

In memoriam del Prof. Dr. D. Joaquín Cascante Dávila

José M. Méndez Pérez

El día 6 de marzo de 1.998 falleció en Barcelona el Prof. Dr. D. Joaquín Cascante Dávila. Este hecho, que ha pasado completamente desapercibido en nuestra comunidad matemática, me produjo una gran tristeza y me ha retrotraído al año 1.968, nada menos que 35 años atrás, cuando ingresé en esta Universidad de La Laguna para estudiar el Selectivo de E. T. S. y cursar la carrera de Matemáticas.



La Laguna y el mundo universitario eran otra cosa, ahora añorable. No sé cómo, pero la mayoría de los estudios se impartían en el actualmente casi abandonado Edificio Central, cuyos pasillos eran un hervidero de jóvenes estudiantes de todas las especialidades, que convivían e intercambiaban experiencias, estableciéndose lazos de compañerismo y amistad entre gentes de Ciencias, de Letras, de Derecho..., lo que contrasta con la situación de hoy en día con un Campus tan dividido y separado que los estudiantes y profesores de un Centro apenas se relacionan con los de otros. Además, la Universidad era el centro por excelencia de las actividades culturales y de reivindicación del cambio democrático que exigía la sociedad.

Números.

Volumen 56, diciembre de 2003, páginas 41-48

Prácticamente no había nada edificado entre las calles María del Cristo Ossuna y Dr. Antonio González (detrás de La Aneja). La situación era tan distinta que hasta las vacas de Mateo, alguna vez, decidían escaparse de su vasta finca y cultivarse cruzando por la librería Tinerfeña para pastar en el mismísimo jardín de la Universidad.

En el bar universitario de D. Salvador, después de D. Francisco y Benjamín, o en los Colegios Mayores, o en otros sitios de esparcimiento y de reunión de estudiantes (Artillería, La Oficina, Bar La Carrera, Bodegón Méndez, el Dos y Uno, Bar Canarias...) contábamos las anécdotas de nuestros profesores, de aquellos especímenes universitarios, figura ésta casi en extinción. Había catedráticos, personajes de gran cultura, o de gran prestigio, o de fuerte personalidad y especial carácter, o con todos esos ingredientes a la vez, que de todo había en esta Universidad del Señor. Recordemos en la Facultad de Derecho a los profesores Felipe González Vicens, José M^a. Hernández Rubio, Juan Roca Juan, Eulogio Alonso Villaverde, Alejandro Nieto, Juan Miquel González de Audicana, Manuel Cobo del Rosal,...; por la Facultad de Filosofía y Letras a los profesores Jesús Hernández Perera, Gregorio Salvador Caja, Antonio Betancourt Massieu, Eugenio Burriel, Javier Muguerza,...; por la Facultad de Ciencias, a los profesores Antonio González, Agustín Arévalo, Benito Rodríguez, Enrique Casasas,...en Químicas; a los profesores Carlos Blesa, Enrique Fernández Caldas, Wolfredo Wilpredt,...en Biología; D. Teleforo Bravo en Geología; a los profesores Arturo Hardisson y Francisco Rubio en Física,...y, como no, a D. Joaquín Cascante, D. Nácere Hayek y D. Nicolás Miguel Zalote en Matemáticas.

Nació D. Joaquín en Barcelona el 2 de agosto de 1.925. Obtuvo el grado de Bachillerato en 1.943, con premio extraordinario. En 1.951 se licenció en Ciencias (Sección de Matemáticas) por la Universidad de Barcelona. Posteriormente, en 1.960, accedió al título de Ingeniero Industrial por la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Barcelona.

Es Doctor en Ciencias (Sección de Matemáticas) por la Universidad de Barcelona. Leyó la Tesis Doctoral, titulada "Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de orden superior" y dirigida por el Prof. J. Augé, en el año 1.960. El título de Doctor Ingeniero Industrial lo consiguió en 1.976.

En 1.964, después de haber dado clases de Matemáticas tanto en la Facultad de Ciencias como en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial en Barcelona, obtuvo por oposición la Cátedra de Análisis Matemático 2 y 3 (para desempeñar Matemáticas Especiales 1 y 2) de la Universidad de La Laguna. Por entonces, mediante concurso de traslado, era fácil en nuestra especialidad pasar de una universidad a otra,

pero todos sospechábamos que él no se iría de La Laguna si no era para trasladarse a su tierra natal. Y así fue, después de 6 años entre nosotros, en 1.970 se incorporó al Departamento de Teoría de Funciones de la Universidad de Barcelona, donde se jubiló en 1.990.

Quizás también me apene ver con cuanta facilidad se olvida la labor desarrollada por las personas, su obra. Acaso no fuera D. Joaquín un virtuoso de la pedagogía, pero le adornaban —en mi opinión— otras cualidades que me gustaría evocar brevemente: su honestidad y amor por las Matemáticas y su rigurosa, a veces hasta la exageración, concepción de ellas.

En el primer punto, D. Joaquín sentía predilección y mimaba a los estudiantes que, entonces, se atrevían a estudiar Matemáticas. Recuerdo que en aquella enorme aula inclinada, con una luz roja al fondo que destellaba para señalar que la clase había terminado y que él rara vez la percibió, colocaba —por estricto orden alfabético de apellidos— en primer lugar a los matemáticos, siendo la primera fila de sillas; en segundo lugar, en los siguientes bancos, iban los estudiantes de Arquitectura, y en lo que restaba los estudiantes de las diversas Ingenierías. El secreto de aprovechar las clases radicaba en sentarse lo más cerca posible de la pizarra, por lo que los ingenieros de vez en cuando desposeían a los matemáticos de alguna silla. A mí me tocó esa desgracia y entonces opté por amontonar el Babor-Ibarz de Química General Moderna con el Sears-Zemansky de Física General y el Píset y Zamansky de Matemáticas Generales (Álgebra-Análisis) y ocupé mi lugar sentándome en tan científica silla. Cuando D. Joaquín de dio cuenta, me echó una parrafada de la que entendí que me pedía que dejara de hacer el Cantinflas, pero fue a un laboratorio cercano y me trajo una silla, eso sí, con la advertencia de que no la perdiera más.

Anécdotas al margen, no debemos olvidar nunca el papel fundamental que tuvo D. Joaquín en la creación de esta Facultad de Matemáticas, pues a su tesón y empeño se debió la autorización para impartir el primer ciclo. Para predicar con el ejemplo, además de dar Cálculo Infinitesimal y Álgebra Lineal en primer curso, en segundo se encargó de explicar Análisis Matemático y Topología, casi la mitad de las asignaturas que componían ese nuevo curso. Los bedeles decían que era el Catedrático que más tarde abandonaba su despacho, de noche.

En cuanto a la segunda parte, agradezco a D. Joaquín que nos haya inculcado el sentido del rigor, de que los asuntos matemáticos —por obvios que parezcan— necesitan ser verificados rigurosamente.

Como homenaje a él, me permito extraer de sus apuntes de Cálculo Infinitesimal (confeccionados con una vieja multicopista por un grupo de sus alumnos) la precisa definición de convergencia de una sucesión de números reales. O de lo contrario, de cuando una sucesión no es convergente (muchos alumnos tienen ahora una gran dificultad en entender cuando una sucesión diverge. Unos conocimientos elementales de Lógica Matemática ayudaría mucho a superar este problema).

CONVERGENCIA EN \mathbb{R} .

Sea $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{G}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$

" $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{G}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ es convergente en \mathbb{R} " $\Leftrightarrow (\exists p_0) (p_0 \in \mathbb{R} \text{ y } (\forall \epsilon) (\epsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists v) (v \in \mathbb{N} \text{ y } (\forall n) (n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq v \Rightarrow |p_n - p_0| < \epsilon)))$)

" $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{G}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ no converge en \mathbb{R} hacia $p_0 \in \mathbb{R}$ " $\Leftrightarrow (\exists \epsilon) (\epsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall v) (v \in \mathbb{N} \Rightarrow (\exists n) (n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq v \text{ y } |p_n - p_0| \geq \epsilon)))$

" $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{G}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ no converge en \mathbb{R} " $\Leftrightarrow (\forall p_0) (p_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow (\exists \epsilon (p_0)) (\epsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall v) (v \in \mathbb{N} \Rightarrow (\exists n) (n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq v \text{ y } |p_n - p_0| \geq \epsilon(p_0))))$)

O la de límite de una función real

LÍMITE FUNCIONAL.

Sea $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función numérica definida sobre un conjunto E , del cual es $x_0 \in E'$, punto de acumulación del mismo; la función f puede no estar definida en $x = x_0$ ($f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no está definido en $x \notin E$, si $x_0 \notin E$). Por definición, pondremos: $\ll \text{Existe } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \gg \Leftrightarrow (\forall \epsilon) (\epsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists \alpha) (\alpha \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall x) (x \in E \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\text{ y } x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - y_0| < \epsilon)))$

Se podrá formular también:

$\ll \text{Existe } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \gg \Leftrightarrow (\forall \epsilon) (\epsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists \alpha) (\alpha \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall x) (x \in E \text{ y } |x - x_0| < \alpha \text{ y } x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - y_0| < \epsilon)))$

y como se tiene: $0 < |x - x_0| < \alpha \Leftrightarrow |x - x_0| < \alpha \text{ y } x \neq x_0$,

podemos poner también: $\ll \text{Existe } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \gg \Leftrightarrow (\forall \epsilon) (\epsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists \alpha) (\alpha \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall x) (x \in E \text{ y } 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - y_0| < \epsilon)))$.

Obsérvese, que en virtud de las definiciones precedentes, se puede escribir:

$\ll \text{Existe } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \gg \Leftrightarrow (\exists y_0) (y_0 \in \mathbb{R} \text{ y } (\forall \epsilon) (\epsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists \alpha) (\alpha \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall x) (x \in E \text{ y } 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - y_0| < \epsilon)))$

Se suele a veces escribir, en lugar de $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, la expresión: $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - y_0)$.

D. Joaquín fue un bourbakista confeso. Cuenta el Prof. Zalote que cuando le pidió a D. Joaquín que le dirigiera la Tesis, éste le espetó: "Sí, Zalote, pero primero tienes que leer todos estos libros". Y le señaló la estantería donde guardaba la colección completa.

En la prueba del siguiente aserto, modelo de formalismo y rigor, aparecen todos los pasos a que seguiría una mente humana en la elaboración de la demostración, como si cada instante de ese proceso mental se pudiera fotografiar a cámara lenta.

PRINCIPIO DE ENCAJE.-

« Dada una sucesión decreciente de intervalos cerrados de la recta numérica, cuya correspondiente sucesión de longitudes converge en \mathbb{R} hacia cero; existe en estas condiciones un punto y sólo uno, perteneciente a todos los intervalos de la sucesión y tal que, para cualquier intervalo abierto al cual pertenezca el punto considerado, existe un número natural con la particularidad de que todos los intervalos de la sucesión con índices no menores que dicho número, están contenidos en el intervalo abierto considerado. »

Expresado de otro modo:

$$\begin{aligned} & \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}, (\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow (\exists (a_n, b_n))((a_n, b_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ y } a_n \leq b_n \text{ y } I_n = [a_n, b_n])) \text{ y} \\ & \text{y } (\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow I_n \supset I_{n+1}), (b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}} \dots \dots \dots \text{ converge en } \mathbb{R} \text{ hacia cero} \Rightarrow \\ \Rightarrow & (\exists \xi)(\xi \in \mathbb{R} \text{ y } (\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow \xi \in I_n) \text{ y } \xi \text{ es único en estas condiciones) y} \\ & \forall (a, b)((a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ y } a < b \text{ y } \xi \in]a, b[\Rightarrow (\exists \nu)(\nu \in \mathbb{N} \text{ y } (\forall n)(n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq \nu \Rightarrow \\ & \Rightarrow I_n = [a_n, b_n] \subset]a, b[)) \end{aligned}$$

Demostración:

Veamos primero que existe un punto de la recta que pertenece a todos los intervalos, es decir $(\exists \xi)(\xi \in \mathbb{R} \text{ y } (\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow \xi \in I_n)$

Sean los intervalos $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$ de la forma:

$$\begin{aligned} I_1 &= [a_1, b_1] \\ I_2 &= [a_2, b_2] \\ I_3 &= [a_3, b_3] \\ \dots & \dots \dots \dots \\ I_n &= [a_n, b_n] \\ \dots & \dots \dots \dots \\ I_{n+1} &= [a_{n+1}, b_{n+1}] \end{aligned}$$

Se podrá afirmar por lo tanto:

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \Rightarrow a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n, \text{ es decir,}$$

