geodésicos sobre superficies arbitrarias. Un ejemplo es el siguiente. Consideremos la superficie de la tierra como esférica, y más concretamente como un esferoide (el cual está menos curvado en los polos). Entonces Gauss obtiene diferentes correcciones para uno de los mayores triángulos geodésicos medidos por él: el que tiene por vértices en Brocken, Hohehagen y Inselsberg. Los lados de este triángulo son de una longitud de 69, 85 y 107 kilómetros aproximadamente. La suma de los ángulos de este triángulo excede en casi 15 segundos de los 180 grados. Los correspondientes ángulos del triángulo plano se reducen en 4,95104'', 4,95113'' y 4,95131''. Evidentemente son distintas reduciones porque en la fórmula obtenida por Gauss la reducción depende de la curvatura del vértice, y al considerar la tierra como un esferoide los puntos que más se aproximan al polo tendrán menor curvatura y por tanto una corrección angular menor. Posteriormente Gauss comentaría que *"Aunque en la práctica esta diferencia no es importante, y sólo apreciada para triángulos suficientemente grandes, la dignidad de la ciencia requiere que comprendamos claramente la naturaleza de estas desigualdades"*.

No cabe la menor duda de que la clave central del éxito del trabajo de Gauss radica en el mencionado Teorema Egregium y sus consecuencias. El resultado fundamental del Teorema es que la curvatura de una superficie puede calcularse independientemente de como o si la superficie está en el espacio tridimensional. Es decir, la curvatura de una superficie es independiente del espacio ambiente, pudiendo ser determinada tomando solamente medidas sobre la propia superficie. Realmente es fácil deducir que los geométras anteriores a Gauss consideraban una superficie o bien como constituida por una infinidad de curvas adosadas unas a otras, o que ésta era el borde de algún elemento sólido. Un ejemplo claro de ello está en el cálculo de la curvatura. Así, Euler obtenía la curvatura de una superficie calculando las direcciones principales (direcciones de máxima o mínima curvatura), tomando secciones al cortar la superficie por planos ortogonales a la misma, mientras que Gauss, usando el Teorema Egregium se olvidaba completamente del espacio ambiente y calculaba la curvatura tomando medidas en la superficie. Es decir, para Gauss la superficie en sí era un ente propio y el espacio ambiente no influía sobre ella para nada. Esta es quizás la idea y aportación más fundamental de Gauss en el estudio de la geometría diferencial de superficies. Pero todavía se puede hacer un balance más profundo de esta aportación. La primera forma fundamental de una superficie es inducida por la métrica euclídea del espacio ambiente. Así, uno podría olvidarse del espacio circundante e introducir otra, llamémosle, "primera forma fundamental" sobre la misma superficie. Con ello estamos introduciendo una nueva forma de tomar medidas sobre la superficie y por ello la geometría resultante sobre ella es diferente. Así, la misma superficie puede tener diferentes geometrías dependiendo de la elección de la forma de tomar medidas sobre ella. Lo mismo podríamos hacer en nuestro espacio tridimensional. De hecho la primera forma fundamental que se elige sobre una superficie procede de la elección de una medida euclídea sobre el espacio ambiente. Sin embargo se puede elegir diferentes expresiones para una métrica en nuestro espacio tridimensional y consecuentemente obtener geometrías diferentes sobre él. Evidentemente, estas ideas se pueden enlazar con la aparición y profundización del estudio de las geometrías no euclideas en la época de Gauss.

Uno de los más interesantes desarrollos en matemática comienza con el famoso axioma de las paralelas de Euclides, alrededor del año 325 antes de Cristo, el cual dió origen a profundos estudios y planteamiendos de multitud de cuestiones derivadas de su validez o no durante muchos siglos, teniendo incluso repercuciones sobre la configuración del universo y la unificación de la física, puestas de manifiesto en la teoría general de la relatividad de Einstein y las teorías gauges de nuestros días.

En sus Elementos, en donde Euclides construye su geometría, éste postula el tan discutido y controvertido postulado de las paralelas, a saber:

(P) Por todo punto exterior a una recta existe una única recta que lo contiene y no corta a la mencionada recta.

Históricamente, se profundizó en la cuestión de si el axioma P es independiente o es una consecuencia de otros axiomas de Euclides.

Hoy día no sólo sabemos que el axioma es independiente, sino que existen geometrías en donde este axioma es sustituido por otro diferente. Estas son las denominadas geometrías no Euclídeas elípticas e hiperbólicas , donde el axioma P es reemplazado, respectivamente, por:

($P_{\text{elíptica}}$) Por todo punto exterior a una recta no pasa ninguna recta paralela a la anterior.

($P_{\text{hiperbólica}}$) Por todo punto exterior a una recta existen infinitas rectas que lo contiene y no corta a la mencionada recta.

La geometría diferencial de Gauss unifica estas geometrías. Concretamente existen superficies que sirven de modelos para las geometrías elípticas e hiperbólicas.

Un modelo para la geometría elíptica se obtiene como sigue. Consideremos una semiesfera de radio R, donde incluimos el ecuador e identificamos los puntos antipodales de éste. Sobre este espacio las líneas rectas son los semicírculos máximos. Así, dos líneas se intersectan en un punto. La geometría sobre este espacio es la geometría esférica usual. La curvatura de Gauss es en este caso $K = 1/ R^2$.

Para describir la geometría hiperbólica podemos elegir el semiplano superior de Poincaré. Aquí, los semicírculos con centro el eje OX son geodésicas o "líneas rectas ". Así, si elegimo cualquier punto exterior a una de estas líneas, por él pasarán infinitas líneas que no intersectan a la primitiva. En este espacio la curvatura es $K = -1$. Otro modelo para esta geometría, debido a Beltrami (1868), se obtiene considerando un disco unitario en el plano y definiendo las líneas rectas como los segmentos de rectas en este disco con extremos en el borde del mismo. Es claro entonces que obtenemos otra vez una geometría hiperbólica.

Klein también obtuvo otros modelos de geometría elíptica e hiperbólica en el contexto de la geometría proyectiva.

Las superficies de curvatura constante nula, negativa o positiva son esencialmente los modelos de geometrías euclídea, y las no-euclídeas hiperbólicas y elípticas, respectivamente.

El estudio de las superficies de curvatura constante se remonta al siglo XVIII y puede decirse que los primeros resultados son debidos a Monge quien prueba que las superficies de curvatura nula son las superficies desarrollables, y Euler que había probado que las superficies aplicables en el plano eran las superficies desarrollables.

Se entiende por superficies aplicables las que son localmente isométricas. En el caso de superficies de curvatura constante positiva, éstas son aplicables sobre una esfera, y si la superficie es de curvatura negativa, se puede aplicar sobre una pseudoesfera (ésta es una superficie de revolución obtenida por rotación de una tractriz). Globalmente, en el espacio $\mathbb{R}^3$, la esfera es la única superficie completa de curvatura constante positiva, hecho que probó Liebmann en 1899. En esta misma dirección, el teorema de Hilbert sobre las superficies completas de curvatura negativa nos dice que no puede existir en $\mathbb{R}^3$ una superficie completa con curvatura negativa sin singularidades (la pseudoesfera tiene puntos singulares). No obstante, la geometría elíptica se puede realizar sobre la esfera, considerando una semiesfera como dijimos anteriormente, y la geometría hiperbólica se puede realizar sobre la pseudoesfera. Como veremos a continuación, estas geometrías juegan un importante papel en Cosmología.

La geometría del espacio.

Las ideas de separación de la superficie del espacio ambiente y de la separación del espacio de las posibles construcciones geométricas en el mismo, derivadas de la elección de una métrica determinada, son las bases en donde se sustenta la aportación de Riemann al estudio de la geometría diferencial. B. Riemann (1826-1866) era uno de los estudiantes de Gauss, de quien adquirió su interés por el estudio del mundo físico. Riemann se introdujo en el campo de la geometría con el estudio de los postulados de la geometría euclídea y también percibió, al igual que Gauss, que el axioma de las paralelas era independiente de los otros axiomas. La aportación más importante de Riemann a la geometría diferencial se encuentra en su memoria, que elaboró bajo la dirección de Gauss, para obtener el título de Privatdozent, la cual fue leida en 1854 y titulada "Sobre las hipótesis en las cuales subyacen los fundamentos de la geometría".

