



A propósito de los prismas y antiprismas

Eliseo Borrás

Departamento de Matemáticas
IES F. Ferrer i Guardia (Valencia)
e-mail: eborras@mail.ono.es

Javier Carvajal

Departamento de Didáctica de la Expresión Musical, Plástica y Corporal
Universidad de Valencia
e-mail: haplokuon@hotmail.com

Pinche sobre una fórmula para ampliarla. Vuelva a pinchar sobre ella para reducirla, o pinche manteniendo pulsada la tecla [shift] para reducir todas las que permanezcan ampliadas.

Introducción

En una charla informal en la que Javier mostraba su hermosa colección de poliedros que macizan el espacio –de la exposición *De Natura Reticular*– surgieron los antiprismas y una cuestión referente a ellos:

¿Qué relación hay entre el volumen de un antiprisma y el prisma correspondiente de igual altura?

Contamos el desarrollo de los acontecimientos...

Precisemos un poco de qué estamos hablando.

Un **prisma** es un cuerpo terminado en dos caras planas, paralelas e iguales que se llaman bases, y por tantos paralelogramos cuantos lados tenga cada base. Si estas son triángulos, el prisma se llama triangular; si cuadrados, cuadrado; si pentágonos, pentagonal; etc.

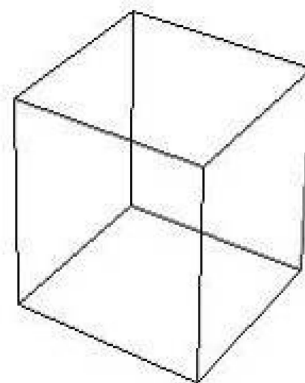


Figura 1. Prisma cuadrado.

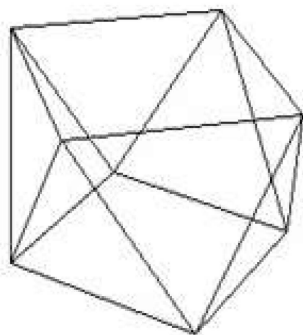


Figura 2. Antiprisma cuadrado.

Un **antiprisma** es un sólido formado por dos polígonos regulares iguales, situados en dos planos paralelos, siendo cada uno de los vértices de uno de ellos equidistante de dos vértices del otro, por lo que las caras laterales son triángulos. Si las bases son triángulos, el antiprisma se llama triangular; si cuadrados, cuadrado; si pentágonos, pentagonal; etc.

Volumen de prismas y antiprismas: Primer método

Javier imaginó que, mediante cortes y pegados convenientes, podría comparar los volúmenes del antiprisma y del prisma. Unos días después había construido los primeros antiprismas y comprobó que, efectivamente, es posible transformarlos en los prismas correspondientes de igual altura, más dos pirámides iguales de base rectangular en cada cara (lo llamaremos *método de recomposición*, ver [Figura 3](#)).

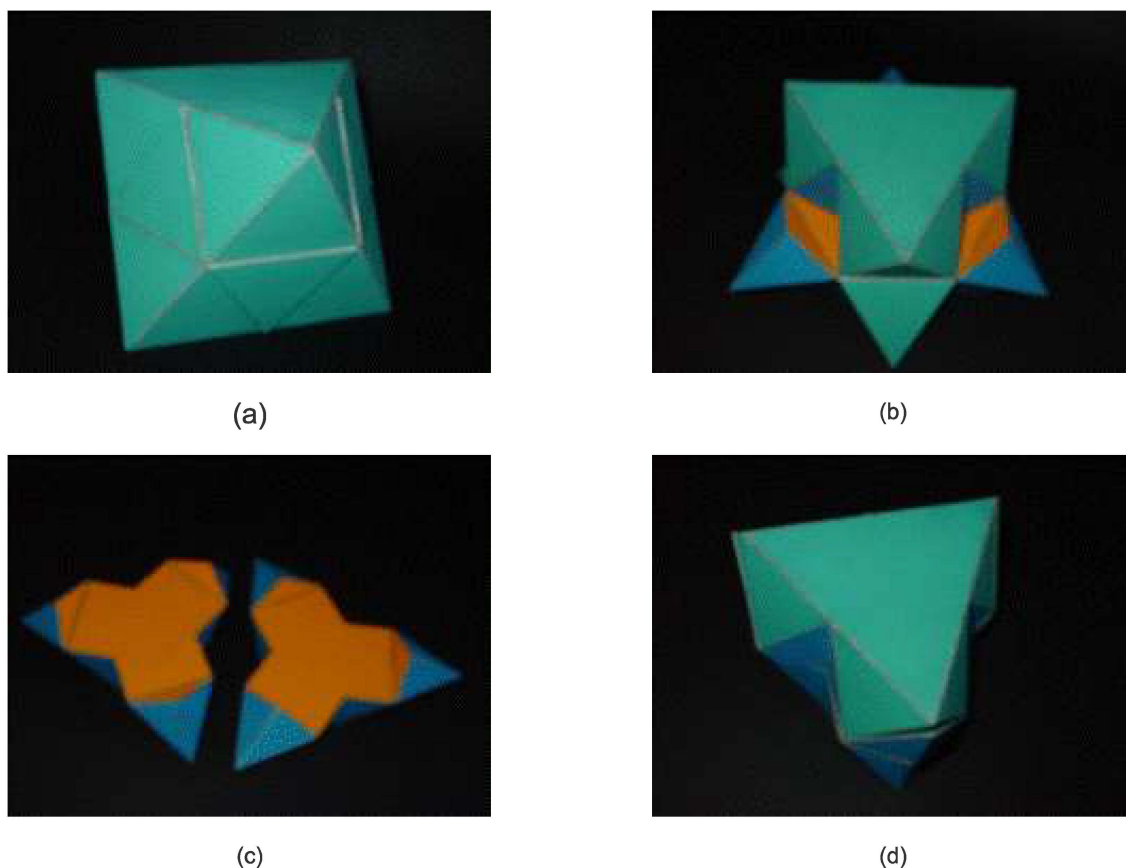


Figura 3. Transformación del antiprisma triangular u octaedro (a) en un prisma triangular de igual altura más dos pirámides rectangulares por cara (d), mediante los pasos intermedios (b) y (c).

En la [Figura 4](#) observamos el antiprisma cuadrado y su sección media. De manera similar a la anterior, podemos transformarlo en un prisma cuadrado con dos pirámides rectangulares por cada cara.

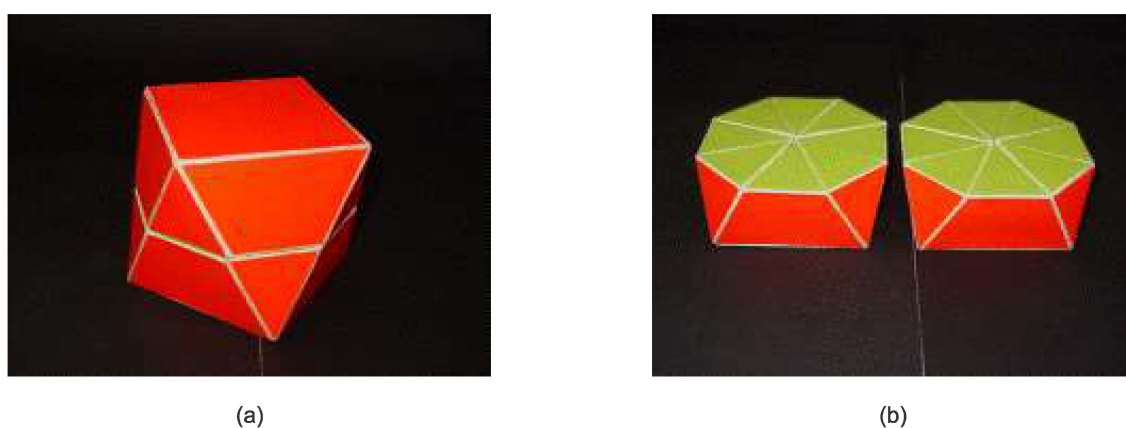


Figura 4. Antiprisma cuadrado (a) y sección media (b).

Parece, pues, que los antiprismas tienen más volumen que los prismas correspondientes de igual altura (ver también [Figura 10](#)). Para calcular los volúmenes efectivos, el siguiente dibujo ([Figura 5](#)), en el que están representadas en planta las dos bases y la sección media del antiprisma, clarifica el método que hemos seguido:

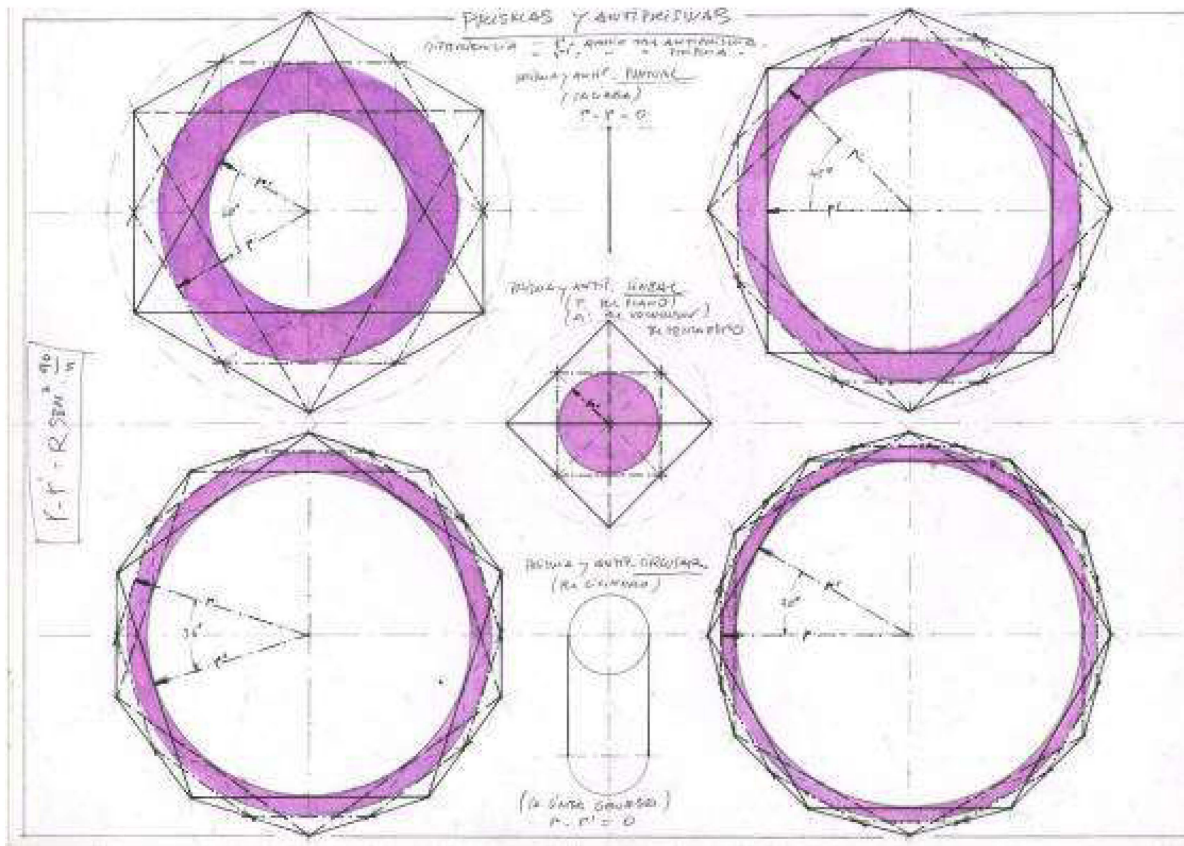


Figura 5. Representación en planta de las dos bases y la sección media de los antiprismas triangular, cuadrado, pentagonal y hexagonal.

Sea R el radio de la circunferencia que circunscribe a los polígonos básicos de n vértices; r el radio del círculo inscrito en la sección del antiprisma por la altura media; R_m el radio del círculo circunscrito a dicha sección; y r' el radio del círculo inscrito al triángulo de la base. Se tiene:

$$r' = R \cos \frac{\pi}{n}; \quad R_m = R \cos \frac{\pi}{2n}; \quad r = R \cos^2 \frac{\pi}{2n}.$$

El volumen del antiprisma lo calculamos siguiendo el método de recomposición dado anteriormente, que conduce al prisma y dos pirámides rectangulares por cada cara de éste, cuya altura es la diferencia $\Delta r = r - r'$ entre los radios:

$$\Delta r = R \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2n}$$

La gráfica de esta función es la de la Figura 6.

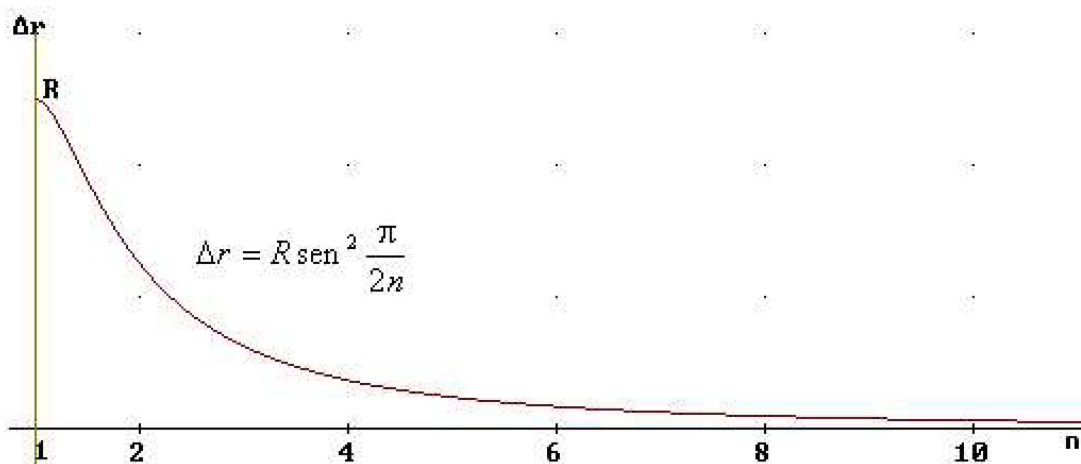


Figura 6. Δr es la diferencia entre el radio r del círculo inscrito en la sección del antiprisma por la altura media y el radio r' del círculo inscrito al triángulo de la base de n vértices.

Así que si tomamos como variables el radio R y la altura h , o el lado l de los polígonos básicos y la altura h , obtenemos para el volumen del prisma (V_p), de las pirámides (V_{pir}) y del antiprisma (V_a):

$$l = 2R \operatorname{sen}(\pi/n)$$

$$V_p = \frac{1}{2} n \operatorname{sen}(2\pi/n) R^2 h = \frac{1}{4} n \cot(\pi/n) l^2 h \quad (1)$$

$$V_{pir} = 2n \frac{1}{3} \frac{1}{2} l h \Delta r = \frac{2}{3} n \operatorname{sen}(\pi/n) \operatorname{sen}^2(\pi/2n) R^2 h = \frac{1}{6} n \frac{\operatorname{sen}^2(\pi/2n)}{\operatorname{sen}(\pi/n)} l^2 h \quad (2)$$

$$V_a = \frac{2}{3} n \left(\frac{1}{2} + \cos(\pi/n) \right) \operatorname{sen}(\pi/n) R^2 h = \frac{1}{6} \frac{n}{\operatorname{sen}(\pi/n)} \left(\frac{1}{2} + \cos(\pi/n) \right) l^2 h \quad (3)$$

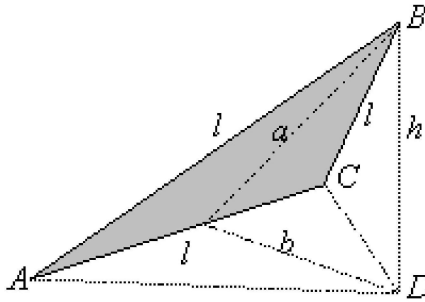


Figura 7. ABC es una cara lateral de un antiprisma de altura h , de caras regulares de lado l , cuya altura es a . ACD es el triángulo de altura h , en cuyo plano se apoya el antiprisma.

Si las caras laterales del antiprisma son regulares, teniendo en cuenta la **Figura 7** obtenemos:

$$a = \frac{l\sqrt{3}}{2}, \quad b = R - r' = R - R\cos(\pi/n) = R(1 - \cos(\pi/n))$$

$$h^2 = a^2 - b^2 = \frac{l^2}{2} (3 - \tan^2(\pi/2n))$$

$$h = \frac{l}{2} \sqrt{3 - \tan^2(\pi/2n)} \quad (4)$$

Si sustituimos h en (1), (2) y (3), obtenemos relaciones en función del lado l y del número de vértices n .

Ejemplos

Si l es la arista:

1. Prisma y antiprisma triangular (octaedro regular):

$$V_p \approx 0,35l^3, \quad V_{pir} \approx 0,11l^3, \quad V_a \approx 0,47l^3$$

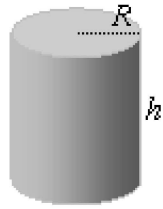
2. Prisma y antiprisma cuadrado:

$$V_p \approx 0,84l^3, \quad V_{pir} \approx 0,12l^3, \quad V_a \approx 0,96l^3$$

Casos límite

Hay tres casos especiales:

a) Cuando n tiende a infinito el volumen del prisma es el del cilindro, como era de esperar; el de las pirámides es 0; y el del antiprisma es también el del cilindro:



$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_p = \lim_{n \rightarrow \infty} V_a = \pi R^2 h$$

Figura 8. Antiprisma y prisma de infinitos vértices.

b) Cuando n es 1, el prisma y el antiprisma se reducen a una recta, por lo que su volumen es 0.



$$V_p = V_a = 0$$

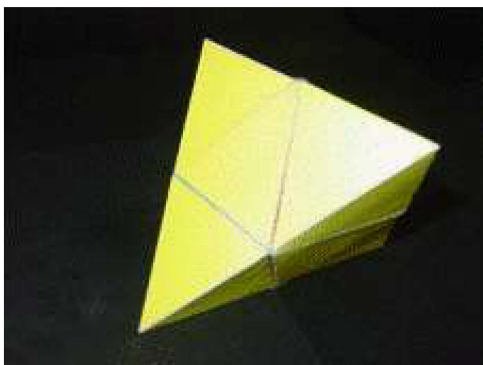
Figura 9. Antiprisma y prisma de 1 vértice.

c) Cuando n es 2, el prisma, que podemos llamar *prisma lineal*, se reduce a un rectángulo, cuyo volumen es 0; pero el *antiprisma lineal* tiene el volumen del tetraedro (ver Figura 10):

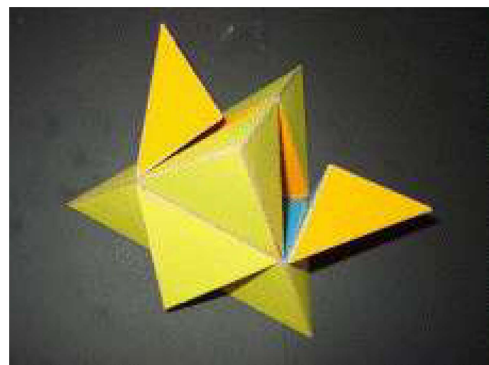
$$V_a = \frac{2}{3} R^2 h = \frac{1}{6} l^2 h$$

y como ahora es $l = 2R$, $h = \frac{l}{\sqrt{2}}$, se obtiene:

$$\text{Volumen antiprisma lineal} = \text{Volumen tetraedro} = \frac{\sqrt{2}}{12} l^3$$



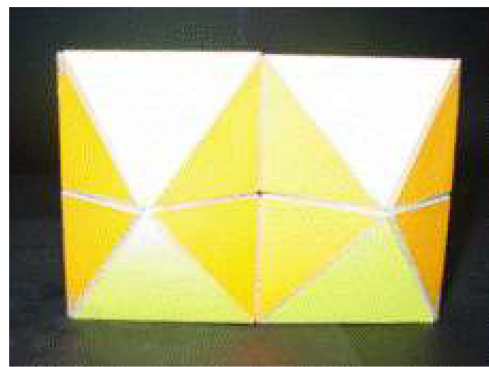
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 10. El *antiprisma lineal* o tetraedro (a) se reduce a un *prisma lineal*, que es un rectángulo, más cuatro pirámides de base rectangular (d), mediante los pasos intermedios (b) y (c).

Volumen de prismas y antiprismas: Segundo método

El antiprisma puede descomponerse en tetraedros de modo que el centro de aquél sea el origen de coordenadas. Asignando coordenadas a los vértices, se puede calcular el volumen de cada uno mediante determinantes. En la Figura 11 se observa la descomposición en tetraedros en el antiprisma cuadrado.

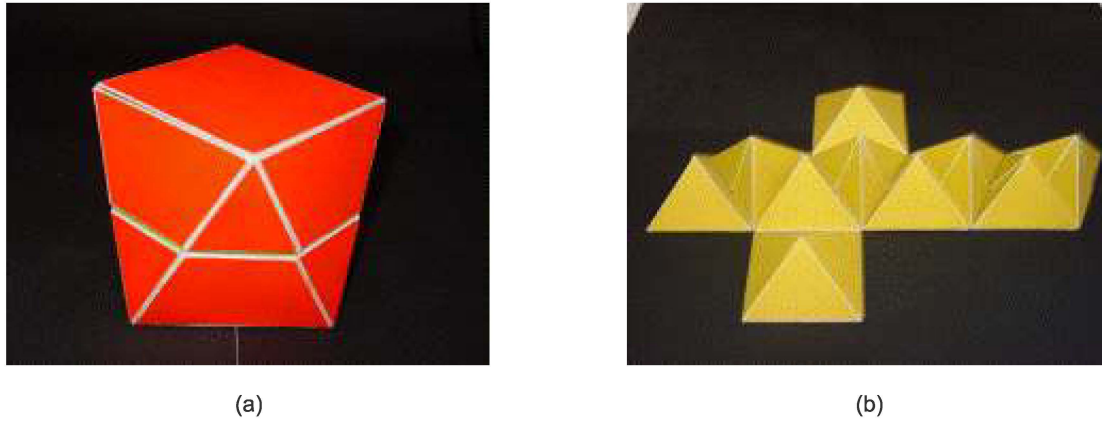


Figura 11. El *antiprisma cuadrado* (a) se descompone en 8 tetraedros y dos pirámides de base cuadrada (b).

Podemos asignar a cada prisma y antiprisma las coordenadas de sus vértices en un sistema de ejes cartesianos 3D:

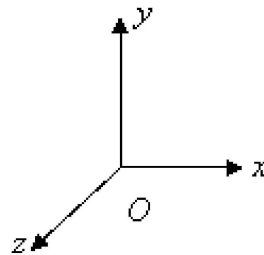


Figura 12. Sistema de coordenadas cartesiano cuyo centro O es el del antiprisma.

Si situamos las bases en planos paralelos al plano xOy , las coordenadas x e y son las componentes de los números complejos que siguen, siendo α el ángulo entre dos vértices consecutivos:

$$\alpha = 2\pi / n$$

$$z_k = \operatorname{Re}^{ik\alpha}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \text{ si } n \text{ es impar}$$

$$z_k = \operatorname{Re}^{i(k\alpha + \alpha/2)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \text{ si } n \text{ es par.}$$

Para la otra base, las coordenadas son, respectivamente:

$$z'_k = \operatorname{Re}^{ik\alpha}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \text{ si } n \text{ es par}$$

$$z'_k = \operatorname{Re}^{i(k\alpha + \alpha/2)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \text{ si } n \text{ es impar.}$$

La tercera coordenada es la mitad de la altura del antiprisma: $-h/2$ y $h/2$, lo que dará las coordenadas Z_k y Z'_k .

Todo antiprisma regular de n vértices básicos se descompone en $2n$ tetraedros iguales -cuyos vértices son: dos de una de las bases, uno de la base opuesta, y el cuarto es el centro del prisma- y 2 pirámides iguales, cuya base es la del antiprisma y cuyo vértice es el centro del antiprisma. Por tanto, para hallar el volumen total, basta hallar el de un tetraedro y el de una pirámide.

El del tetraedro determinado por los vectores $v_0 = OZ_0$, $v_1 = OZ_1$, $v'_0 = OZ'_0$ es:

$$V_t = \frac{1}{6} |\det(v_0, v_1, v'_0)| = \frac{1}{6} \text{abs} \begin{vmatrix} R & 0 & \frac{h}{2} \\ R \cos \frac{2\pi}{n} & R \sin \frac{2\pi}{n} & \frac{h}{2} \\ R \cos \frac{\pi}{n} & R \sin \frac{\pi}{n} & -\frac{h}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} R^2 h \sin \frac{\pi}{n} \left(1 + \cos \frac{\pi}{n} \right)$$

El de la pirámide es:

$$V_p = \frac{1}{6} n R^2 h \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}$$

Por lo tanto, el volumen del antiprisma es:

$$V_a = 2nV_t + 2V_p = \frac{2}{3} n \left(\frac{1}{2} + \cos(\pi/n) \right) \sin(\pi/n) R^2 h,$$

que es el mismo resultado que el obtenido en (3).

Áreas

Puestos a calcular, puede comprobarse que el área total de prismas y antiprismas es, respectivamente, si $h \neq 0$:

$$A_p = nR^2 \sin \frac{2\pi}{n} + 2nRh \sin \frac{\pi}{n}$$

$$A_a = nR^2 \sin \frac{2\pi}{n} + 2nRh \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{1 + \frac{R^2}{h^2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)^2}$$

Así que **el área del prisma es siempre menor que la del antiprisma correspondiente de la misma altura**, excepto en los dos casos límite: $n = 1$, que es 0; y $n \rightarrow \infty$, que es $2\pi R^2 + 2\pi Rh$.

Si el antiprisma es regular, teniendo en cuenta el valor de h dado por (4), se obtienen las bonitas fórmulas:

$$A_p = \frac{1}{2} n l^2 (\cot(\pi/4) + \sqrt{3 - \tan^2(\pi/2n)})$$

$$A_a = \frac{1}{2} n l^2 (\cot(\pi/4) + \sqrt{3})$$

Antiprismas y poliedros platónicos

Es habitual representar el tetraedro y el cubo apoyados sobre una de sus caras, mientras que los otros tres poliedros regulares se apoyan sobre uno de sus vértices. La manipulación de los cuerpos permite descubrir otros puntos de vista que aportan nuevas representaciones y relaciones:

Si un tetraedro se apoya sobre una de sus aristas (Figura 10a), constatamos que es un antiprisma lineal ($n = 2$).

Si un octaedro se apoya sobre una de sus caras (Figura 3a) estamos frente al antiprisma de orden 3 ($n = 3$).

El cubo es un prisma de orden 4 ($n = 4$).

Si apoyamos un icosaedro por uno de sus vértices (Figura 13a), y lo cortamos por arriba y abajo mediante un corte plano que suprima las pirámides pentagonales correspondientes, obtenemos una rodaja (Figura 13b) que es un antiprisma de orden 5 ($n = 5$).

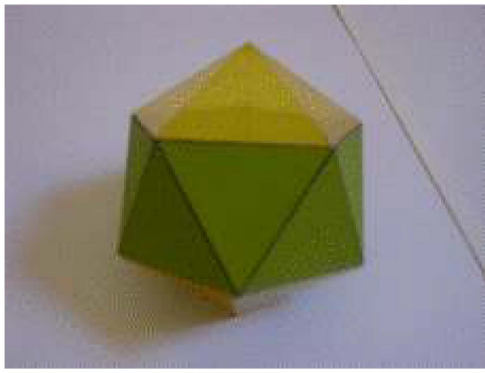


Figura 13a. Apoyamos un icosaedro por uno de sus vértices.



Figura 13b. Lo cortamos por arriba y abajo, mediante un corte plano que suprima las pirámides pentagonales correspondientes. Obtenemos una rodaja que es un antiprisma de orden 5 ($n=5$).

No es posible formar un antiprisma a partir del complejo dodecaedro.

Sobre el concepto de prisma y de antiprisma

Cualquiera que sea el polígono básico, convexo o cóncavo, regular o irregular, no parece difícil llegar a un acuerdo para definir el correspondiente prisma. No ocurre lo mismo con la definición de antiprisma: para construir el antiprisma de un prisma regular se gira, respecto al centro de simetría del polígono básico, una de las bases respecto a la otra la mitad del ángulo central. Se podrían admitir ángulos de giro hasta un máximo igual al citado anteriormente, con lo que cada prisma admitiría infinitos antiprismas, cuyas caras laterales ya no serían obligatoriamente triángulos isósceles (Figura 14).

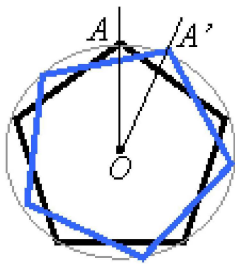


Figura 14. Giro de la base de un prisma respecto a la otra un ángulo AOA' , alrededor del eje de simetría del prisma.

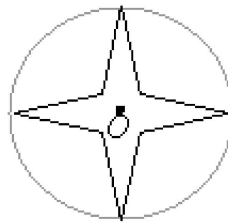


Figura 15. Base del prisma y del antiprisma.

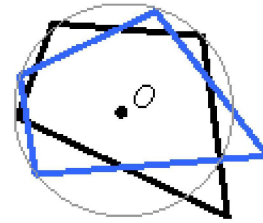


Figura 16. Giro de la base de un prisma de base irregular respecto a la otra un ángulo AOA' , alrededor del eje que pasa por un punto dado O .

Si el prisma es cóncavo, como una estrella (Figura 15), pueden surgir diversas interpretaciones acerca de cómo construir el antiprisma. En todo caso, el cálculo del volumen puede reducirse al de prismas convexos.

Un prisma irregular tiene como bases polígonos irregulares (iguales y paralelos); las caras laterales siguen siendo rectángulos (si el prisma es recto), pero no iguales. Generalizar la definición de antiprisma en estos casos no parece tan sencillo, ya que: ¿qué centro escogemos para girar una base respecto a la otra?

Tal como se indica en la Figura 16, podríamos elegir tres puntos del polígono y girar el polígono respecto al centro de la circunferencia que determinan; pero también podríamos elegir el centro de gravedad del polígono, para no priorizar ningún punto; etc. Hay, pues, demasiadas posibilidades para definir antiprismas irregulares desde un único prisma irregular.

Si el polígono básico tiene centro de simetría y, de todos los giros posibles, elegimos el menor, entonces sólo habrá un antiprisma correspondiente a cada prisma dado.

En la Figura 17 se muestra el caso de un antiprisma cuya base es el rectángulo.

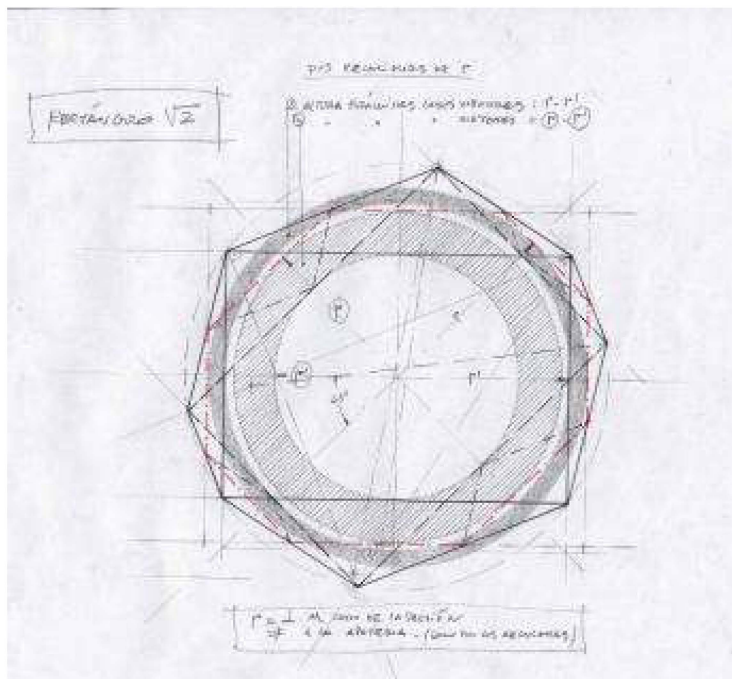


Figura 17. Construcción de las bases del antiprisma rectangular $\sqrt{2}$.

En la Figura 18 se observan los cortes iniciales para reconstruir el prisma rectangular $\sqrt{2}$ partiendo del antiprisma correspondiente.

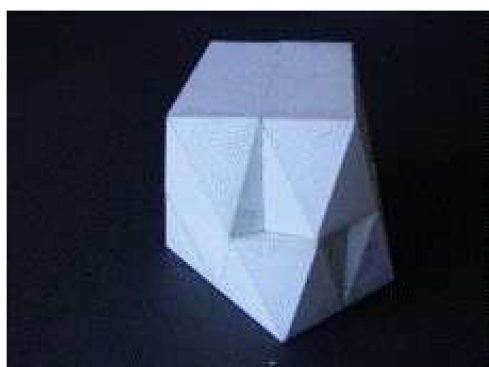


Figura 18. Reconstrucción del prisma rectangular $\sqrt{2}$ partiendo del antiprisma correspondiente.

En el caso general, si se conocen los vértices de los polígonos de las bases, el cálculo del volumen del antiprisma puede realizarse mediante un programa de ordenador basado en el cálculo del volumen de tetraedros, tal como hemos indicado anteriormente, tomando como centro de coordenadas el punto medio del eje del antiprisma -¡siempre que sea descomponible en dichos tetraedros!-.

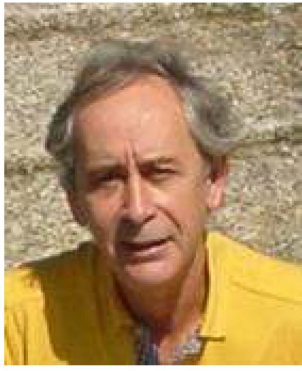
Conclusiones

Dice George W. Hart, creador de una [página web de poliedros virtuales](#), que la mejor manera de aprender acerca de los poliedros es construyendo uno propio. La segunda mejor manera es jugando con uno que alguien haya hecho previamente (Hart, 1996). Y, en efecto, gracias a la interacción entre el lenguaje plástico y el algebraico hemos encontrado fórmulas sobre volúmenes y áreas de los antiprismas, hermosos modelos arquitectónicos, y posibles ampliaciones del concepto de antiprisma. Además, en nuestra búsqueda de información, nos hemos enterado de que los antiprismas son modelos atómicos de muchos materiales químicos. ¡No son tan raros!

Sobre los autores

Eliseo Borrás Veses es licenciado en Ciencias Físicas por la Universidad de Madrid, doctor en Matemáticas por la Universidad Politécnica de Barcelona. Profesor de matemáticas de enseñanza secundaria en el IES "F. Ferrer i Guardia" de Valencia, ha sido profesor asociado, durante cuatro años, en el Departamento de Álgebra de la Facultad de Matemáticas de Burjassot (Valencia). Ha impartido cursos de formación permanente para profesores de enseñanza secundaria. Dirigió el proyecto de enseñanza de las matemáticas del Grupo Cero y colaboró en el Programa de Formación permanente de profesores en la Comunidad Valenciana. Autor de libros, artículos y conferencias sobre el aprendizaje de las matemáticas en la enseñanza primaria y secundaria y temas de carácter interdisciplinar, ha coordinado diversas exposiciones con Javier Carvajal Baños y Pilar Moreno Gómez.





Javier Carvajal Baños es licenciado en Bellas Artes por la Facultad de San Fernando de Madrid. Ha realizado estudios de solfeo y guitarra en los conservatorios de León y Madrid. Profesor titular del Departamento de Didáctica de la Expresión Musical, Plástica y Corporal de la Universidad de Valencia, desde 1976 es socio y colaborador del Movimiento de Renovación Pedagógica "Acción Educativa" (Madrid). Es autor de numerosos trabajos, exposiciones, cursos y conferencias de carácter interdisciplinar relacionando la plástica con los diversos lenguajes (musical, matemático, lingüístico), por los que ha recibido varios premios. Colaborador con el Grupo Cero de Matemáticas en varias publicaciones y congresos, ha impartido cursos de geometría en la Facultad de Matemáticas de Burjassot (Valencia), así como cursos de formación permanente para profesores de enseñanza secundaria.



matemática

revista digital de divulgación matemática
