Recibido: martes, 24 abril 2007

internacional ::
matematicalia
revista digital de divulgación matemática
Vol. 3, no. 2 (abr. 2007)

En el tercer centenario del nacimiento de Euler

Ricardo Moreno Castillo
Departamento de Análisis Matemático
Universidad Complutense de Madrid
e-mail: moreno.castillo@terra.es

Pinche sobre una fórmula para ampliarla. Vuelva a pinchar sobre ella para reducirla, o pinche manteniendo pulsada la tecla [shift] para reducir todas las que permanezcan ampliadas.

Leed a Euler, leed a Euler.
Él es el maestro de todos nosotros.
P.S. LAPLACE

En 1707, hace ahora exactamente trescientos años, nació en la ciudad suiza de Basilea Leonhard Euler, uno de los más importantes matemáticos de la historia y, sin lugar a dudas, el más prolífico. Su bibliografía consta de 886 títulos, y su producción científica supuso un promedio de unas 800 páginas anuales. Su padre, un pastor calvinista, esperaba que su hijo siguiera el mismo camino. Pero al entrar en la universidad de Basilea conoció a Johann Bernoulli (1667-1748), y este encuentro fue decisivo para decantar su vocación hacia las matemáticas. Su progreso fue rapidísimo. A los veintitrés años se incorporó a la Academia de San Petersburgo, fundada por la emperatriz Catalina I, y desde entonces la revista de investigación de la Academia dio a luz muchísimos trabajos de Euler, hasta cincuenta años después de la muerte de éste. En 1741 aceptó una invitación de Federico el Grande para formar parte de la Academia de Berlín, pero su estancia en Prusia no fue demasiado feliz, y en 1766 volvió a Rusia. A partir de 1771 quedó completamente ciego, aunque esta circunstancia no interrumpió el ritmo de sus publicaciones. Murió repentinamente en 1783, a la edad de setenta y seis años.

Series infinitas

La obra más conocida de Euler es la *Introductio in analysin infinitorum*, el primer volumen de la cual está dedicado a las series. Euler las manejaba muy "alegremente", utilizando para operaciones infinitas propiedades de las operaciones finitas, sin pararse a fundamentar sus generalizaciones. Con todo, llegó a resultados correctos. El más bello de todos ellos es el de la suma de los inversos de los cuadrados de los números naturales (problema que ya habían abordado sin éxito Leibniz y otros matemáticos):

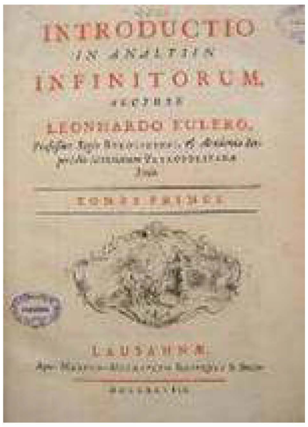
$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Pero si excluimos los sumandos pares, resulta esta otra identidad:

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

También descubrió que, aunque la serie de los inversos de los números naturales es divergente, existe el siguiente límite:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right).$$



El número γ se llama *constante de Euler*. No existe otra expresión para calcularla (así como hay varias para π y e), y no sabemos si es racional o irracional.

La *Introductio* es la primera obra en la que se establece la noción de función para edificar sobre ella todo el análisis. Aparecen allí definidas claramente las funciones exponencial y logarítmica, y estudiadas sistemáticamente las funciones trigonométricas. También extendió la función factorial (en principio definida en los números naturales) a todos los números reales mediante la siguiente integral:

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx.$$

La teoría de números

Entre las conjeturas que Fermat había dejado abiertas, están las tres siguientes: todo número de la forma $2^{2^n}+1$ es primo; no existen números enteros que resuelvan la ecuación $x^n+y^n=z^n$ cuando $n\geq 3$; y para todo número primo p y todo número entero a no divisible por p sucede que $a^{p-1}-1$ es múltiplo de p. Euler demostró la tercera, la segunda en el caso particular $n=3$, y refutó la primera. Poniendo en juego su increíble habilidad para el cálculo, demostró lo que viene a continuación:

$$2^{2^5}+1 = 4\,294\,967\,297 = 6\,700\,417\times 641.$$

Hoy se sabe que para $5\leq n\leq 16$ el número $2^{2^n}+1$ es compuesto, y no se han encontrado más primos de Fermat después de los cinco primeros. Algunos matemáticos opinan (aunque todavía no se ha podido probar) que esos cinco son los únicos que hay.

Euler fue el primero que investigó sobre números primos utilizando las series, dando así los primeros pasos en la teoría analítica de números. Con estas técnicas demostró la existencia de infinitos números primos. Para cada primo p consideró la igualdad:

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = 1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\ldots$$

Si multiplicamos todas las igualdades así obtenidas, tenemos que:

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \prod_p\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Si el número de primos fuera finito, el producto de la izquierda también lo sería y la serie de la derecha convergería. Pero sabemos (ya desde el siglo XIV) que no es así.

Además, creó una función, hoy llamada *función φ de Euler*, que resultó ser una utilísima herramienta en teoría de números:

$$\varphi(m) = \text{cantidad de números enteros menores que } m \text{ y primos con él.}$$

Euler demostró que si los números enteros a y m son primos entre sí, entonces $a^{\varphi(m)}-1$ es múltiplo de m. Este resultado es una generalización de la última de las tres conjeturas de Fermat antes citadas (esto es así porque $\varphi(p)=p-1$).

No son estas las únicas aportaciones de Euler a la teoría de números. La proposición 36 del libro IX de los *Elementos* de Euclides demuestra que si para un cierto n, el número $p=2^{n+1}-1$ es primo, entonces el número $a=2^n p$ es perfecto (esto es, es igual a la suma de todos sus divisores propios). Este teorema plantea dos preguntas importantes. ¿Todos los números perfectos pares se pueden obtener por el procedimiento de Euclides? ¿Existen números perfectos impares? La segunda todavía aguarda respuesta, pero la primera fue contestada afirmativamente por Euler.

Las ecuaciones diferenciales

Se llama ecuación diferencial ordinaria de orden n a cualquier expresión de la forma:

$$\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

donde la incógnita y es una función de la variable x. El mayor orden de derivación de la función incógnita se llama el *orden* de la ecuación. A Euler se le deben importantes contribuciones a la teoría de ecuaciones diferenciales, aunque el mérito de alguna de ellas lo comparte con contemporáneos suyos.

Supongamos que la ecuación tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}.$$

Si podemos encontrar una función $z = f(x,y)$ tal que $A = \partial z/\partial x$ y $B = \partial z/\partial y$, entonces la expresión $f(x,y) = 0$ define implícitamente una solución de la ecuación. Cuando existe esta función se dice que la forma diferencial $A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0$ es *exacta*. Alexis Clairaut (1713-1765) y Euler descubrieron independientemente que si $\partial A/\partial y = \partial B/\partial x$, la ecuación es exacta. Si no lo es, a veces se puede encontrar una función M (llamada *factor integrante*) tal que la ecuación $MAdx + MBdy = 0$ sí sea exacta. Euler estudió las clases de funciones para las cuales existe un factor integrante.

Al mismo tiempo que D'Alembert (1717-1783), estudió las ecuaciones lineales *homogéneas* (esto es, sin un sumando donde falta la y) con coeficientes constantes:

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_ny = 0,$$

a la cual asocia la siguiente ecuación algebraica:

$$r^n + a_1r^{n-1} + a_2r^{n-2} + \cdots + a_{n-1}r + a_n = 0.$$

Cada solución de esta última permite fabricar una de la ecuación diferencial, lo que proporciona n soluciones particulares. Combinándolas linealmente se tienen más soluciones, con lo cual la solución general depende de n constantes arbitrarias.

Dio con un procedimiento para rebajar en una unidad el orden de la ecuación lineal no homogénea. Sea por ejemplo la ecuación de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_2y = f(x).$$

Se multiplican ambos miembros por $e^{\alpha x}$ y se integran los dos:

$$\int\left(e^{\alpha x}\frac{d^2y}{dx^2}+e^{\alpha x}a_1\frac{dy}{dx}+e^{\alpha x}a_2y\right)dx=\int e^{\alpha x}f(x)dx.$$

Es fácil comprobar que para valores de α y A que cumplan las ecuaciones $\alpha+A=a_1$ y $\alpha A=a_2$, la ecuación se transforma en esta otra de primer orden:

$$\frac{dy}{dx}+Ay=e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}f(x).$$

También encontró algunos “trucos” para transformar ciertas ecuaciones lineales de coeficientes variables en otra de coeficientes constantes. Por ejemplo, la ecuación:

$$x^n y^{(n}+x^{n-1}y^{(n-1}+\ldots+xy'+y=0$$

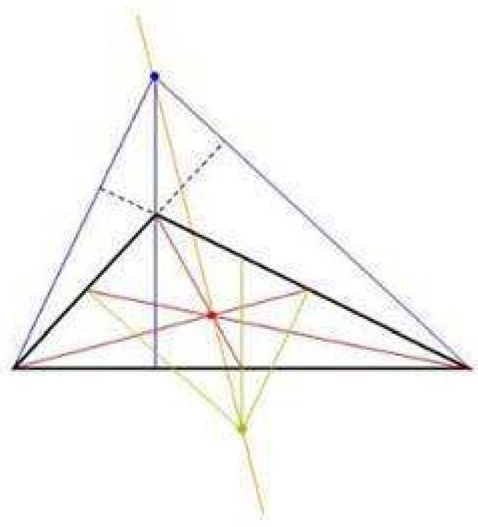
(hoy conocida como *ecuación de Euler*) se convierte, mediante el cambio $x=e^t$, en una ecuación lineal de coeficientes constantes.

La geometría

Euler se interesó por la geometría clásica, y tiene dos aportaciones importantes. La primera, una demostración original del *teorema de Herón*. Afirma este teorema que el área de un triángulo de lados a, b y c, y semiperímetro p, viene dada por la fórmula:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Este resultado, una de las más hermosas creaciones de la geometría griega, aparece por primera vez en la *Métrica* de Herón de Alejandría. De este matemático tenemos pocos datos ciertos, tan solo que vivió en esta ciudad entre los siglos I y II de nuestra era. Fuentes árabes de mucha solvencia aseguran que la célebre fórmula ya era manejada por Arquímedes, quien muy probablemente dispondría de alguna demostración de ella. Del teorema de Herón hay muchas demostraciones (varias de ellas debidas a matemáticos españoles), pero la de Euler es particularmente elegante.



La segunda contribución de Euler a la geometría es el descubrimiento de una recta notable del triángulo. Recordemos que las rectas que unen los vértices de un triángulo con los puntos medios de los lados opuestos se llaman *medianas*, y se encuentran en un punto llamado *baricentro*, que es el centro de gravedad del triángulo. Las rectas perpendiculares a los lados y que pasan por los vértices opuestos, las *alturas* del triángulo, se juntan en el *ortocentro*. Y las *mediatrices* de los lados, las perpendiculares que pasan por los puntos medios, se cortan en el *circuncentro*, el centro del círculo circunscrito al triángulo. En el dibujo las medianas aparecen en color rojo, las alturas en azul y las mediatrices en verde.

Pues bien, Euler demostró algo muy simple, que había pasado desapercibido a todos los matemáticos anteriores a él, y que estaba sin embargo a la vista de todo el mundo: *el baricentro, ortocentro y circuncentro de cualquier triángulo están* *siempre alineados*. La recta que pasa por ellos se conoce desde entonces como *recta de Euler*, y en el dibujo aparece de color naranja.

Referencias

C. Boyer: *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial, Madrid, 1992.

W. Dunham: *Euler, el maestro de todos los matemáticos*. Editorial Nivola, Madrid, 2000.

Sobre el autor

Ricardo Moreno Castillo es licenciado en Matemáticas en 1973 por la Universidad de Santiago y catedrático de instituto desde 1975. En 1987 se licenció en Filosofía por la Universidad de Santiago, y es doctor en Filosofía desde el año 1991, con una tesis sobre Historia de la Matemática. Además de varios artículos, ha publicado los siguientes libros: *Pensamento matemático en Galicia* (1992), *Andanzas y aventuras de las ecuaciones cúbicas y cuárticas a su paso por España* (2001), *Omar Jayyam: poeta y matemático* (2002), *13 matemáticos galegos* (2004), *Fibonacci: el primer matemático medieval* (2004), *Plücker y Poncelet: dos modos de entender la geometría* (2005), traducción del árabe y notas del *Compendio del arte del cálculo* de Ibn laSahm (2006) y *Alhacén: el Arquímedes árabe* (2007).