

## Un divertido juego inventado por un matemático infeliz

### Resumen

En este artículo se presenta la posibilidad de introducir algunos temas de Matemáticas de Secundaria o Bachillerato, como pueden ser, entre otros, la Combinatoria, los Cuerpos Geométricos o incluso el propio Número Complejo, mediante la utilización del Juego Icosaédrico. Para ello se indica en primer lugar una breve biografía del descubridor de este juego: Sir William Rowan Hamilton, que pueda servirle al profesor como apoyo histórico para conseguir una mayor motivación del alumno a la hora de afrontar sus clases de Matemáticas; se muestran seguidamente las reglas de este juego, haciendo especial hincapié en las ventajas que puede ofrecer su uso en las clases de Matemáticas de Secundaria, fundamentalmente a la hora de introducir la Combinatoria; y se comentan también, finalmente, algunos otros juegos relacionados con el citado, que pueden ser utilizados por el profesor como soporte lúdico en la impartición de sus clases.

### Abstract

In this article the possibility of introducing some mathematical topics characteristic of Secondary Education, like Combinatorial, Geometric Fields or Complex numbers, for example, by using the Icosian Game can be considered. We begin by giving a brief biography of the author of this game, Sir William Rowan Hamilton. Later, we show the advantages which this game can supply when dealing with the mathematical topics previously mentioned, basically when the Combinatorial is taught. Finally, other games related to it, which can be also used by the teacher to motivate and interest his pupils to study are also indicated.

### Introducción

Ante todo, queremos indicar que cuando empleamos la palabra alumno en este artículo nos estamos refiriendo a los alumnos de Secundaria o Bachillerato en general, y particularmente, a los que cursan la asignatura de Matemáticas, salvo que se diga lo contrario. También nos gustaría explicar brevemente, antes de comenzar, el título elegido para el mismo. El juego que comentamos, que como se verá más adelante goza sin ninguna duda de las características de ser un juego entretenido, ameno y divertido, fue introducido (aunque como también se verá, esta autoría no deja de estar exenta de controversia) por un matemático, William Rowan Hamilton, que fue muy desgraciado durante toda su vida personal, aunque no así en la profesional. A pesar de la brillantez de sus descubrimientos, que le valieron días de gloria y el pleno reconocimiento de todos los científicos, no sólo ya matemáticos, de su época, Hamilton no fue feliz durante prácticamente toda su vida. Un problema amoroso sufrido a temprana edad hizo que Hamilton, desilusionado, no dudara en refugiarse completamente en el alcohol para superar sus momentos de desesperación, que fueron muchos a lo largo de toda su vida. De ahí la aparente paradoja del título elegido.

Para comenzar entonces, diremos que es un hecho constatable, cada vez con mayor frecuencia, la preocupación del Profesor de Secundaria o de Bachillerato por conseguir atraer la atención de sus alumnos. De un tiempo a esta parte bastantes de estos profesores, completamente desmotivados ante el escaso interés que una gran parte de sus alumnos muestran por su asignatura (fracción de alumnos que continúa in crescendo por norma general, aunque siempre contando con honrosas excepciones) ya ni siquiera pretenden que algunos de sus alumnos puedan aprender algo en las clases, sino que únicamente se contentan con que éstos no “den la lata” y permitan al menos a los que mantienen la compostura y el deseo de aprender seguir con la mayor normalidad posible el desarrollo de la clase.

Ni que decir tiene que esta situación se ve acentuada de manera ostensible cuando la asignatura que se imparte son las Matemáticas. Por regla general, son muy pocos los alumnos a los que, en principio, parece gustarles esta asignatura, y ello, haciendo un inciso, a pesar de los denodados y múltiples esfuerzos que muchos profesores de Matemáticas, bien a nivel individual o por su pertenencia a Sociedades de Profesores de Matemáticas, vienen haciendo para subvertir, o al menos paliar, esta situación. Es un mito ya conocido (y los mitos sabemos que muchos de ellos acaban convirtiéndose en realidad) que “a los alumnos

en general no les gustan nada las Matemáticas”. Por ello, como decimos, son innumerables las dificultades con las que un Profesor de Matemáticas de Secundaria se enfrenta para conseguir despertar el interés, la motivación y las ganas de seguir adecuadamente la clase por parte de sus alumnos.

En este punto, es altamente elogiada la labor que ofrecen las Sociedades antes citadas a la hora de facilitarle al profesor el conocimiento de nuevas técnicas metodológicas, ayuda en la comprensión y utilización de nuevos recursos en el aula y, en general, de todo aquello que redunde de manera positiva en facilitarle su tarea.

Es precisamente en esta línea en la que deseamos centrar el contenido de este artículo. El objetivo primordial de la misma es el de presentarle al profesor de Matemáticas de Secundaria o Bachillerato, con las adaptaciones adecuadas a estos niveles, por supuesto, un juego (por otra parte, ampliamente conocido por el alumnado universitario) que pueda servirle de ayuda para motivar a sus alumnos en el estudio de determinadas partes de la Matemática, sobre todo de la Combinatoria, aunque como también ya se ha indicado, podría constituir un buen punto de partida para la introducción de los cuerpos geométricos, o incluso para el estudio de los números complejos, aunque fuese de forma indirecta en este último caso, habida cuenta la especial aportación que tuvo el inventor de este juego en el desarrollo de estos números.

Para ello, hemos estructurado este artículo como sigue: en primer lugar se presenta una breve biografía del descubridor de este juego (aunque como después se verá y ya se ha indicado, sobre esto hay suscitada una gran controversia): Sir William Rowan Hamilton, a fin de que los datos indicados puedan servirle al profesor como apoyo histórico en la motivación del alumno. Se muestran seguidamente las reglas del juego, haciendo especial hincapié en las ventajas que puede ofrecer su uso en las clases de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato, fundamentalmente a la hora de introducir algunos de los temas antes citados, de manera especial la Combinatoria, y se comentan también, finalmente, algunos otros juegos relacionados con el citado, que puedan servirle al profesor como soporte lúdico en la impartición de sus clases.

### **Biografía de Sir William Rowan Hamilton**

En esta sección se indican unas breves notas biográficas de William Rowan Hamilton, con el objetivo de que puedan ser utilizadas por el profesor tanto para realizar una presentación del descubridor del juego icosaédrico como para motivar fuertemente a sus alumnos, haciéndoles ver, por ejemplo, que aunque complicado, no es imposible por otra parte destacar en Matemáticas a la edad de éstos, entre los catorce y los diecisiete años, como le ocurrió realmente al propio Hamilton. La mayor parte de estas notas, así como la foto de Hamilton que las ilustra, está sacada de (website1).

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/PictDisplay/Hamilton.html>

Decir que William Rowan Hamilton (en adelante, Hamilton) nació el día 4 de Agosto de 1805 en Dublín (Irlanda) puede no ser considerado del todo correcto por varios historiadores. Es ciertamente curioso el hecho de que Hamilton naciera justamente a la medianoche entre los días 3 y 4, de ahí la discrepancia.

Sus padres fueron Archibald y Sarah Hutton, siendo de su madre de quién parece ser que Hamilton heredó su inteligencia. Sólo con 5 años, Hamilton ya había aprendido latín, griego y hebreo gracias a las lecciones de su tío, el Reverendo James Hamilton, con el que Hamilton vivió en Trim durante muchos años. James era lingüista y llegó a enseñarle a Hamilton hasta 14 idiomas distintos (Bell 1986, p 341).

A la edad de 12 años, Zerah Colburn le enseñó una gran cantidad de trucos de cálculo aritmético mental. No obstante, Hamilton empezó a sentir gusto verdaderamente por las matemáticas al año siguiente, cuando empezó a leer el Álgebra de Clairaut (Alexis Clairaut, matemático francés, 1713-1765).

Con 15 años, Hamilton empezó a estudiar los trabajos de Newton (Isaac Newton, matemático inglés, 1643-1727) y de Laplace. (Pierre Simon de Laplace, matemático francés, 1749-1827). Precisamente en 1822, Hamilton encontró un error en la Mécanique céleste de Laplace lo que llevó a John Brinkley, Astrónomo Real de Irlanda, a manifestar lo siguiente:

*No sé qué será este joven en el futuro, pero sí sé que ahora, es el mejor matemático de su edad.*

Hamilton entró en el Trinity College de Dublín a la edad de 18 años y allí obtuvo en su primer año un “óptimo” en Clásicas, que fue una distinción que sólo se concedió una vez en 20 años. En 1824 Hamilton envió su primer artículo, titulado On Caustics, a la Royal Irish Academy. En ese tiempo llegó a enamorarse perdidamente de Catherine Disney, a la que no pudo proponer en matrimonio debido a su mala situación económica. Al año siguiente se casó con Harriet, una hija de un rico comerciante de Dublín.

economica. Al enterarse al poco tiempo de que Catherine iba a casarse con un reverendo, a Hamilton le entró una tristeza tan grande que hizo incluso que en sus exámenes obtuviese sólo un bien en lugar de un muy bien. De hecho, llegó a enfermar y a pensar incluso en el suicidio. Fue en esa época en la que Hamilton se refugió en la poesía, hábito que ya le acompañaría durante el resto de sus días. No obstante, Hamilton se recuperó poco a poco y en 1826 ya pudo conseguir un 'óptimo' tanto en Ciencias como en Clásicas, presentando en el último año de sus estudios una Memoria a la Royal Irish Academy titulada Teoría de los Sistemas de Rayos, en la que introdujo su función característica para la óptica.

Hamilton fue nombrado en 1827 Astrónomo Real de Irlanda, residiendo en el Observatorio de Dunsink. Este nombramiento produjo una gran controversia dado que Hamilton no tenía mucha experiencia en la observación astronómica, por lo que a su predecesor, el obispo Brinkley, no le hizo mucha gracia esta designación. Esto hizo a su vez que Hamilton se desilusionara y perdiera su interés por la Astronomía para dedicarse de lleno a las Matemáticas. No obstante, permaneció ya en Dunsink hasta su muerte.

Hamilton tuvo varias novias antes de casarse finalmente con Helen Maria Bayly, que vivía muy cerca del observatorio. Sin embargo, por diversas razones, la mayoría imputables a él mismo, no fue feliz en su matrimonio, lo que le hizo como en tantas otras ocasiones anteriores refugiarse en la poesía. Con Helen tuvo tres hijos, William Edwin, Archibald Henry y Helen Eliza Emilia, aunque ninguno de los tres nacimientos llegase a aportar armonía y felicidad en el hogar. Esto hizo que Hamilton, que nunca había olvidado a su primer amor, Catherine, se refugiase en el trabajo, con el que llegó a obsesionarse, y en el alcohol. De hecho, después de su descubrimiento de los cuaterniones (véanse párrafos posteriores), la vida familiar y personal de Hamilton continuó siendo muy desafortunada, lo que le hizo sumirse después en depresiones, agravadas al poco tiempo por la muerte de dos de sus tíos y del suicidio de un compañero del Trinity Colleague, todo lo cual hizo que se refugiase de nuevo en el alcohol. Aparte de eso, su antigua novia, Catherine, empezó a escribirle cartas personales, a pesar de que seguía estando casada. De hecho, Catherine intentó incluso suicidarse poco después debido a sus remordimientos, todo lo cual hizo que se agravara aún más el estado de depresión de Hamilton, dado que su propia mujer, Helen, llegó a enterarse de esta infidelidad.

Hamilton murió en Dublín el 2 de Septiembre de 1865, a la edad de 60 años, de un ataque agudo de gota, prácticamente tras recibir la noticia de ser elegido como el primer miembro extranjero de la National Academy of Sciences de América.

Referente a sus descubrimientos científicos, entre otros muchos más, merecen ser citados los siguientes: en noviembre de 1833, Hamilton leyó una comunicación en la Royal Irish Academy en la que expresaba los números complejos como pares ordenados de números reales. En 1835, Hamilton, inspirándose en el filósofo Immanuel Kant, publicó el "Álgebra de la Ciencia Pura", lo que junto a otros trabajos le valió para ser nombrado "Fellow of the Royal Society of Edinburgh".

Tras el descubrimiento de los complejos como parejas algebraicas, Hamilton intentó extender esta teoría a las tripletas, lo que volvió a producirle una nueva obsesión. Sus mismos hijos llegaron a preocuparse de tal forma por este hecho que cada mañana le preguntaban:

*Papá, ¿has podido multiplicar las tripletas?*

a lo que él tenía que contestar que no, que solo podía sumarlas y restarlas. Sin embargo, el 16 de Octubre de 1843 (era lunes) Hamilton caminaba junto a su mujer por el Canal Real cuando el descubrimiento de los cuaterniones, la primera álgebra no conmutativa descubierta empezó a tomar forma en su cerebro. Hamilton no pudo resistir el impulso de grabar su fórmula para los cuaterniones:

$$i^2 = j^2 = k^2 = i j k = -1$$

en las piedras del puente por el que pasaba, el Brougham Bridge. Como anécdota, decir que en 1958 la Royal Irish Academy erigió una placa conmemorativa en tal lugar.

Hamilton sintió que ese descubrimiento revolucionaría la física matemática, por lo que pasó el resto de su vida trabajando sobre él. Así, él mismo escribió:

*Creo que este descubrimiento va a suponer para la mitad del siglo diecinueve lo mismo que el*

descubrimiento del cálculo supuso para el final del siglo diecisiete.

Hamilton publicó sus "Lectures on Quaternions" en 1853, si bien él mismo se dio cuenta de que el libro no estaba bien escrito. Deseando perfeccionarlo. Hamilton empezó a escribir otro libro que tituló "Elements of

Quaternions" (en analogía a los Elements de Euclides) que pensaba que tendría 400 páginas y que le costaría 2 años escribirlo, si bien el resultado final fue un libro de 800 páginas que le costó 7 años escribir. De hecho, Hamilton no llegó a terminar el último capítulo.

### Descripción del Juego Icosaédrico

Aunque lo que sigue no sea quizás estrictamente necesario que el profesor lo comente a sus alumnos, hay que empezar diciendo, en honor a la verdad, que en realidad no debería hablarse de un único "juego icosaédrico", ya que existen varias opciones distintas del mismo (que también comentaremos en este artículo, aunque brevemente), si bien en esta sección nos limitaremos a tratar una sólo de ellas, la más conocida.

Por otra parte es importante notar, como veremos al final de esta misma sección, que existe actualmente una gran controversia sobre el hecho de que Hamilton fuese verdaderamente el descubridor de este juego.

En el año 1859, Hamilton presentó en una reunión de la British Association en Dublín un curioso pasatiempo que él denominó The Icosian Game. El objetivo del mismo es encontrar un camino sobre un dodecaedro que pasara una y sólo una vez por cada uno de sus veinte vértices, aunque estaba permitido pasar por una misma arista más de una vez. Recordemos que un dodecaedro es uno de los cinco poliedros regulares existentes en la naturaleza, formado por doce pentágonos regulares iguales, y tiene pues, 12 caras, 20 vértices y 30 aristas. Además, es importante notar que el hecho de que Hamilton designara a su juego con el nombre de Icosian no fue debido a que utilizara un icosaedro en su desarrollo (otro de los cinco poliedros regulares de la naturaleza, formado por veinte triángulos equiláteros iguales), sino que Hamilton tomó el prefijo ico (que en griego significa veinte) en alusión al número de vértices del dodecaedro.

Un ejemplo de uno de tales caminos podría ser el siguiente:



Como puede observarse, este camino no recorre todas las aristas del dodecaedro, es más, de hecho, no recorre más de dos aristas por vértice.

El punto de partida de este juego se encuentra en la invención por Hamilton de una clase curiosa de álgebra no conmutativa, que él llamó "The Icosian Calculus", basada en las características de la simetría de los poliedros. Hamilton conectó las matemáticas de esta álgebra con el problema de viajar a lo largo de las aristas del dodecaedro, pasando por cada vértice una vez y llegando al punto de partida. Su amigo John Graves le sugirió comercializar esta idea en forma de juego y lo puso en contacto con una compañía de empresarios jugueteros, denominada John Jacques e hijos, que compraron los derechos del mismo por 25 libras.

Una de las formas en las que el juego se comercializó venía acompañada de una hoja de instrucciones para jugar, redactada por el propio Hamilton y titulada Voyage Round the World (viaje alrededor del mundo), en la que se indicaba que cada uno de los veinte vértices de un dodecaedro sólido representaba una ciudad del mundo, como Bruselas, Cantón, Delhi, ...y así hasta llegar a Zanzíbar, y el juego consistía en realizar una ruta siguiendo las aristas del dodecaedro, de forma que se pasase una y sólo una vez por cada ciudad atravesando las veces que fuese necesario algunas de esas aristas.

Otra de las formas de comercialización del juego consistió en sustituir el dodecaedro verdadero por un "diagrama esquemático plano" del mismo, a modo de representación plana del dodecaedro, como el de la figura, en el que las 30 aristas del tablero representan los únicos caminos que se permiten recorrer para visitar las 20 clavijas de marfil que representan ciudades, con la condición de visitar cada ciudad sólo una

visitar las 26 ciudades de mar, que representan ciudades, con la condición de visitar cada ciudad solo una vez.



El tablero anterior también llegó a comercializarse bajo la forma de tablero igualmente plano con veinte pequeñas oquedades, sobre el que se podía jugar de diferentes maneras, de acuerdo con determinadas instrucciones (véase la siguiente figura).



Una de las posibles formas de jugar consistía en lo ya indicado de intentar rellenar con unas pequeñas piezas troncocónicas todas las oquedades del tablero, respectivamente etiquetadas por letras del alfabeto, que corresponderían a las iniciales de determinadas ciudades del mundo, siguiendo las líneas marcadas en el mismo y sin poder saltar por encima de alguna oquedad previamente cubierta por una de estas piezas.

Otra de las formas de jugar consistía en intentar realizar la ruta considerada siguiendo las instrucciones previamente determinadas por otro jugador. Así, este otro jugador podía indicar una serie de letras iniciales, por ejemplo BCPNM, y pedirle al primer jugador que completase una ruta de este tipo en la que se pasase en primer lugar y consecutivamente por las ciudades cuyas iniciales correspondiesen a las dadas. En caso de disponer de tiempo, cosa poco probable, el profesor podría comentarle a los alumnos que existe una teoría matemática, llamada Teoría de Grafos, en la que una ruta de este tipo se denomina ciclo hamiltoniano, explicándoles además los aspectos más elementales de la misma, que son muy asequibles y de fácil comprensión por los alumnos. La ruta considerada en el ejemplo citado se puede hacer de las siguientes dos formas posibles:

BCPNMDFKLTSRQZXWVJHGB y BCPNMDFGHXWVJKLTSRQZB.

Otra manera de jugar sería preguntarse cuántas rutas de este tipo empiezan por otra serie de iniciales dadas, por ejemplo, por JVTSR. Se llegaría a que existen dos de estas rutas posibles:

JVTSRWXZQPMLKFDCBGHJ y JVTSRWXHGFDCBZQPMLKJ.

Otra variante del juego sería encontrar también un camino que empezase y terminase, respectivamente, por determinadas letras dadas, por ejemplo, que empezase por las letras BCD y que terminase en T, utilizando como siempre cada letra una sola vez. La solución de este ejemplo propuesto sería:

BCDFGHXZQPMLKJVWRST.

Sin embargo, a pesar de lo divertido y ameno que podía parecer el juego, hay que indicar que su comercialización fue un rotundo fracaso, debido a que resultaba demasiado sencillo, incluso para los niños.

No obstante y en honor a la verdad, no puede decirse que esta idea de encontrar un camino que pase una única vez por cada vértice de una figura geométrica haya sido original de Hamilton. De hecho, no sólo existe un claro precedente en el estudio del matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) sobre el problema del caballo de ajedrez (véase la siguiente sección de este artículo), sino que, además, dos años antes de que Hamilton introdujera su juego, otro matemático, Thomas Kirkman, planteó el mismo problema explícitamente en un documento que él mismo transmitió a la Royal Society sobre la antes citada Teoría de Grafos: "dado un grafo de un poliedro, ¿existe un ciclo que pase una vez por cada vértice?".

¿Por qué entonces la paternidad del Juego Icosaédrico es atribuida a Hamilton y no a Kirkman, cuando este último llegó incluso a publicar la idea? Hay que decir que a veces una misma idea, en este caso matemática, es descubierta independientemente por dos personas, casi al mismo tiempo. Sin embargo, su paternidad suele atribuírsele, normalmente, al más conocido o famoso de ellos en su tiempo. Y ésta fue la desgracia de Kirkman, que Hamilton tuviese mucho más protagonismo en aquella época que él. No obstante, es interesante notar que a pesar de esta situación, ambos autores siempre se profesaron mucho respeto y admiración mutua. Hamilton visitó a Kirkman en la Croft Rectory en agosto de 1861 y de la correspondencia entre ellos se desprende la estima mutua que existía entre ambos. Kirkman le escribió a Hamilton diciéndole que "su buena fortuna había sido la de estar cerca de cada matemático como tú", a lo que Hamilton le respondió, diciéndole que "sería muy difícil para mí expresar, sin tener aires aduladores, cuánto admiro tu genio matemático y tu descubrimientos".

Por si también puede serle útil al profesor en sus clases, damos también aquí algunas notas biográficas de Kirkman, extraídas de (website2):



Thomas Penyngton Kirkman (en adelante Kirkman) nació el 31 de marzo de 1806 en Bolton, cerca de Manchester (Inglaterra) y murió el 4 de febrero de 1895 en Bowdton. En el colegio estudió latín y griego, pero no matemáticas. Aunque sus profesores consideraron que podía ir a Cambridge, su padre lo sacó del colegio a los catorce años, para llevarlo a trabajar a la oficina en la que él trabajaba. Kirkman, no obstante, continuó estudiando latín y griego en su tiempo libre, llegando a ampliar sus conocimientos de idiomas a francés y alemán (no deja de resultar curioso el paralelismo con Hamilton referente a las capacidades de ambos para los idiomas).

Tras nueve años de trabajo en esa oficina, Kirkman entró en la Universidad de Dublín para estudiar matemáticas, filosofía y ciencias. Volvió a Inglaterra en 1835 y entró en la iglesia, donde pasó cinco años como cura, primero en Bury y más tarde en Lymm. En 1839 se convirtió en vicario, posición que ejercería durante 52 años.

Como graduado en la universidad de Dublín, Kirkman se interesó en el trabajo sobre cuaterniones publicado por Hamilton. Su interés por las matemáticas cada vez aumentaba más y ya en 1846 dio solución a un problema aparecido en el Lady's and Gentleman's Diary, llegando a demostrar además la existencia de los sistemas de Steiner siete años después de que el propio Steiner publicara un artículo preguntándose por la existencia de tales sistemas. Este trabajo de Kirkman fue publicado en el diario matemático de Cambridge y de Dublín, y también al igual que le ocurriera con Hamilton, estos sistemas se conocen actualmente con el nombre de Sistemas de Steiner, a pesar de que fuese Kirkman el que demostrara su existencia.

Kirkman es también conocido por su problema de las quince colegialas, publicado también en el Lady's and Gentleman's Diary, que ha acompañado un papel importante en el desarrollo de la combinatoria.

Gentleman's Diary, que ha desempeñado un papel importante en el desarrollo de la combinatoria: "Quince señoritas salen de la escuela. El problema planteado es cómo pueden pasear en cinco filas de tres de ellas durante una semana, de modo que no coincidan dos en el mismo trío más de una vez".

A partir de 1853, Kirkman comenzó un trabajo sobre la enumeración de poliedros, presentando sus mejores artículos en la Royal Society. En 1860 decidió entrar en la Académie des Sciences of Paris, en la que se concedía un premio por el estudio de la teoría de grupos. Eso suponía que en dos años tenía que convertirse en un experto de la teoría de grupos; Kirkman finalmente lo consiguió, llegando a presentar su memoria. Junto a la suya, otras dos memorias fueron también aceptadas, la de Emile Mathieu y la de Jordan. Sin embargo, aunque las tres fueron merecedoras de elogio, la Academia decidió no conceder ningún premio. No obstante, Kirkman continuó trabajando en la teoría de grupos, publicando *The complete theory of groups*, en 1863.

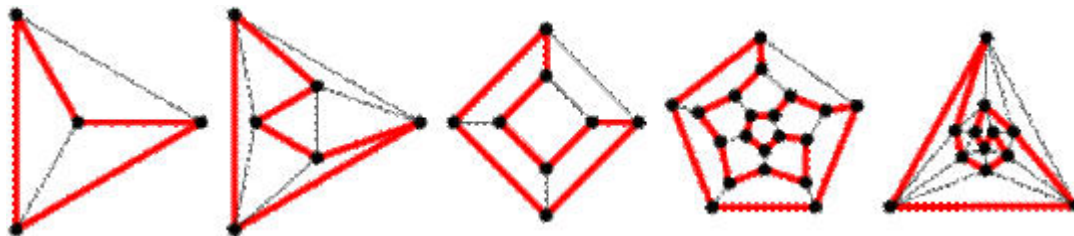
Kirkman también se dedicó intensamente al estudio de temas combinatorios. Así, en 1884, a los 78 años, publicó su primer documento sobre nudo y continuó trabajando hasta los 89 años, enviando preguntas y soluciones a *Educational Times* hasta algunos meses antes de su muerte.

### Algunas variantes del Juego Icosaédrico

#### 1. El juego sobre otros poliedros.

Acabamos de comentar que el juego que Hamilton comercializó con el nombre de Viaje por el mundo consistía en efectuar una ruta que pasara por todos los vértices de un dodecaedro regular, todos ellos etiquetados con nombres de ciudades del mundo, de forma que no se repitiesen visitas a ninguna ciudad, circulando por las aristas del dodecaedro y volviendo al punto de partida.

Este problema o juego se podría también plantear, lógicamente, sobre cualquier otro poliedro regular, como pudieran ser el cubo, el tetraedro, el octaedro o el icosaedro, tal como se observa en las siguientes figuras. El profesor podría aprovechar esta circunstancia para introducir, por ejemplo, el tema de los cuerpos geométricos a sus alumnos.



#### 2. El Problema del Caballo del Ajedrez (The Knight's Tour Problem)

Un juego conceptualmente similar al icosaédrico, es decir, basado en obtener una ruta hamiltoniana, aunque aparecido antes que éste, es el famoso problema del caballo de ajedrez, estudiado por Euler. Consiste en lo siguiente: consideremos el movimiento de un caballo de ajedrez por el tablero según la regla usual, esto es, dos cuadrados en horizontal o en vertical y uno en la dirección perpendicular. La pregunta que nos planteamos es si el caballo puede visitar cada cuadrado del tablero de ajedrez una única vez usando una sucesión de sus movimientos.

Una solución escrita a dicho problema fue dada por Euler en 1759. Doce años después, el matemático francés Vandermonde (1735-1796) dio una nueva solución al problema. Una de las soluciones dadas por Euler, que demuestra su inteligencia y brillantez, puesto que si se suman las filas y las columnas de la misma se obtiene en todos los casos 260, es decir, esta solución aparece en la forma de un cuadrado mágico, es la siguiente:

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64

52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

### 3. El Problema del Viajante.

Una generalización del juego icosaédrico es el problema que se conoce con el nombre del Problema del viajante. Este problema también es conocido con el nombre del problema del cartero chino o también problema annealing, y una de las posibles formas de plantearlo, permítasenos la licencia de hacerlo a nivel local, puede ser la siguiente: “un viajante de comercio de una firma de Sevilla tiene por tarea ofrecer sus productos en 25 ciudades distintas de España. Los desplazamientos desde una ciudad a cada una de las otras le ocasionan ciertos gastos que le son bien conocidos. Se trata de obtener el itinerario adecuado que haga mínimo su gasto total en desplazamientos, saliendo de Sevilla y volviendo allí mismo”.

Cuando las ciudades son pocas, se puede pensar en un cómputo exhaustivo de todos los posibles itinerarios, y, aprovechando la potencia actual de los ordenadores, pensar en hacerlo para un número respetable de ciudades. No obstante, cuando este número se eleva, por ejemplo a 50, aún los ordenadores actuales más potentes son insuficientes. Hasta ahora no se conoce ningún algoritmo para el cálculo efectivo del itinerario óptimo del viajante que resuelva el problema con los ordenadores actuales en tiempo razonable cuando el número de ciudades es grande.

Otra variante a su vez de este juego que nos puede surgir a partir del planteamiento inicial consiste, por ejemplo, en ver qué pasa si el viajante debe empezar su viaje sin saber todos los lugares a donde va a tener que ir. O por ejemplo, si necesita visitar en uno de sus viajes sólo un número limitado de ciudades de entre las 25.

### Referencias

Bell, E.T. (1986): “An Irish Tragedy: Hamilton”. Simon and Schuster (ed.) Men of Mathematics: The lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré. (pp 340-361) New York.

Website1. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Hamilton.html>  
(sobre la biografía de Hamilton).

Website2. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Kirkman.html>  
(sobre la biografía de Kirkman).

### Datos de los autores

Belén Aranda Colubi:

- Licenciada en Matemáticas, en el año 2004.
- Dirección: Dpto de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla. Apdo. 1160, 41080-Sevilla (España).
- E-mail: belenac@supercable.es

María del Carmen de Elías Olivencia

- Licenciada en Matemáticas, en el año 2004.
- Dirección: Dpto de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla. Apdo. 1160, 41080-Sevilla (España).
- E-mail: maricarmendeelias@hotmail.com

Juan Núñez Valdés (Autor para la correspondencia)

- Licenciado y Doctor en Matemáticas, en los años 1974 y 1991, respectivamente.
- Profesor Titular del Dpto de Geometría y Topología (Facultad de Matemáticas) de la Universidad de Sevilla.
- Dirección: Dpto de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla. Apdo. 1160, 41080-Sevilla (España).
- E-mail: jnvaldes@us.es