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \leq a_{n+1} \text{ y } b_n \geq b_{n+1}) \Leftrightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es monótona creciente y}$$

$$\text{y } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es monótona decreciente.}$$

Veamos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son convergentes en \mathbb{R} .

$$\text{Por ser } \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \quad \text{Se tiene:}$$

$$(\forall \varepsilon)(\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) \Rightarrow (\exists \nu)(\forall n)(n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq \nu \Rightarrow |b_n - a_n| = b_n - a_n < \varepsilon))$$

$$\text{y por tanto: } (\forall \varepsilon)(\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) \Rightarrow (\exists \nu)(\forall n)(n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq \nu \Rightarrow |b_n - a_n| < \varepsilon))$$

$$\text{Ahora bien: } (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ y } p \geq \nu \text{ y } q \geq \nu \Rightarrow [a_p, b_p] \subset [a_\nu, b_\nu] \text{ y } [a_q, b_q] \subset [a_\nu, b_\nu]$$

$$\text{, es decir, } a_\nu \leq a_p < b_p \leq b_\nu \text{ y } a_\nu \leq a_q < b_q \leq b_\nu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_\nu \leq a_p \leq b_p \text{ y } a_\nu \leq a_q \leq b_p \text{ y } a_\nu \leq b_p \leq b_\nu \text{ y } a_\nu \leq b_q \leq b_\nu. \text{ Por tanto:}$$

$$(a_p, a_q) \in [a_\nu, b_\nu] \times [a_\nu, b_\nu] \text{ y } (b_p, b_q) \in [a_\nu, b_\nu] \times [a_\nu, b_\nu]$$

$$\text{Como: } (\forall (x, x'))((x, x') \in [a, b] \times [a, b] \Rightarrow |x - x'| \leq b - a) \quad \text{ya que:}$$

$$(x, x') \in [a, b] \times [a, b] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \leq x \leq x' \leq b \\ \text{ó} \\ a \leq x' < x \leq b \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x - x'| = x' - x \leq b - a \\ \text{ó} \\ |x - x'| = x - x' \leq b - a \end{array} \right.$$

$$\text{De modo similar se demuestra: } (\forall (x, x'))((x, x') \in [a, b] \times [a, b] \Rightarrow |x - x'| < b - a)$$

$$\text{Se puede poner finalmente: } (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ y } p \geq \nu \text{ y } q \geq \nu \Rightarrow |a_p - a_q| \leq b_p - a_p < \varepsilon$$

$$\text{y } |b_p - b_q| \leq b_p - a_p < \varepsilon \quad \text{Por ser } \varepsilon \text{ arbitrario:}$$

$$(\forall \varepsilon)(\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) \Rightarrow (\exists \nu)(\forall n)(n \in \mathbb{N} \text{ y } (\forall (p, q))((p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ y } p \geq \nu \text{ y } q \geq \nu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a_p - a_q| < \varepsilon \text{ y } |b_p - b_q| < \varepsilon)) \Leftrightarrow "(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es de Cauchy en } \mathbb{R} \text{ y}$$

$$\text{y } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es de Cauchy en } \mathbb{R} " \Leftrightarrow "(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge en } \mathbb{R} \text{ y}$$

$$\text{y } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge en } \mathbb{R} "$$

Sea $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ y veamos que es asimismo $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$

Podemos escribir, teniendo en cuenta que $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ que:

$$(\forall \varepsilon) (\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists (v_1, v_2)) ((v_1, v_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ y } (\forall n) (n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq v_1 \Rightarrow |a_n - \xi| < \frac{\varepsilon}{2}) \text{ y } (\forall n) (n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq v_2 \Rightarrow b_n - a_n = |b_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{2})))$$

Sea $v = \max. \{v_1, v_2\}$

$n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq v \Rightarrow |a_n - \xi| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } |b_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

$n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq v \Rightarrow |b_n - \xi| = |(b_n - a_n) - (\xi - a_n)| \leq |b_n - a_n| + |\xi - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Por ser ε arbitrario:

$(\forall \varepsilon) (\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists v) (v \in \mathbb{N} \text{ y } (\forall n) (n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq v \Rightarrow |b_n - \xi| < \varepsilon))) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ll (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en \mathbb{R} hacia $\xi \gg$

Ahora bien, por ser $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ creciente y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ decreciente,

$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \Rightarrow (\forall n) (n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \leq \xi \leq b_n)$; Es decir,

$(\forall n) (n \in \mathbb{N} \Rightarrow \xi \in [a_n, b_n])$ que es lo que se quería demostrar.