Su trabajo no fue simplemente una extensión de la geometría diferencial de Gauss. En su memoria, reconsideraba el modo de enfocar el estudio del espacio. Antes de Riemann, la geometría admitía como a priori, no sólo el concepto de espacio, sino también las ideas fundamentales de construcciones sobre el mismo. La primera idea de Riemann fue el separar definitivamente el espacio de las construcciones geométricas que se puedan realizar en él. Así, Riemann delibera sobre el concepto de variedad, como una generalización del concepto de superficie de Gauss para dimensiones arbitrarias, y posteriormente profundiza en el estudio de las relaciones métricas sobre una variedad, generalizando además el concepto de curvatura introducido por Gauss.

El trabajo de Riemann tiene además serias consecuencias sobre la propia configuración de nuestro espacio. Antes de Riemann, desde Euclides hasta Kant, se aceptaba que el espacio era plano. Riemann declaró que esta afirmación no era tan evidente, sino simplemente un hipótesis que habría que probar. De la misma forma se podrían hacer hipótesis sobre que el espacio era de curvatura constante positiva o negativa. Estas deliberaciones sobre la configuración de nuestro espacio será abordada posteriormente por uno de los genios más grande de nuestro siglo, Einstein.

Como es bien conocido, la teoría de la relatividad de Einstein fue desarrollada por éste fundamentalmente en dos trabajos, los cuales aparecen en 1905 y 1916, el primero concerniente a la teoría especial de la relatividad y el segundo a la teoría general. El principio fundamental de la teoría especial de la relatividad es que todos los procesos físicos tienen la misma forma para todos los sistemas inerciales, siendo además la velocidad de la luz una constante c. Con estè principio no hay una independencia entre el espacio y el tiempo como se presuponía desde siempre. Así, un cambio de espacio y tiempo entre sistemas inerciales es dado por una transformación de Lorentz y además todas las leyes físicas deben ser enunciadas de la misma forma en tales sistemas inerciales. Esto se consigue formulando tales leyes como leyes geométricas para la variedad espacio-tiempo de Minkowski de dimensión 4. En esta variedad, el cambio de coordenadas es dado por una transformación de Lorentz y la métrica es una métrica llana y de signatura (1,3).

Partiendo del principio de que las leyes generales de la naturaleza son expresadas en ecuaciones las cuales son válidas para todos los sistemas de coordenadas, Einstein formula las ecuaciones básicas de la relatividad general en una variedad de dimensión cuatro con una métrica no llana de signatura (1,3). Así, la diferencia entre la teoría general y especial es que en la teoría especial el tensor de curvatura de la variedad es nulo, mientras que en el caso general el tensor de curvatura es no nulo siempre que la materia esté presente. Esta curvatura es responsable del efecto gravitacional entre las masas.

Uno de los hechos más importante en la formulación de la teoría general de la relatividad de Eisntein es la interpretación geométrica de la gravedad a través de la curvatura de la variedad espacio-tiempo: cuanto mayor sea la densidad de masa en una cierta región, y así mayor intensidad del campo gravitatorio, mayor es la curvatura en esa región. Este tensor de curvatura está determinado por la distribución de las masas y la fuerza de la gravedad. Por ello en ausencia de masas, podemos considerar que la curvatura es nula, y si hay una distribución homogénea de masa, la curvatura tiende a ser constante. Esto tiene sus consecuencias, por ejemplo, en las trayectorias de la luz a través del universo y justifica sus desviaciones en las proximidades de grandes concentraciones de masas. Tambien tiene una importante influencia en el movimiento de los planetas en torno al Sol. En la teoría de Einstein los movimientos deben ser considerado en el espacio-tiempo cuatridimensional. Así, por ejemplo, los cálculos han probado que la orbita elíptica, que describe la tierra alrededor del sol según la teoría de Newton, no permanece estacionaria sino que gira lentamente con su eje mayor inclinándose en un pequeño ángulo en el transcurso de la revolución.

Geométricamente hablando, uno de los problemas fundamentales de la teoría general de la relatividad es la construcción e investigación de modelos evolutivos los cuales nos aporten las ideas definitivas de la manera de evolución de la métrica global del universo, y en consecuencia del propio universo. Tales variedades son denominadas modelos cosmológicos.

En la teoría general de la relatividad, los correspondientes espacios tridimensionales de curvatura constante pueden servir como modelos para nuestro cosmo. De hecho, es posible considerar tanto modelos de curvatura variable como modelos de curvatura constante positiva, negativa o nula. En estos últimos estan los denominados modelos cosmológicos cerrados y abiertos de Friedman, aunque éste sólo consideró el modelo cerrado. En estos modelos, se supone que para todo valor del tiempo, la métrica es en cierto sentido la misma en cada punto del espacio. De las observaciones astronómicas se prueba que en el presente estado de evolución del universo la distribución y expansión del universo es homogénea, lo cual es considerado en estos módelos de Friedman.

En un modelo cosmológico cerrado el cosmo consiste en la esfera tridimensional de radio r, donde el radio depende del tiempo r = r(ct) el cual puede ser determinado de las ecuaciones básicas de la teoría general de la relatividad. Aquí, el tiempo es positivo, y t=0 corresponde al instante del Big Bang. La variedad de espacio-tiempo 4-dimensional es entonces $E_4 = S^3_r \times \mathbb{R}^+$.

Un modelo cosmológico abierto se obtiene considerando, por ejemplo, como modelo espacial un cilindro $P^3_r = S^2_r \times \mathbb{R}^+$, al mismo tiempo que se elige una métrica adecuada en el espacio-tiempo cuatridimensional $E_4 = P^3_r \times \mathbb{R}^+$.

La elección de un modelo geométrico de curvatura positiva o negativa puede interpretar perfectamente nuestro cosmo sin que, hasta el momento, se obtenga contradicciones en ninguno de esos modelos. Es decir, cualquiera de los dos modelos es perfectamente válido. Sin embargo, las consecuencias posteriores son diferentes en un modelo u otro.

Si interpretamos los elementos geométricos para predecir la evolución del universo, nos encontramos con las siguientes predicciones.

En un modelo cosmológico cerrado el cosmo comienza a colapsar aproximadamente a los $200x10^9$ años después del big bang. Esto es motivado por ser el espacio esférico, pues en el instante del big bang la masa del universo estaba concentrada en un punto, y tras la explosión comienza la expansión del universo, que al tener un modelo esférico terminará nuevamente concentrado en un punto. El cosmo se irá poniendo cada vez más luminoso y claro, convirtiéndose en una bola de gas, la cual se irá poniendo al rojo y colapsará en un punto. Con esta teoría, a los $400x10^9$ años después del big bang, lo más probable es que ocurra otro big bang.

Con el modelo cosmológico abierto tendremos un futuro de oscuridad. En contraste con el modelo cerrado, en el modelo abierto el cosmo no colapsará. Así, la expansión actual del universo proseguirá indefinidamente, a medida que las estrellas se irán extinguiendo y se agotará el suministro de gas interestelar. El cielo se pondrá cada vez más oscuro, irán desapareciendo todos los objetos quedando al final los agujeros negros los cuales también desapareceran a los 10^{150} años después del big bang, quedando sólo en el vacio del cosmo algunos neutrinos y antineutrinos, así como electrones y positrones que andaran por el vacio con energía cada vez más débil. Esto es los que se suele denominar como una situación espectral o fantasmal.

Aunque uno pueda quedar escéptico con respecto a algunos detalles de estos modelos, muchos físicos estan convencidos de que uno de estos dos modelos es, bajo el aspecto cualitativo, el modelo correcto de nuestro universo. Los valores numéricos difieren en la literatura, debido a que los datos sobre la constante de Huble que determina la expansión del universo y los datos de la densidad de masa en el tiempo presente de nuestro cosmo son inciertos.

Evidentemente, la curvatura es un factor determinante que influye en cualquier modelo geométrico que se escoga para describir la evolución del universo. Es un índice preciso y absoluto de las propiedades geométricas del espacio tiempo.

Es cierto que el auge de la geometría diferencial aparece después del surgimiento de la teoría de la relatividad y de la sustitución en esta del espacio euclídeo soporte de la mecánica clásica por un espacio de curvatura no necesariamente nula. Pero tambien es cierto que Einstein tuvo exito en su teoría gracias a que el aparato geométrico diferencial había sido previamente elaborado, merced principalmente a los trabajos de Gauss primero y Riemann después. De hecho, los avances de la geometría diferencial y de la matemática en torno a la teoría de la relatividad en un principio eran tan incomprendidos que el propio Einstein bromeaba diciendo "*Desde el momento en que las matemáticas se abalanzaron sobre la teoría de la relatividad yo mismo dejé de comprenderla*".

La geometría diferencial también juega un papel importante en el estudio del problema de unificación a través de las teorías gauges . El desarrollo de este estudio está centrado en la idea de que la conexión en ciertos espacios fibrados principales induce una curvatura la cual causa las cuatro fundamentales interacciones, a saber: las débiles, las fuertes, las electromagnéticas y las gravitacionales. Evidentemente, para estos estudios se necesitan otros elementos y estructuras fundamentales que aparecen en los desarrollos modernos de la geometría diferencial : los grupos de Lie, espacios homogéneos, fibrados principales y vectoriales y conexiones en estos espacios, entre otras cosas, los cuales han surgido como consecuencia de la evolución de la geometría diferencial de Gauss y Riemann y de la búsqueda de estructuras matemáticas que se puedan utilizar como modelos para el estudio y resolución de problemas de nuestro mundo físico.

No quiero finalizar sin mencionar y reflexionar sobre una cita de Galileo Galilei quien en el siglo XVII afirmaba, quizás de forma muy osada, que *"quien entienda la geometría puede entender cualquier cosa en este mundo"*. Evidentemente es muy difícil, si no imposible, compartir tal afirmación, y menos todavía en los tiempos actuales. Sin intención de contradecir a Galileo y en reconocimiento de nuestra deuda a la contribución de un gran genio me atrevo terminar diciendo que *"la geometría de Gauss ha sido y será fundamental para el entendimiento de la evolución de nuestro mundo"*. Muchas gracias.

BIBLIOGRAFIA

C.B. Boyer, *"Historia de la Matemática"*. Alianza Editorial (1986), Madrid.

J-P. Collette, *"Historia de las Matemáticas"*, vol. I y II. Siglo XXI de España Editores (1985),

F. Dombrowski, *"Differential Geometry- 150 years after Carl Friedrich Gauss' Disquisitiones generales circa superficies curvas"* . Astérisque vol. 62 (1979).

B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, S.P. Novikov, *"Modern Geometry-Methods and Applications"*, vol. I y II. Springer-Verlag (1984), (1985), New York.

R.L. Faber, *"Differential Geometry and Relativity Theory"*. Marcel Dekker, Inc.(1983), New York.

C. F. Gauss, *"Disquisitiones generales circa superficies curvas"*, (1827).(Traducción Inglesa en Astérisque vol. 62 (1979)).

M. Kline, *"Mathematical Thought from Ancient to Modern Times"*. University Press (1972), Oxford.

B. O'neill, *"Semi-riemannian Geometry"*. Academic Press (1983), New York.

B. Riemann, *"Uber die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen"*, (1854). (Traducción Inglesa en M. Spivak, vol. 2 (1979)).

B.A. Rosenfeld, *"A History of Non-Euclidean Geometry"*. Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences 12, Springer-Verlag (1989), New York.

E. Zeidler, *"Nonlinear Functional Analysis and its Applications, IV"*. Springer-Verlag (1988), New York.