THE MYSTERY CALCULATOR : Un truco numérico

Juan Antonio García Cruz
C.E.I. de La Laguna

Actualmente está de moda enfocar la enseñanza de la Matemática a través de la solución de problemas. Esta es la primera de las recomendaciones que, para la década de los ochenta, hace el Consejo Nacional de Enseñantes de Matemáticas de U.S.A. en su fascículo *An Agenda for Action: Recomendations for school Mathematics of the 1980s*, N.C.T.M., Washinton, 1980.

La idea en sí es mucho más vieja; parte de los trabajos y publicaciones de G. Polya a raíz de la primera edición de *How to solve it* en 1945 (Traducción española: Como plantear y resolver problemas, Edit. Trillas, México 1978).

En un artículo publicado por el mismo autor en la edición de Noviembre de 1949 del *California Mathematics Council Bulletin*, caracteriza a la inteligencia como "*la habilidad de solucionar problemas : los problemas diarios, personales, sociales, científicos, puzzles, toda clase de problemas*", concluyendo que "*si la educación falla en su contribución al desarrollo de la inteligencia, aquella será obviamente incompleta*" y, por lo tanto, "*el principal deber del profesor de Matemáticas es hacer todo lo que esté de su mano para desarrollar en sus alumnos la habilidad para solucionar problemas*".

Cualquier situación que pueda ser matematizada y que posea, además, cierto carácter lúdico capaz de atraer la curiosidad de cualquier alumno,puede ser el comienzo de una incursión para alumno y profesor en la técnica de la resolución de problemas.

Nada mejor que un truco numérico como "The Mystery Calculator" que llegó a mis manos gracias a un sobre sorpresa que su abuelo regaló a mi hijo Carlos,de tres años y medio. Al verlo recordé haber jugado a él en mi infancia y que ya entonces me había sorprendido e intrigado.

Para el juego se dispone de las seis tarjetas siguientes:

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

THE MYSTERY CALCULATOR

The complete set consists of 6 cards, printed with a series of numbers, Show all the cards to a friend and ask him or her to select one number from any one card. Show the other five cards to your friend asking him or her to say whether the number appears on these cards. Take all the cards on which your friend says the number appears, add together the top left hand corner number of each card and the total is the number your friend selected.

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Y esta es la regla de juego : Muestre las tarjetas a un amigo y pídale que elija un número cualquiera de los que figuran en las tarjetas. Dígale,entonces,que le entregue sólo aquellas tarjetas en las que se encuentre el número elegido. Acertará usted dicho número si suma los que aparecen en la esquina superior izquierda de las tarjetas recibidas.

Si el lector siente curiosidad,es el momento de dejar de leer y pasar a desentrañar por sí mismo el fundamento del truco.

He aquí mi análisis :

Supongamos,por ejemplo,que el número elegido sea el 39. Este aparece sólo en cuatro tarjetas y,por tanto,la operación a realizar para adivinarlo es sumar 32,4,2 y 1.

Los números que aparecen en la esquina superior izquierda de las otras dos tarjetas que no hemos utilizado son el 16 y el 8. Luego, para adivinar cualquier número elegido, siempre utilizaremos todos o algunos de los siguientes números 32,16,8,4,2 y 1 ,es decir, 2^5 , 2^4 , 2^3 , 2^2 , 2^1 , 2^0.

Pues bien, cuando nuestro amigo nos entregó las cuatro tarjetas que contenían al número 39, nos lo estaba dando en base 2, y nosotros lo pasamos a base 10 al realizar la suma.

$$
\begin{aligned}
39 &= 100111 \text{ (en base 2)} \\
&= 1.2^5 + 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 \\
&= 32 \quad + 4 \quad + 2 \quad + 1
\end{aligned}
$$

Pero, ¿cómo se han construido las tarjetas?

El sistema binario de numeración nos lo indica también. Si tomamos, por ejemplo, el número 46, este se escribe en binario como

1 0 1 1 1 0

y en forma polinómica

$$1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$$

o también

$$1.32 + 0.16 + 1.8 + 1.4 + 1.2 + 0.1$$

Pues bien, esta última expresión nos dice en qué tarjetas hemos de ubicar el número 46 : "*este tendrá que figurar en las tarjetas que comiencen por* 32 , 8 , 4 y 2.

Cada tarjeta contiene 32 números, algunos en común con otras tarjetas, pues hemos visto que el 46 se repite en cuatro de ellas. Si nos preguntásemos por qué esto es así, esta simetría que presentan las tarjetas, ello nos conduciría a un problema de combinatoria o de aplicación de la "técnica de conteo".

El autor ha limitado el juego -pues, como veremos más adelante, admite otras variantes- al uso de 6 tarjetas. Ello equivale a elegir números en binario con un máximo de 6 cifras significativas.

Para escribir el total de números en binario, con a lo sumo 6 cifras significativas, disponemos de seis posiciones y, en cada posición, empleamos sólo las cifras 0 ó 1.

Sabemos, además, por lo visto anteriormente, que aquellos números que tengan un 1, por ejemplo, en la posición $2^3=8$, irán en la tarjeta que comienza por 8.

¿Cuántos de estos números hay? Es decir, números, de a los sumo seis cifras significativas en binario que contengan un 1 en la posición 2^3. Veamos:

Situemos un 1 en la posición 2^3

$$\frac{}{2^5}\quad \frac{}{2^4}\quad \frac{1}{2^3}\quad \frac{}{2^2}\quad \frac{}{2^1}\quad \frac{}{2^0}$$

Quedan, entonces, cinco posiciones por cubrir con las cifras 0 y 1. Luego tenemos un total de

$$2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

$$\frac{}{2^5}\quad \frac{}{2^4}\quad \frac{1}{2^3}\quad \frac{}{2^2}\quad \frac{}{2^1}\quad \frac{}{2^0}$$

Es decir, 32 números han de figurar en la tarjeta que comienza por 8. Esta situación es idéntica para cada posición. Tenemos, por tanto, 32 números en cada tarjeta.

Generalizando : Si utilizaramos n tarjetas, comenzando cada una por los números $2^0, 2^1, 2^2, \ldots\ldots, 2^{n-1}$, tendríamos 2^{n-1} números en cada tarjeta.

Veamos las distintas posibilidades de que disponemos:

número de tarjetas n	total de núms. en c/u 2^{n-1}
...	...
3	4
4	8
5	16
6	32
7	128
...	...

Esta es la posibilidad elegida por el autor

Como podemos observar en la tabla anterior,el autor ha optado por una solución óptima: 6 tarjetas. Evita así que un excesivo número de tarjetas dilate demasiado la realización del juego y,por otro lado,impide la trivialidad que supondría emplear un número muy reducido de ellas.

La fundamentación matemática de este sencillo juego supone,como hemos visto,el uso del sistema binario de numeración,la notación polinómica de un número y técnicas de conteo.

Si el lector puede sacarle más partido,le agradecería que me lo comunicara.

SOCIEDAD CANARIA DE PROFESORES DE MATEMATICAS

TECNICAS DE TRABAJO INTELECTUAL APLICADAS A LA MATEMATICA

CUADERNO N° 3: LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMATICAS