Rev.Acad.Canar.Cienc., III (Núm. 1),113-125 (1991)

DESARROLLOS DE COCIENTES Y LOGARITMOS DE FUNCIONES DE BESSEL-CLIFFORD Y DE LA MODIFICADA DE BESSEL DE PRIMERA ESPECIE

N. Hayek y F. Pérez Acosta
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

RESUMEN

En este trabajo se establecen algunos desarrollos en serie de cocientes y logaritmos de funciones de Bessel-Clifford, así como de la función modificada de Bessel de primera especie, aptos para el cálculo numérico.

ABSTRACT

In this work we establish some series expansions of quotients and logarithms of the Bessel Clifford functions and of the modified Bessel function of the first kind. These expansions are suitable for the numerical calculus.

INTRODUCCION

Algunos desarrollos en serie de inversas, cocientes y logaritmos de funciones de Bessel de primera especie $J_\nu(x)$ de argumento real positivo y de orden $\nu\geq 0$, así como de potencias e integrales de los mismos, fueron obtenidos en varios trabajos por E. Brixy ([1],[2],[3]) estableciéndose unas relaciones de recurrencia para el cálculo de los correspondientes coeficientes de los citados desarrollos. En el presente trabajo y siguiendo la misma técnica de Brixy se infieren similares desarrollos relativos a las funciones modificadas $I_\nu(x)$ de Bessel de primera especie. Son deducidas asímismo análogas expresiones para un tipo de funciones afines denominadas de Bessel-Clifford, estudiadas profundamente en una serie de trabajos por N. Hayek, entre los que destaca especialmente el reseñado en la bibliografía , las cuales presentan indudables ventajas sobre las de Bessel en muchos campos teóricos y de aplicación (véase [4]). Un cambio de variable derivado de la íntima conexión entre ambos tipos de funciones de Bessel y de Bessel-Clifford permite la rápida obtención de desarrollos similares para las de Bessel-Clifford de primera especie $C_\nu(x)$ a partir de los deducidos por Brixy para las $J_\nu(x)$.

Debe señalarse al propio tiempo, que la aplicación de este cambio de variable pone claramente de manifiesto que todas y cada una de las expresiones originarias de los desarrollos de Brixy para las $J_\nu(x)$, representan esencialmmente expresiones que se refieren a funciones de Bessel-Clifford $C_\nu(x)$ de primera especie, dándose lugar a unas mismas tablas para el cálculo de los respectivos coeficientes, tablas que se reproducen nuevamente aquí, si bien algo mas ampliadas que las que figuran en Brixy [1].

1. DESARROLLO EN SERIE DE EXPRESIONES QUE CONTIENEN FUNCIONES MODIFICADAS DE BESSEL DE PRIMERA ESPECIE

Se supone en este apartado que el argumento de las $I_\nu(x)$ es real y positivo y que $\nu \geq 0$.

1.1 Desarrollo de la función $\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{I_\nu(x)}$

Partiendo del desarrollo en serie de la función modificada de Bessel de primera especie [5,p.77]

$$I_\nu(x)= \sum_0^\infty \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2r}}{\Gamma(r+1)\Gamma(\nu+r+1)}$$

puede escribirse

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{I_\nu(x)} = \frac{1}{1+w} \tag{1.1}$$

donde $w=\Gamma(\nu+1) \sum_1^\infty \frac{1}{\Gamma(\nu+r+1)} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{\Gamma(r+1)} = \sum_1^\infty A_r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}$

con

$$A_r = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+r+1)\ \Gamma(r+1)},$$

Como, por otra parte, la serie:

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+1) I_\nu(x)} = \frac{1}{1+w} = 1-w+w^2-\ldots \tag{1.2}$$

converge absolutamente para todos los valores reales de w tales que $0 \leq |w| < \rho < 1$, sigue de (1.1) y (1.2) que:

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{I_\nu(x)} = \sum_{k=0}^\infty A_{\nu k} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad \left(\left|\frac{x}{2}\right|<1\right)$$

es decir:

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} = I_\nu(x) \sum_{k=0}^\infty A_{\nu k} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} =$$

$$= \frac{A_{\nu 0}}{\Gamma(1)\Gamma(\nu+1)}+\left(\frac{A_{\nu 1}}{\Gamma(1)\Gamma(\nu+1)}+\frac{A_{\nu 0}}{\Gamma(2)\Gamma(\nu+2)}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^2+\ldots \qquad (1.3)$$

y por tanto:

$$A_{\nu 0}=1, \qquad A_{\nu 1}=-\frac{-\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2)\Gamma(\nu+2)}, \sum_{\lambda=0}^{k}\frac{A_{\nu\lambda}}{\Gamma(k-\lambda+1)\Gamma(\nu+k-\lambda+1)} = 0,$$

teniéndose

$$A_{\nu k}=-\Gamma(\nu+1)\sum_{\lambda=1}^{k-1}\frac{A_{\nu k}}{\Gamma(k-\lambda+1)\Gamma(\nu+k-\lambda+1)} - \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \qquad (1.4)$$

k=2,3,...