ξ pertenece, pues, a todos los intervalos.

Veamos ahora la unicidad de ξ en las condiciones anteriores.

Es decir, $\xi' \in \mathbb{R} \text{ y } (\forall n) (n \in \mathbb{N} \Rightarrow \xi' \in [a_n, b_n]) \Rightarrow \xi' = \xi$

Procedamos por reducción al absurdo, admitiendo,

$\xi' \in \mathbb{R} \text{ y } (\forall n) (n \in \mathbb{N} \Rightarrow \xi' \in [a_n, b_n]) \text{ y } \xi' \neq \xi$

$\xi' \neq \xi \Rightarrow \varepsilon = |\xi - \xi'| > 0$; y como: $(\forall n) (n \in \mathbb{N} \Rightarrow (\xi, \xi') \in [a_n, b_n] \times [a_n, b_n])$

se verifica, por tanto: $(\forall n) (n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 < \varepsilon = |\xi - \xi'| \leq b_n - a_n)$

Es decir, $(\forall v) (v \in \mathbb{N} \Rightarrow (n = v \Rightarrow b_n - a_n \geq b_n - a_n \geq \varepsilon))$

Por lo tanto, $(\forall v) (v \in \mathbb{N} \Rightarrow (\exists n) (n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq v \text{ y } b_n - a_n \neq |b_n - a_n| \geq \varepsilon))$

y en consecuencia, $(\exists \varepsilon) (\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall v) (v \in \mathbb{N} \Rightarrow (\exists n) (n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq v \text{ y } |b_n - a_n| \geq \varepsilon))) \Leftrightarrow \text{no } ((b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge en } \mathbb{R} \text{ hacia cero})$

Esto último es una contradicción con la hipótesis y se ha obtenido por así admitir $\xi' \neq \xi$. Por lo tanto debe ser $\xi = \xi'$.

Veamos finalmente la segunda parte del teorema:

$$(\forall (a, b)) ((a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ y } a < b \text{ y } \xi \in]a, b[\Rightarrow (\exists v) (\forall n) (n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq v \Rightarrow I_n = [a_n, b_n] \subset]a, b[))$$

$$\text{Como ya sabemos, } (\forall (a, b)) ((a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ y } a < b \text{ y } \xi \in]a, b[\Rightarrow (\exists \varepsilon) (\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \text{ y }]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[\subset]a, b[)) \quad (1)$$

Ahora bien, por ser $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes en \mathbb{R} hacia ξ .

$$\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists (v_1, v_2)) ((v_1, v_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ y } (\forall n) (n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq v_1 \Rightarrow \xi - \varepsilon < a_n < \xi + \varepsilon) \text{ y } (\forall n) (n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq v_2 \Rightarrow \xi - \varepsilon < b_n < \xi + \varepsilon))$$

Tomando $v = \max. \{v_1, v_2\}$

$$n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq v \Rightarrow \xi - \varepsilon < a_n \leq b_n < \xi + \varepsilon, \quad \text{y por tanto:}$$

$$(\forall x) (a_n \leq x \leq b_n \Rightarrow \xi - \varepsilon < x < \xi + \varepsilon) \Leftrightarrow (\forall x) (x \in [a_n, b_n] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[) \Rightarrow [a_n, b_n] \subset]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[$$

Como según (1) $] \xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[\subset]a, b[$, queda:

$$n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq v \Rightarrow [a_n, b_n] \subset]a, b[\text{ [En definitiva:}$$

$$(\forall (a, b)) ((a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ y } a < b \text{ y } \xi \in]a, b[\Rightarrow (\exists v) (\forall n) (n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq v \Rightarrow I_n = [a_n, b_n] \subset]a, b[))$$

Quizás uno se perdía entre tantos cuantificadores, implicaciones, paréntesis... y no llegaba a captar la esencia del teorema que se trataba de probar ni las líneas fundamentales de la demostración. Pero hay que apreciar su esfuerzo en lograr una formalización de todos los pasos,

Por último, en el quinto aniversario de su muerte, quiero reiterar mi pesar por su desaparición a toda su familia. Y que sepan que en La Laguna mucha gente le sigue recordando.

José M. Méndez Pérez. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna