# MARTINGALAS Y SU CONEXIÓN CON EL MUNDO ECONÓMICO

**Manuel Linares Linares**

La confluencia simultánea del análisis estocástico y ciertas teorías económicas, ha dado lugar en los últimos 30 años al nacimiento de lo que hoy se conoce como *matemáticas financieras estocásticas.* Esto, en cierto sentido, fue predicho por A. N. Kolmogorov en sus notas diarias (en la década de los años 30 del siglo XX), cuando escribió "solamente existe una capa sutil entre las cosas triviales y las no alcanzables en cada momento. Es en este estrato, donde se hacen los descubrimientos matemáticos. Esto se debe a que un problema aplicado tiene generalmente o una solución trivial o ninguna solución. La situación sería completamente diferente, si se eligen las nuevas herramientas de interés y se relacionan con determinados problemas aplicados". Debido a la complejidad e inmensidad de las matemáticas financieras, es por lo que, nos ceñiremos a las martingalas y algunas de sus versiones en el mundo económico.

En primer lugar analizaremos el concepto de *martingalas.* La palabra martingala proviene del francés *martingale* y ésta, a su vez, de la ciudad provenzal de Martingue. Su significado pasado y actual en ciertos usos proviene de un juego antiguo que en España recibe el nombre martingala, siendo también una martingala un lance de ese juego. Teniendo en cuenta que es un concepto bastante delicado, daremos una aproximación mediante el siguiente ejemplo. 88

Consideremos el experimento aleatorio consistente en el lanzamiento de una moneda. Dos jugadores A y B establecen la siguiente regla. Si sale cara el jugador B le da 1$ al A, pero si sale cruz, entonces B obtiene un 1$ del jugador A. Representamos con E(A) la media o esperanza matemática, mientras que, E(A/B) significa la media o esperanza matemática de A condicionado a que se haya dado B, con respecto a cierta probabilidad. Representemos por $R_i$ la cantidad aleatoria 1$ o -1$ que el jugador A obtiene en el i-ésimo lanzamiento de la moneda. Es evidente que en esta situación se verifica:

$$E(R_i) = 0, \qquad E((R_i)^2) = 1, \qquad E(R_i\, R_j) = 0.$$

Debe observarse que si en las cinco primeras tiradas han salido cinco caras, estos resultados no afectan en nada a lo que aparece en el sexto lanzamiento. Esta propiedad es compartida también por el lanzamiento de un dado justo y por la ruleta. Pero no ocurre lo mismo en el juego del *blackjack*, pues en este el jugador puede arruinar a la banca. Llamemos a $S_i$ la cantidad de dinero que ha ganado A hasta el i-ésimo lanzamiento. Podemos obtener inmediatamente:

$$E(S_i) = 0\,, \qquad E\,((S_i)^2) = E((R_1)^2 + 2R_1R_2 + \ldots) = i$$

Por el contrario, supongamos que hayan resultado cinco caras al realizar el experimento cinco veces. Podríamos usar esta información con el fin de calcular la media o esperanza de $S_6$ , condicionada a que los resultados de los cinco primeros lanzamientos hubieran sido caras. En este nuevo contexto, se podría justificar:

$$E( S_6/R_1, \ldots ,R_5) = S_5 .$$

El experimento aleatorio de lanzar una moneda tiene otra propiedad de especial importancia en finanzas. El jugador A conoce la cantidad ganada después de cinco lanzamientos. Sin embargo la ganancia esperada correspondiente al sexto lanzamiento es justamente la cantidad que se mantiene al finalizar el quinto lanzamiento. De una manera más precisa, en general sería:

$$E(S_i/S_j , j < i) = S_j$$

Esto se llama la *propiedad de la martingala.*

La última observación permitiría después de un proceso largo y tedioso dar una definición precisa de martingala. Incluso, una definición rigurosa de su *versión económica.* Pero no vamos a entrar en estas complicaciones. No obstante, queremos resaltar del ejemplo anterior varios conceptos que están dados implícitamente: 1) hay una sucesión de variables aleatorias, 2) una distribución de probabilidad, y 3) se debe calcular una media o esperanza matemática condicionada, que verifique una igualdad, tal como se refleja en la propiedad de la martingala.

El llegar a las martingalas desde situaciones económicas es harina de otro
88 costal. En la medida de lo posible, intentaremos aproximarnos todo lo que podamos. Esto es debido, a que se utilizan conceptos profundos del Análisis Estocástico, los cuáles son difíciles de visualizar de una manera simple y asequible.

Así en primer lugar, daremos algunos conceptos y objetos de un mercado financiero. Las personas que utilizan los mercados financieros llaman a las acciones y bonos, *productos (securities) fundamentales o básicos,* y a las opciones (contratos de opciones) y futuros y otros, *productos (securities) derivados.* No obstante, la definición de un producto derivado se suele formular de la siguiente manera. Un contrato financiero es un *producto derivado* si su valor en la fecha de vencimiento T se determina exactamente por el precio que en el mercado tiene el activo fundamental $S_t$ en el momento T (donde $S_t$ podría representar el precio de la acción en bolsa). La manera de expresar el precio de un activo derivado es $F(S_t ,t)$. *Una opción de compra (a call option)* es el derecho a comprar un activo particular, por una cantidad acordada en un tiempo especificado del futuro. De la misma manera se puede introducir el concepto de *una opción de venta (a put option).* Incluso se podría comentar algo de los innumerables productos derivados que existen. Las matemáticas financieras estocásticas se han desarrollado enormemente al profundizar en el estudio de los instrumentos derivados, especialmente al fijar el precio de los productos derivados.

Antes de avanzar, consideremos el siguiente ejemplo. Consideremos una empresa A que emite opciones sobre una determinada acción suya que cotiza en bolsa. El precio fijado de la opción por la compañía A es lo que se llama el *premium* (la manera o forma de fijar el precio de la opción es uno de los temas apasionares de las matemáticas financieras). Supongamos que, en el día de hoy, el valor de la acción es de 24,5$. Una persona particular B compra una opción pagando una prima inicial (es decir el premium). Además, en la opción se estipula que la persona B puede comprar la acción por 25$ dentro de un mes (tiempo de ejecución de la opción). Estudiemos lo que puede suceder. Si nada ocurre hasta el momento de finalización, significa que el precio permanece en 24,5$. ¿Qué haríamos entonces? Evidentemente no la compraríamos ya que el valor de la acción es 24,5$ ( igual comportamiento tendríamos, si el valor de la opción es menor que 25$ al haber transcurrido un mes). Pero si al cabo de un mes, el precio de la acción sube a 29$ nos estaríamos riendo, pues compraríamos la acción a 25$ y tendríamos un beneficio de 4$. El ejemplo anterior es lo que se llama *una opción europea.* Se debe resaltar, una vez más, que si una persona compra una opción tiene el derecho, pero no la obligación, a ejecutarla (esto depende evidentemente del valor de la acción en bolsa). Hay otro tipo de opciones más complicadas. Estas aparecen cuando el momento de ejecución puede ser cualquier momento antes de la finalización. A este nuevo tipo se les llama *opciones americanas.* Ni que decir tiene que estas son más complicadas. Ello es debido, principalmente, a la introducción de un concepto delicado del análisis estocástico llamado *tiempos de parada.*

Por último, comentaremos brevemente como llegar a la aplicación de las martingalas en el mundo económico. En primer lugar, diremos que una martingala en sentido continuo (y versión económica) es un proceso estocástico 88
$S_t$ con $t \in [0, \infty)$ verificando que $E(S_T/I_t)=S_t$ para $t<T$, siendo $I_t$ una familia de conjuntos de información. Hemos mencionado anteriormente las acciones y los productos derivados. El precio de una acción en función del tiempo lo representamos por $S_t$ (es decir, el precio de una acción es un proceso estocástico). Éste y la mayoría de los activos financieros no son martingalas, sin embargo se pueden convertir en martingalas. Cómo conseguirlo es bastante delicado. Tomamos el precio de una acción descontada por el *risk-free rate* (tipo de interés). Una vez hecho esto calcularíamos

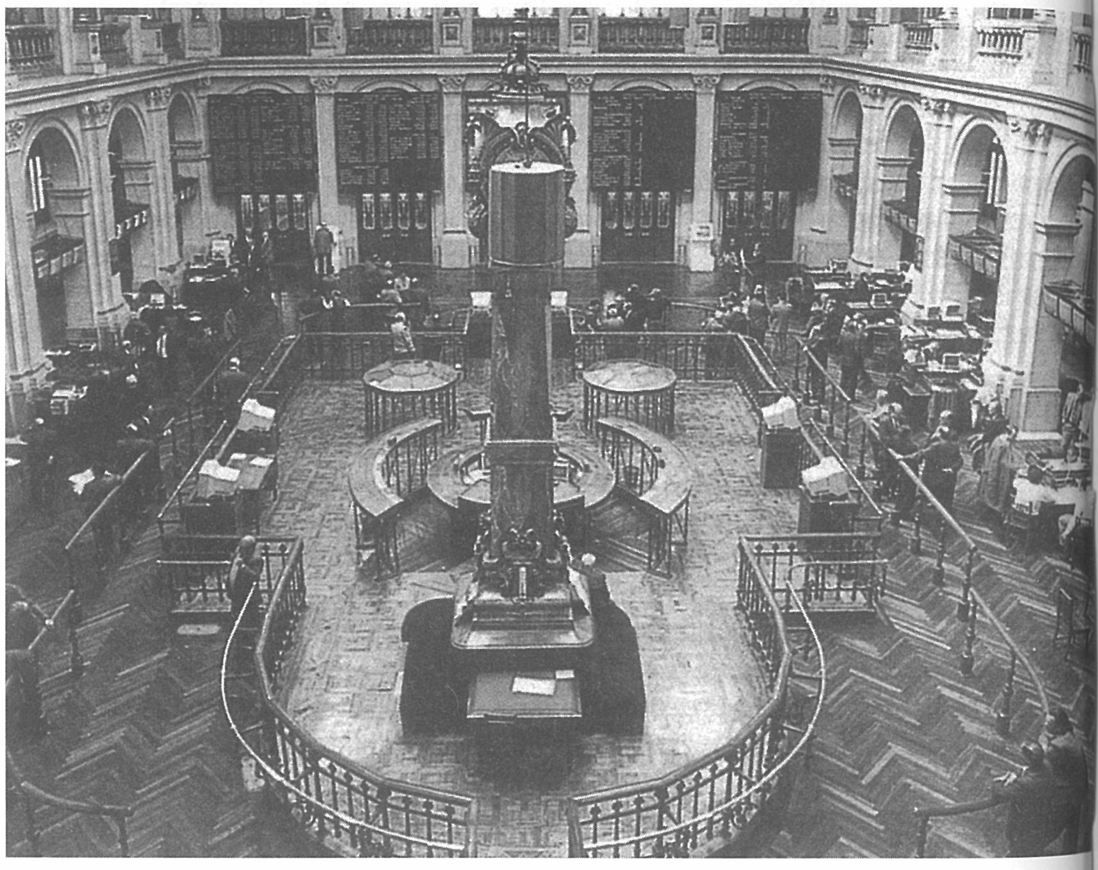
$$E^P\left(e^{-rt} S_t / S_u,\ u < t\right)$$

y veríamos que esta esperanza condicionada es diferente a $e^{-ru}S_u$ . Sin embargo, es posible bajo algunas condiciones, encontrar una medida de probabilidad equivalente a P, que llamaremos Q , tal que con respecto a ella se verifica:

$$E^Q\left(e^{-rt} S_t / S_u,\ u < t\right)= e^{-ru} S_u \ ;$$

es decir, aparece una vez más la propiedad de martingala. Si no imaginamos el primer ejemplo de martingala, observamos que aquí el papel de la sucesión de variables aleatorias es el proceso estocástico; la probabilidad, que allí era muy explícita, en este caso la hemos mencionado de forma implícita; e incluso, allí solamente había una probabilidad, mientras que aquí es preciso encontrar una *probabilidad equivalente* (un concepto bastante difícil).

Para terminar, consideremos los siguientes items: i) un conocimiento bastante aceptable del inglés; ii) tener un perfecto dominio de algunos temas del análisis estocástico; iii) un nivel algo aceptable de teoría económica, principalmente algunos temas relacionados con microeconomía; iv) dominio de varios métodos numéricos, así como, su implementación en los computadores; y v) aunque, no es estrictamente necesario, se debe tener cierta predisposición a la participación (o juego) en el mundo real de los productos derivados. La confluencia de todos estos puntos, ha dado origen al nacimiento de lo que en el final del siglo XX se ha empezado a llamar *ingeniero financiero*. Probablemente en un futuro no muy lejano, ello será una de las especialidades de lo que se llamará *ingeniero matemático*.



*Patio de operaciones de la Bolsa de Madrid.*