Recibido: miércoles, 24 mayo 2006

ciencia ::

matematicalia

revista digital de divulgación matemática

Vol. 2, no. 5 (dic. 2006)

El arte de multiplicar naranjas

César Luis García
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México (Río Hondo, México, D.F.)
e-mail: clgarcia@itam.mx

Pinche sobre una fórmula para ampliarla. Vuelva a pinchar sobre ella para reducirla, o pinche manteniendo pulsada la tecla [shift] para reducir todas las que permanezcan ampliadas.

Tomemos una fresca y jugosa naranja. Con un buen cuchillo cortemos a la naranja en cinco partes. Si cortaste las mismas partes que yo entonces te será muy fácil reacomodarlas sin dejar espacios ni sobreponerlas y formar... ¡dos naranjas idénticas a la original! ¿No? Bueno, ¿qué tal si ahora cortamos una naranja en, digamos, cuarenta partes y con éstas te digo que puedes armar una naranja tan grande como el Sol? –Imposible– dirás; pero no, las limitaciones son meramente técnicas y de habilidad para cortar, porque matemáticamente... ¡sí es posible hacerlo! Este es esencialmente el contenido de un teorema de Stefan Banach (1892-1945) y Alfred Tarski (1902-1983), también conocido como la *paradoja de Banach-Tarski*.

Para explicar un poco qué tipo de partes de naranja debemos cortar, permíteme unas palabras sobre el arte de medir.

Medir es una actividad inherente a la naturaleza humana. No hay duda de que casi cualquier actividad del ser humano puede verse como una acción de medir, pues medir es comparar, y comparamos a cada instante. Cuando uno pasa de medir longitudes de caminos, áreas de parcelas o volúmenes de esferas, a tratar de asignar longitud, área o volumen a objetos que sean más caprichosos en forma y descripción, surge inmediatamente el siguiente problema: definir una buena noción de medida de longitud, área o volumen para tales objetos. El espacio ambiente donde trataremos de medir longitud es la recta real, $\mathbb{R}$, área en el plano, $\mathbb{R}^2$, y volumen en $\mathbb{R}^3$.

Stefan Banach (i) y Alfred Tarski [M]

El problema de medir

Discutamos, para empezar, el caso de medir longitudes. ¿Cuál debería ser una buena noción de medida de longitud en $\mathbb{R}$?

En principio, si $P(\mathbb{R})$ denota la familia de subconjuntos de los números reales, una *medida de longitud* será una función

$$\lambda : P(\mathbb{R}) \to [0,\infty] \qquad (1)$$

Es decir, una función que a cada subconjunto de $\mathbb{R}$ le asocie un valor no negativo (su longitud). Además, si I es un intervalo de la forma (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$, con $a,b \in \mathbb{R}$, $a \le b$, la función λ debe asociarle el valor que nuestra experiencia dice debe tener, es decir, $\lambda(I) = b - a$. Para intervalos no acotados de la forma $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, (a,∞), $[a,\infty)$, $(-\infty,\infty)$ la longitud debe ser ciertamente infinita. En símbolos:

$$\lambda(I)=\begin{cases} b-a, & \text{si } I \text{ es acotado con extremos } a,b \\ \infty, & \text{si } I \text{ no es acotado} \end{cases} \qquad (2)$$

Nota que en el caso particular en que $a=b$ el intervalo (a,b) es el conjunto vacío y su longitud debe ser cero, y en el caso de un intervalo $[a,a]$ la longitud del conjunto $\{a\}$ es cero.

La longitud de un conjunto no debe variar si trasladamos al conjunto o si lo reflejamos con respecto al origen, es decir, si $a\in\mathbb{R}$ y $A\in P(\mathbb{R})$ entonces

$$\lambda(A+a)=\lambda(-A)=\lambda(A) \qquad (3)$$

¿Qué otra propiedad pedir para λ? Bueno, es natural pedir que si dos conjuntos no se intersecan entonces la longitud de su unión sea la suma de las longitudes de los conjuntos. En general diríamos que si $A_1,A_2,\ldots,A_n$ son subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $A_i\cap A_j=\varnothing$ cuando $i\neq j$, entonces

$$\lambda(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\lambda(A_1)+\lambda(A_2)+\ldots+\lambda(A_n) \qquad (4)$$

Usualmente se dice que λ es *finitamente aditiva* si (4) se cumple. Pero, ¿qué longitud asociaríamos a la unión de los siguientes intervalos: $I_1=[0,1)$, $I_2=[1,3/2)$, $I_3=[3/2,7/4)$, $I_4=[7/4,15/8)$, $I_5=[15/8,31/16)$,...? Notemos que los intervalos $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ son disjuntos dos a dos y la suma de sus longitudes es la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, cuya suma es 2. Entonces lo natural sería que la unión de los intervalos $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ tuviese longitud 2. Así, si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $A_i\cap A_j=\varnothing$ cuando $i\neq j$, entonces

$$\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\lambda(A_1)+\lambda(A_2)+\lambda(A_3)+\ldots \qquad (5)$$

Y diríamos que λ es σ–aditiva (se lee *sigma-aditiva*) si (5) se cumple. Las propiedades (1)...(3) serían obligadas para una buena noción de medida. Pero tenemos una disyuntiva: ¿pedimos que se cumpla la propiedad (4), o la (5)? Claramente, la propiedad (5) implica la (4). Definamos entonces una buena medida de longitud como aquella que satisface (1), (2), (3) y (5).

Muy bien, pero, ¿será posible encontrar una buena medida de longitud λ? La respuesta no es en absoluto trivial y depende del *axioma de elección*. El axioma de elección es un axioma de la teoría de conjuntos para el que hay dos posibilidades: o lo aceptas o no lo aceptas. Las posibilidades son estas porque se ha demostrado que este axioma no es falso ni verdadero, sino independiente de los otros axiomas de la teoría (como en el caso del quinto postulado de Euclides sobre las líneas paralelas). Muchos teoremas fundamentales de la matemática moderna dependen del axioma de elección, y nuestro problema de encontrar una buena medida de longitud es uno de ellos. Existe, por otro lado, una corriente matemática (igual que como diríamos hay una corriente filosófica) que procura obtener teoremas sin apelar al axioma de elección: el *constructivismo*.

¿Qué dice el axioma de elección? Dice que *si tienes una colección de conjuntos no vacíos entonces puedes elegir simultáneamente un elemento de cada conjunto*.

Si asumimos el axioma de elección, entonces no es posible encontrar una buena medida de longitud, es decir, una λ que satisfaga (1), (2), (3) y (5) ¿Por qué? Porque Giuseppe Vitali (1875–1932) mostró que se puede usar el axioma de elección para exhibir un conjunto al que no se le puede asignar longitud. La construcción del ejemplo de Vitali no es extremadamente complicada, pero requiere de cierto grado de entrenamiento en matemáticas. Una construcción puede consultarse, por ejemplo, en [R, pp. 64–66].

¿Cuál debe ser el siguiente paso si no queremos tirar la toalla? Bueno, como sí queremos una medida de longitud, lo que procede es tratar de debilitar alguna de las condiciones (1), (2), (3) y (5) con la esperanza de obtener resultados positivos. Podríamos comenzar cambiando la σ–aditividad (5) por la aditividad finita (4), que *a priori* es una condición más débil.

Debemos enfatizar que (5) es una propiedad muy deseable para λ: ¿cómo, si no, calcularíamos la medida de la unión de intervalos disjuntos que vimos anteriormente? ¿Por aproximación usando (4)? Es decir, ¿será posible que

$$\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda(I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j)\,? \qquad (6)$$

Malas noticias: la primera igualdad es equivalente a la σ–aditividad de λ. Es más, una de las razones importantes para tener σ–aditividad es precisamente para gozar de propiedades de "intercambio de límite" como en la primera igualdad de (6).

Si se cambia la condición de σ–aditividad (5) por la de aditividad finita (4), Banach comprobó que sí es posible obtener una medida de longitud λ que también satisfaga (1), (2), (3), y de hecho esta λ no es única. Una demostración muy elegante de la existencia de λ en este caso se puede hacer vía el famosísimo teorema de extensión de Hans Hahn (1879-1934) y Banach[1] [BN, pp. 188-194]. Sin embargo, ya mostramos que esta λ no es del todo adecuada para nuestros fines.

Si queremos mantener la σ–aditividad de λ, ¿qué otra condición de entre (1), (2), (3) podríamos debilitar y obtener una medida de longitud razonable? Las propiedades (2), (3) son verdaderamente deseables; aún desde el punto de vista de nuestra experiencia cotidiana, son propiedades naturales que debemos conservar. Por eliminación nos queda solamente por cambiar (1), pero ¿qué le cambiamos? Pues aquí sí que no hay otra: ¡el dominio de λ!

Cambiar el dominio de λ es permitir que haya subconjuntos de $\mathbb{R}$ cuya longitud no podremos calcular. Pero hay buenas noticias: Henri Lebesgue (1875-1941) formuló en 1901 una teoría de la medida en donde es posible definir una medida de longitud λ (la *medida de Lebesgue*) invariante bajo traslaciones y reflexiones, σ–aditiva y que asocia a cada intervalo su longitud. Así, aun cuando tenemos que padecer conjuntos no medibles, la familia de conjuntos a los que sí podemos asignarles longitud –los *medibles Lebesgue*– es muy rica (tiene tantos elementos como subconjuntos de los números reales) y contiene, en particular, a los intervalos. Para ser justos diremos que también habrá tantos subconjuntos no-medibles Lebesgue como subconjuntos de los reales, aunque para exhibir un no-medible Lebesgue es obligado usar el axioma de elección.

Para cerrar esta sección comentemos un poco sobre los análogos para medidas de área y de volumen o, en general, hipervolumen (en $\mathbb{R}^n$). Si $P(\mathbb{R}^n)$ es la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, buscamos una función $\lambda_n : P(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ que sea invariante bajo transformaciones rígidas (en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ serían, por ejemplo, rotaciones o traslaciones o combinaciones de ambas), que a cada producto cartesiano de intervalos $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ le asocie su hipervolumen, es decir, el valor $\lambda(I_1)\cdot\lambda(I_2)\cdot\cdots\cdot\lambda(I_n)$ (en $\mathbb{R}^2$ correspondería al área de rectángulos, mientras que en $\mathbb{R}^3$ sería el volumen de cajas rectangulares), y por último que sea finitamente aditiva, o σ–aditiva.

Si sólo se pide que λ_n sea finitamente aditiva entonces para $n=2$ (el caso del plano) Banach demostró también la existencia (no única) de λ_2. Por otro lado, Felix Hausdorff (1868-1942) probó que no puede haber una tal λ_n para $n \geq 3$.

Si se restringe el dominio de λ_n, como hicimos en el caso de longitudes, y se pide que λ_n sea σ–aditiva e invariante bajo transformaciones rígidas, entonces se muestra que existe una medida de Lebesgue para $\mathbb{R}^n$ que asocia a cada "rectángulo" su volumen n–dimensional.

De regreso a Banach-Tarski

La paradoja de Banach-Tarski es un hecho sorprendente que contradice a todas luces nuestra intuición, específicamente el principio de conservación de volumen: ¿cómo, si no, haríamos un rompecabezas usando una naranja para re-ensamblar estas piezas en una esfera sólida tan grande como el Sol? Ante la evidencia de que hay conjuntos que no pueden tener volumen, las partes en las que dividimos a la naranja deberán ser necesariamente conjuntos no-medibles, y la habilidad para dividir a una naranja en conjuntos no-medibles descansa en el axioma de elección.

Para el lector intrigado sobre los detalles de la elaboración misma de los rompecabezas, el artículo de Karl Stromberg [S] ofrece un argumento relativamente fácil que dice cómo dividir una naranja en cuarenta partes (el número de piezas no es óptimo, se sabe que puede ser más pequeño) para que un re-ensamblado de éstas produzca una naranja tan grande como se quiera. Para duplicar una naranja basta con cortarla en cinco piezas, y quizá la mejor y más divertida exposición de ello sea el artículo de Robert French [F].

Reconocimientos

Este trabajo ha sido apoyado por la Asociación Mexicana de Cultura, A.C.

Referencias

[BN] G. Bachman, L. Narici: *Functional Analysis.* Academic Press, New York, 1966.

[F] R.M. French: The Banach-Tarski theorem. *Mathematical Intelligencer* 10, no. 4 (1988), 21–28.

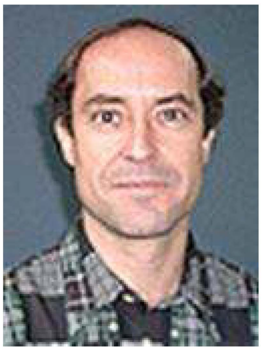
[M] *The MacTutor History of Mathematics archive*, http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history.

[R] H.L. Royden: *Real Analysis* (3ª. ed.). Macmillan, New York, 1998.

[S] K. Stromberg: The Banach-Tarski paradox. *American Mathematical Monthly* 86, no. 3 (1979), 151–161 [Disponible en JSTOR: http://www.jstor.org].

---

[1] El teorema de Hahn-Banach, por cierto, también depende del axioma de elección.



Sobre el autor

César Luis García es Profesor Titular del Departamento de Matemáticas del Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM). Especialista en Análisis Funcional (Geometría de Espacios de Banach) se doctoró en la Universidad de Texas A&M bajo la dirección de William B. Johnson. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México. Ha escrito como autor o coautor diversos artículos de investigación y divulgación.