En particular, para $\nu=0$, resulta:

$$A_{0k}= -\sum_{r=1}^{k-1}\frac{A_{0r}}{(\Gamma(k-r+1))^2} - \frac{1}{\Gamma^2(k+1)} = -\sum_{r=1}^{k-1}\frac{A_{0r}}{((k-r)!)^2} - \frac{1}{(k!)^2}$$

lo que proporciona el siguiente desarrollo:

$$\frac{1}{I_0(x)}=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{19}{36}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\frac{50}{144}\left(\frac{x}{2}\right)^8+\ldots \qquad (1.5)$$

Asímismo, para $\nu=1$, se infiere:

$$A_{1k}= -\sum_{r=1}^{k-1}\frac{A_{1r}}{\Gamma(k-r+1)\Gamma(k-r+2)} - \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+2)}$$

que da lugar a:

$$\frac{1}{I_1(x)}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{7}{144}\left(\frac{x}{2}\right)^6-\frac{31}{2880}\left(\frac{x}{2}\right)^8+\ldots \qquad (1.6)$$

1.2 Desarrollo de la función $\frac{\left(\frac{x}{2}\right)I_{\nu-1}(x)}{\Gamma(\nu+1)I_\nu(x)}$

Si se escribe

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)I_{\nu-1}(x)}{\Gamma(\nu+1)I_\nu(x)}=\frac{1}{1+w}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\nu+\lambda)} \qquad (1.7)$$

donde w es como en el apartado anterior, sigue de (1.2) y (1.7):

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)I_{\nu-1}(x)}{\Gamma(\nu+1)I_\nu(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}B_{\nu k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad \left(\left|\frac{x}{2}\right|<1\right) \qquad (1.8)$$

Haciendo uso del desarrollo de $I_\nu(x)$ y dividiendo por $\left(\frac{x}{2}\right)^\nu$, resulta

$$\Gamma(\nu+1)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k)}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}B_{\nu k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k)}$$

Ahora bien, puesto que el término general de la serie del primer miembro es de la forma:

$$u_n=\left(\frac{B_{\nu n}}{\Gamma(1)\Gamma(\nu+1)}+\frac{B_{\nu n-1}}{\Gamma(2)\Gamma(\nu+2)}+\ldots+\frac{B_{\nu 2}}{\Gamma(n-1)\Gamma(\nu+n-1)}+\frac{B_{\nu 1}}{\Gamma(n)\Gamma(\nu+n)}+\frac{B_{\nu 0}}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)}\right)\Gamma(\nu+1),$$

debe ser

$$\sum_{\lambda=0}^{k}\frac{B_{\nu\lambda}}{\Gamma(k-\lambda+1)\Gamma(\nu+k-\lambda+1)}=\frac{1}{\Gamma(\nu+k)\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+1)} \qquad (1.9)$$

expresión que conduce a los siguientes valores de los coeficientes:

$$B_{\nu 0}=\frac{1}{\Gamma(\nu)},\qquad B_{\nu 1}=\Gamma(\nu+1)\left(\frac{-1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+2)}+\frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+1)}\right),$$

$$B_{\nu k}=\frac{2\nu+k+1}{\nu+1}\;\frac{1}{\Gamma(k)\Gamma(\nu+k+1)}+\sum_{\lambda=2}^{k-1}\frac{B_{\nu\lambda}}{\Gamma(k-\lambda+1)\Gamma(\nu+k-\lambda+1)} \qquad (1.10)$$

(k=2,3,4,...)

1.3 Desarrollo de la función $\dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} I_{\nu+1}(x)}{\Gamma(\nu+1)I_{\nu}(x)}$

De igual manera que en el caso precedente, si partimos del desarrollo de $I_{\nu+1}(x)$ y se divide por $\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}$, resulta:

$$\frac{I_{\nu+1}(x)}{\Gamma(\nu+1)I_{\nu}(x)}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\nu+\lambda+2)}\sum_{r=1}^{\infty}A_r\left(\frac{x}{2}\right)^{2r},\quad\left(\left|\frac{x}{2}\right|<1\right)$$

Por otra parte, se tiene:

$$\frac{I_{\nu+1}(x)}{\Gamma(\nu+1)I_{\nu}(x)}=\frac{1}{1+w}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1}}{\Gamma(r+1)\Gamma(\nu+r+2)}\qquad\left(\left|\frac{x}{2}\right|<1\right)$$

infiriéndose:

$$\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_{\nu}(x)}=\sum_{r=0}^{\infty}C_{\nu k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}\ (|x|<2) \qquad (1.11)$$

con coeficientes $C_{\nu k}$ que han de ser calculados por la ecuación:

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\nu+\lambda+2)}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\nu+\lambda+2)}\sum_{k=0}^{\infty}C_{\nu k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}$$

de la que se desprende la siguiente fórmula de recurrencia:

$$\Gamma(\nu+1)\sum_{\lambda=0}^{k}\frac{C_{\nu\lambda}}{\Gamma(k-\lambda+1)\Gamma(\nu+k-\lambda+1)}=\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+2)},\ k=0,1,2,\ldots \qquad (1.12)$$

Asímismo, si tenemos en cuenta el valor $C_{\nu 0}=\frac{1}{\Gamma(\nu+2)}$, se deduce de (1.10) esta otra fórmula más cómoda que la anterior:

$$\frac{C_{\nu k}}{\Gamma(\nu+1)}=\frac{1}{\Gamma(\nu+2)\Gamma(k)\Gamma(\nu+k+2)}-\sum_{\lambda=1}^{k-1}\frac{C_{\nu\lambda}}{\Gamma(k-\lambda+1)\Gamma(\nu+k-\lambda+1)},\ k=2,3,\ldots \qquad (1.13)$$

1.4 Desarrollo de la función $\frac{2}{\Gamma(\nu+1)}\ln\left|\Gamma(\nu+1)I_\nu(x)\left(\frac{2}{x}\right)^\nu\right|$

De la relación [5,p.79]:

$$I'_\nu=\frac{I_{\nu-1}+I_{\nu+1}}{2}$$

resulta, al multiplicar por $\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\ \frac{\frac{x}{2}}{I_\nu(x)}$:

$$\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)}\ \frac{I'_\nu(x)}{I_\nu(x)}=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)}\ \frac{I_{\nu-1}(x)}{I_\nu(x)}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)}\ \frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)}$$

Por otra parte, de (1.8) y (1.11) se infiere:

$$\frac{2}{\Gamma(\nu+1)}\ \frac{I'_\nu(x)}{I_\nu(x)}=B_{\nu0}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1}+C_{\nu0}\left(\frac{x}{2}\right)+\sum_1^\infty B_{\nu k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}+\sum_1^\infty C_{\nu k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}$$

la cual converge absoluta y uniformemente para $|x|<2$.

Teniendo ahora en cuenta que:

$$\left(\ln\left(\frac{I_\nu(x)}{x^\nu}\right)\right)=\frac{I'_\nu(x)}{I_\nu(x)}-\frac{\nu}{x}\ ,\quad \frac{2}{\Gamma(\nu+1)}\ \frac{\nu}{x}=B_{\nu0}\frac{2}{x},$$

podrá escribirse

$$\frac{2}{\Gamma(\nu+1)}\ \ln\left(\frac{I_\nu(x)}{x^\nu}\right)=k+C_{\nu0}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\sum_1^\infty\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}B_{\nu k}+\sum_1^\infty\frac{C_{\nu k}}{k+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2}\qquad(1.14)$$

donde la constante k se calcula mediante la relación que resulta haciendo en (1.13) $x\to0$, esto es:

$$k=\frac{2}{\Gamma(\nu+1)}\ \ln\left(\lim_{x\to0}\frac{I_\nu(x)}{x^\nu}\right)=\frac{2}{\Gamma(\nu+1)}\ \ln\left(\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\right)$$

habida cuenta de que

$$\lim_{x\to0}\frac{I_\nu(x)}{x^\nu}=\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\quad(\nu\geq0)$$

En definitiva:

$$\frac{2}{\Gamma(\nu+1)}\ln\left(\Gamma(\nu+1)I_\nu(x)\left(\frac{2}{x}\right)^\nu\right)=C_{\nu0}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\sum_1^\infty\frac{B_{\nu k}}{k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}+$$

$$+\sum_1^\infty\frac{C_{\nu k}}{k+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2}\ (|x|<2)\qquad(1.15)$$

2. DESARROLLOS EN SERIE DE EXPRESIONES QUE CONTIENEN FUNCIONES DE BESSEL-CLIFFORD $C_\nu(x)$ DE PRIMERA ESPECIE

Como en el apartado anterior, se considera $\nu\geq 0$ y los argumentos de las funciones reales y positivos.

2.1 Desarrollo de la función $\dfrac{1}{C_\nu(x)}$

La función $C_\nu(x)$ de Bessel-Clifford de primera especie y orden ν, es solución de la ecuación diferencial:

$$xy''+(\nu+1)y'+y=0$$

y su relación con la $J_\nu(x)$ de Bessel, es la siguiente [4,p.79]

$$C_\nu(x)=x^{-\nu/2}J_\nu(2\sqrt{x}) \tag{2.1}$$

Su propiedad fundamental es la de ser entera para todo ν y todo x.

Poniendo $2\sqrt{x}$ en lugar de x en el desarrollo de Brixy [1, p.372]:

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{J_\nu(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{\nu k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\quad(\left|\frac{x}{2}\right|<1) \tag{2.2}$$

y teniendo en cuenta (2.1), resulta:

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+1)C_\nu(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{\nu k}x^k\quad(|x|<1)$$

cuyos coeficientes $a_{\nu k}$ pueden calcularse por medio de las fórmulas:

$$a_{\nu 0}=1,\ a_{\nu 1}=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2)\ \Gamma(\nu+2)}$$

$$(-1)^k a_{\nu k}=\Gamma(\nu+1)\sum_{\lambda=1}^{k-1}\frac{(-1)^{\lambda-1}a_{\nu\lambda}}{\Gamma(k-\lambda+1)\ \Gamma(\nu+k-\lambda+1)}-\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(k+1)\ \Gamma(\nu+k+1)} \tag{2.3}$$

k=2,3,4,...

En particular, para $\nu=0$, se tiene:

$$a_{00}=1,\ a_{01}=1,\ a_{02}=3/4,\ a_{0k}=(-1)^k\frac{k^2-1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1)}-\sum_{\lambda=2}^{k-1}\frac{(-1)^{\lambda-1}a_{0\lambda}}{\Gamma(k-\lambda+1)\ \Gamma(k-\lambda+1)}$$

(k=3,4,5,...)

lo que lleva al desarrollo en serie

$$\frac{1}{C_0(x)}=1+\frac{3}{4}x^2+\frac{19}{36}x^3+\frac{211}{576}x^4+\frac{1217}{4800}x^5+\frac{30307}{172800}x^6+\frac{3081553}{25401600}x^7+ . \tag{2.4}$$

válido para $|x|<1$.

Asímismo, para $\nu=1$, sigue:

$$a_{10}=1,\ a_{11}=1/2,\ a_{12}=1/6,\ a_{1k}=\frac{k(k+1)-2}{2\Gamma(k+1)\Gamma(k+2)}-\sum_{\lambda=2}^{k-1}\frac{(-1)^{\lambda-1}a_{1\lambda}}{\Gamma(k-\lambda+1)\ \Gamma(k-\lambda+2)}$$

(k=3,4,5,...)

de donde:

$$\frac{1}{C_1(x)}=1+\frac{x}{2}+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{144}x^3+\frac{13}{960}x^4+\frac{107}{28800}x^5+$$

$$+\frac{409}{403200}x^6+\frac{56197}{203212800}x^7+..\ (|x|<1) \qquad (2.5)$$

2.2 Desarrollo de la función $\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\frac{C_{\nu-1}(x)}{C_\nu(x)}$

Del desarrollo de Brixy [1, p.375]:

$$\frac{\frac{x}{2}}{\Gamma(\nu+1)}\frac{J_{\nu-1}(x)}{J_\nu(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}b_{\nu k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\ (|\frac{x}{2}|<1)$$

y análogo procedimiento al utilizado en el apartado 2.1, se tiene:

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\frac{C_{\nu-1}(x)}{C_\nu(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}b_{\nu k}x^k\ \ (|x|<1)$$

con $$b_{\nu 0}=\frac{1}{\Gamma(\nu)},\ b_{\nu 1}=\frac{-1}{\Gamma(\nu+2)},\ b_{\nu 2}=-\frac{1}{\nu+1}\ \frac{1}{\Gamma(2)\Gamma(\nu+3)} \qquad (2.6)$$

calculándose los coeficientes $b_{\nu k}$ por la relación de recurrencia:

$$(-1)^k b_{\nu k}=-\frac{k-1}{\nu+1}\frac{1}{\Gamma(k)\Gamma(\nu+k-1)}-\Gamma(\nu+1)\sum_{\lambda=2}^{k-1}(-1)^\lambda\frac{b_{\nu\lambda}}{\Gamma(k-\lambda+1)\Gamma(\nu+k-\lambda+1)} \qquad (2.7)$$

(k=3,4,5...)

En particular, para $\nu=0$, resulta el desarrollo siguiente:

$$\frac{C_0(x)}{C_1(x)}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{48}x^3+\frac{1}{180}x^4-\frac{13}{8640}x^5-... \qquad (2.8)$$

válido para $|x|<1$.

2.3 Desarrollo de la función $\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\frac{C_{\nu+1}(x)}{C_\nu(x)}$

De igual forma, del desarrollo de Brixy [1, p.376]:

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\frac{J_{\nu+1}(x)}{J_\nu(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}c_{\nu k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}\left(|\frac{x}{2}|<1\right)$$

sigue:

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\frac{C_{\nu+1}(x)}{C_\nu(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}c_{\nu k}x^k \qquad (|x|<1)$$

cuyos coeficientes $c_{\nu k}$ se calculan recursivamente mediante:

$$c_{\nu 0}=\frac{1}{\Gamma(\nu+2)} \quad , \; c_{\nu 1} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+2)\Gamma(\nu+3)} \tag{2.9}$$

$$(-1)^{k+1}c_{\nu k}=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+2)\Gamma(k)\Gamma(\nu+k+2)} + \Gamma(\nu+1)\sum_{\lambda=1}^{k-1}(-1)^{\lambda}\frac{a_{\nu\lambda}}{\Gamma(k-\lambda+1)\Gamma(k+\nu-\lambda+1)} \tag{2.10}$$

(k=2,3,4,...)

En particular, para $\nu=0$

$$b_{0k} = -c_{0k-1}$$

teniéndose:

$$\frac{C_1(x)}{C_0(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{0k}x^k=-\sum_{k=1}^{\infty} b_{0k}x^{k-1}= -\left(\frac{C_0(x)}{C_1(x)} - 1\right)\frac{1}{x} \tag{2.11}$$

y para $\nu=1$:

$$\frac{C_2(x)}{C_1(x)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}x+\frac{1}{48}x^2+\frac{1}{180}x^3+\frac{13}{8640}x^4+\frac{11}{26880}x^5+\ldots \tag{2.12}$$

válidos para $|x|<1$.

2.4 Desarrollo de la función $\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\ln|C_\nu(x)\Gamma(\nu+1)|$

Finalmente, si se parte de [1, p.378]:

$$\ln\left|\Gamma(\nu+1)J_\nu(x)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\right|=\frac{-1}{\nu+1}\left(\frac{x}{2}\right)^2-\Gamma(\nu+1)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{c_{\nu k-1}}{k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad (|x|<2, \; \nu\geq 0)$$

se deduce con el mismo método:

$$\ln|C_\nu(x)\Gamma(\nu+1)|=\frac{-x}{\nu+1}-\Gamma(\nu+1)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{c_{\nu k-1}}{k}x^k \quad (|x|<1, \nu\geq 0) \tag{2.13}$$

donde los coeficientes $c_{\nu\lambda}$ se obtienen a partir de los $b_{\nu\lambda}$, por la relación sencilla:

$$b_{\nu\lambda} = -c_{\nu\lambda-1} \tag{2.14}$$

3. DESARROLLOS EN SERIE DE EXPRESIONES QUE CONTIENEN FUNCIONES DE BESSEL-CLIFFORD $E_\nu(x)$ MODIFICADAS DE PRIMERA ESPECIE

Como en los apartados 1 y 2 se supone $\nu\geq 0$ y el argumento x real positivo. La función $E_\nu(x)$ de Bessel-Clifford modificada de primera especie es solución de la ecuación diferencial:

$$xy''+(\nu+1)y'-y=0 \tag{3.1}$$

y su relación con la $I_\nu(x)$ de Bessel es [4, p.80]:

$$E_\nu(x)=x^{-\nu/2}I_\nu(2\sqrt{x}) \tag{3.2}$$

Una de sus propiedades fundamentales es que la serie que la representa:

$$E_\nu(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r!\Gamma(\nu+r+1)} \qquad (3.3)$$

es para $\nu\geq 0$, absoluta y uniformemente convergente en todo intervalo finito de x. Además, si x es real y mayor que cero, todos los términos de (3.3) son positivos y la función no tendrá ceros reales. Mediante el cambio de variable $x=2\sqrt{t}$ y teniendo en cuenta (3.2), se deducen de (1.8), (1.11), (1.13), los desarrollos siguientes de expresiones que contienen las modificadas de Bessel-Clifford de primera especie:

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+1)E_\nu(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{\nu k}x^k \qquad (|x|<1) \qquad (3.4)$$

donde los coeficientes $A_{\nu k}$ vienen dados por (1.4).

$$\frac{E_{\nu,1}(x)}{\Gamma(\nu+1)E_\nu(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} B_{\nu k}x^k \qquad (|x|<1) \qquad (3.5)$$

cuyos coeficientes $B_{\nu k}$ se calculan por (1.10)

$$\frac{E_{\nu+1}(x)}{\Gamma(\nu+1)E_\nu(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{\nu k}x^k \qquad (|x|<1) \qquad (3.6)$$

con coeficientes $C_{\nu k}$ iguales que en (1.1)

$$\frac{2}{\Gamma(\nu+1)}\ln|E_\nu(x)\Gamma(\nu+1)| = C_{\nu 0}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{\nu k}}{k}x^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_{\nu k}}{k+1}x^{k+1} \qquad (|x|<1) \qquad (3.7)$$

siendo $B_{\nu k}$ y $C_{\nu k}$ los coeficientes que aparecen en (1.14).

4. OTRAS FORMULAS

A partir de los desarrollos anteriores, pueden deducirse fórmulas integrales análogas a las obtenidas por Brixy ([2], [3]). Por ejemplo:

$$\int\frac{dx}{C_\nu(x)} = \Gamma(\nu+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{\nu k}}{k+1}x^{k+1},$$

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\int_0^{1/2}\frac{x^{-1/2}dx}{C_\nu(x)} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{\nu k}}{(2k+1)2^{k+1/2}},$$

etc...

5. TABLAS DE LOS COEFICIENTES $a_{\nu k}$, $b_{\nu k}$, $A_{\nu k}$

Para finalizar este artículo, incluimos unas tablas de los coeficientes $a_{\nu k}$, $b_{\nu k}$, $\nu = 0,1,2,\ldots,6$, $k = 0,1,2,\ldots,20$, más amplia que la de Brixy (en la que figuran sólo hasta seis decimales). También se expone una tabla de coeficientes $A_{\nu k}$ para iguales valores de ν y k.

k	a_{0k}	a_{1k}	a_{2k}	a_{3k}
0	1.0000000000000000000	1.0000000000000000000	1.0000000000000000000	1.0000000000000000000
1	1.0000000000000000000	0.50000000000000000000	0.33333333333333333333	0.25000000000000000000
2	0.75000000000000000000	0.16666666666666666667	0.069444444444444444444	0.037500000000000000000
3	0.52777777777777777778	0.048611111111111111111	0.012037037037037037037	0.0045138888888888888889
4	0.36631944444444444444	0.013541666666666666667	0.0019290123456790123457	0.00048859126984126984127
5	0.25354166666666666667	0.0037152777777777777778	0.00029908877131099353322	0.000050223214285714285714
6	0.17538773148148148148	0.0010143849206349206349	0.000045752804722712130120	0.0000050372483098177542622
7	0.12131176776260619803	0.00027654261936255983875	0.0000069618682521019381690	4.9951741885025615184*10^-7
8	0.083906930936437074830	0.000075356897356421992665	0.0000010571643173444503544	4.9281635265638241829*10^-8
9	0.058035143599817470427	0.000020531666196928588536	1.6040589035717514064*10^-7	4.8510586350517365362*10^-9
10	0.040140610352048519739	0.0000055938068968949241583	2.4331589107779022617*10^-8	4.7704441866108027557*10^-10
11	0.027763666546401709760	0.0000015240014836172456871	3.6903945787075087996*10^-9	4.6891635670500508471*10^-11
12	0.019203025388674620031	4.1520417339491710074*10^-7	5.5970252270810265250*10^-10	4.6084192305221772456*10^-12
13	0.013281969858343292151	1.1311951987547183893 7*10^-7	8.4885802853089197516*10^-11	4.5287073862875970314*10^-13
14	0.0091866109417244668 75	3.0818624667383646189*10^-8	1.2873907172924626089 3*10^-11	4.4502236833030304140*10^-14
15	0.0063540138608530906091	8.3963186415775518 01*10^-9	1.9524717600402731042*10^-12	4.3730367891310059884*10^-15
16	0.0043948189815196901308	2.2875181950518941552*10^-9	2.9611390692683743846*10^-13	4.2971620507568309691*10^-16
17	0.0030397217102713028874	6.2321830203271723462*10^-10	4.4908931221921512032*10^-14	4.2225926054950024842*10^-17
18	0.0021024547574626586199	1.6979145862962835731*10^-10	6.8109326668234198764*10^-15	4.1493124835319889572*10^-18
19	0.0014541844380819337586	4.6258492902420148508*10^-11	1.0329527029791790386*10^-15	4.0773021155153240223*10^-19
20	0.0010058016099769192123	1.2602802180858676284 8*10^-11	1.5665861380984202532*10^-16	4.0065406434049310891*10^-20

k	a_{4k}	a_{5k}	a_{6k}
0	1.0000000000000000000	1.0000000000000000000	1.0000000000000000000
1	0.20000000000000000000	0.16666666666666666667	0.14285714285714285714
2	0.023333333333333333333	0.015873015873015873016	0.011479591836734693878
3	0.0021269841269841269841	0.0011574074074074074074	0.00069511931756829716013
4	0.00017043650793650793651	0.000072830057949105568153	0.000035780326869977015750
5	0.000012746913580246913580	0.0000042123330813807004283	0.0000016704987940931297866
6	9.1919669102208784748*10^-7	2.3218646258139833348*10^-7	7.3524506888464311408*10^-8
7	6.5047489253838460188*10^-8	1.2457411794461429130*10^-8	3.1239943528424912001*10^-9
8	4.5596165420900870636*10^-9	6.5854261437366813556*10^-10	1.3001883472163910701*10^-10
9	3.1811910833179834608*10^-10	3.4536691059327303713*10^-11	5.3472978470059276350*10^-12
10	2.2144284397843228783*10^-11	1.8036418185563658120*10^-12	2.1844497294374356891*10^-13
11	1.5397780584559561021*10^-12	9.3986976451503292715*10^-14	8.8904545696615658097*10^-15
12	1.0701088399208318856 6*10^-13	4.8920827784713248207*10^-15	3.6108663154329203587*10^-16
13	7.4351591477311067784*10^-15	2.5448853728884058228*10^-16	1.4649103100810843397*10^-17
14	5.1653738167457772100*10^-16	1.3234706637961610601 6*10^-17	5.9394509613002038465*10^-19
15	3.5883042648988755787*10^-17	6.8816912370104210682*10^-19	2.4073483522056992192*10^-20
16	2.4926738846210235821*10^-18	3.5780216260559868156*10^-20	9.7556196872564053 63*10^-22
17	1.7315552123578421543*10^-19	1.8602614221480745785*10^-21	3.9530254135755403478*10^-23
18	1.2028312963336333581 2*10^-20	9.6715596866266029525*10^-23	1.6017040706795999247*10^-24
19	8.3554898540547128137*10^-22	5.0282256867395061640*10^-24	6.4896777496843915678*10^-26
20	5.8041490751284668298*10^-23	2.6141520159545201463*10^-25	2.6294060544483360870*10^-27

k	b_{0k}	b_{1k}	b_{2k}	b_{3k}
0	0.	1.0000000000000000000	1.0000000000000000000	0.5000000000000000000
1	-1.0000000000000000000	-0.5000000000000000000	-0.1666666666666666667	-0.0416666666666666667
2	-0.5000000000000000000	-0.0833333333333333333	-0.0138888888888888889	-0.0020833333333333333
3	-0.3333333333333333333	-0.0208333333333333333	-0.0018518518518518519	-0.0001736111111111111
4	-0.2291666666666666667	-0.0055555555555555556	-0.0002700617283950617284	-0.0000161210317460317460 32
5	-0.1583333333333333333	-0.0015046296296296296	-0.0000404174015285126396 24	-0.0000015500992063492063 492
6	-0.1094907407407407407 41	-0.0004092261904761904 7619	-0.0000061008842837546541 250	-(1.5099114491475602587*10^-7)
7	-0.0757275132275132275 13	-0.0001114349096119929 45326	-(9.2368051472989744595*10^-7)	-(1.4783353542034097590*10^-8)
8	-0.0523773354828042328 04	-0.0000303551526063100 13717	-(1.3999798593419992597*10^-7)	-(1.4504686116169251090*10^-9)
9	-0.0362272728664511071 92	-0.0000082696835807368 21478	-(2.1227280315071810271*10^-8)	-(1.4243778431492000716*10^-10)
10	-0.0250569590651332549 48	-0.0000022529877190853 271100	-(3.2190715077032970102*10^-9)	-(1.3992746341852795777 0*10^-11)
11	-0.0173309023741604760 12	-(6.1380830885958843778*10^-7)	-(4.8819182499567948215*10^-10)	-(1.3748298124485303639*10^-12)
12	-0.0119870966097812926 20	-(1.6722757639750401361*10^-7)	-(7.4038762241734611286*10^-11)	-(1.3509023235614965146*10^-13)
13	-0.0082909985363558457 05	-(4.5559965268705045158*10^-8)	-(1.1228740802878656243 1*10^-11)	-(1.3274290845610570640 3*10^-14)
14	-0.0057345543350616040 017	-(1.2412491931623198389*10^-8)	-(1.7029589409356458058*10^-12)	-(1.3043795710735338886*10^-15)
15	-0.0039663634345757943 305	-(3.3816963265759624690*10^-9)	-(2.5827225147949862294*10^-13)	-(1.2817369413358301547*10^-16)
16	-0.0027433760283280055 138	-(9.2131945437974242254*10^-10)	-(3.9169812073902693831*10^-14)	-(1.2594901545891067039 2*10^-17)
17	-0.0018974842212570571 925	-(2.5100702740680769325*10^-10)	-(5.9405313192535432859*10^-15)	-(1.2376306712927744074*10^-18)
18	-0.0013124144604123223 375	-(6.8385105329146999742*10^-11)	-(9.0094673366856977 85*10^-16)	-(1.2161510690148054093*10^-19)
19	-0.0009077449480759809 2506	-(1.8631042652042571761*10^-11)	-(1.3663845697966678335*10^-16)	-(1.1950444607398754850 6*10^-20)
20	-0.0006278511214351007 1775	-(5.0758969908914807617*10^-12)	-(2.0722721296096716869*10^-17)	-(1.1743042496382624414*10^-21)

k	b_{4k}	b_{5k}	b_{6k}
0	0.1666666666666666667	0.0416666666666666667	0.0083333333333333333
1	-0.0083333333333333333	-0.0013888888888888889	-0.0001984126984126984 1270
2	-0.0002777777777777777 778	-0.0000330687830687830 68783	-0.0000035430839002267 573696
3	-0.0000158730158730158 73016	-0.0000013778659611992 945326	-(1.1247885397545261490 8*10^-7)
4	-0.0000010251322751322 751323	-(6.5612664819014025363*10^-8)	-(4.1175294758871046529*10^-9)
5	-(6.9077013521457965902*10^-8)	-(3.2806332409507012682*10^-9)	-(1.5911897246063565653*10^-10)
6	-(4.7346098933400520702*10^-9)	-(1.6746378196050657628*10^-10)	-(6.2982868062133058273*10^-12)
7	-(3.2690217875403060588*10^-10)	-(8.6296118501438901204*10^-12)	-(2.5217356949188157924*10^-13)
8	-(2.2645051442450031515*10^-11)	-(4.4669869399070309299*10^-13)	-(1.0154503659484263426 4*10^-14)
9	-(1.5710050589743207531*10^-12)	-(2.3173360270881770173*10^-14)	-(4.1009814984003979945*10^-16)
10	-(1.0906403202776484599 5*10^-13)	-(1.2034636073555843941*10^-15)	-(1.6587354449206278844*10^-17)
11	-(7.5739941586829038655*10^-15)	-(6.2533230917542011633*10^-17)	-(6.7144911862055540346*10^-19)
12	-(5.2605790628279379561*10^-16)	-(3.2501691275945749469*10^-18)	-(2.7191445249360008621*10^-20)
13	-(3.6540347486853800203*10^-17)	-(1.6895068157200765413*10^-19)	-(1.1014091681933114229*10^-21)
14	-(2.5382016539648111892*10^-18)	-(8.7830144322063434876*10^-21)	-(4.4618688896353552651*10^-23)
15	-(1.7631379881711666202*10^-19)	-(4.5660661839278789602*10^-22)	-(1.8076422643495885140*10^-24)
16	-(1.2247561972242688134 8*10^-20)	-(2.3738231289376508197*10^-23)	-(7.3235706681556150808*10^-26)
17	-(8.5077452162175593 26*10^-22)	-(1.2341226518931278527*10^-24)	-(2.9671610456888314219*10^-27)
18	-(5.9098982601458515217*10^-23)	-(6.4160865812657740576*10^-26)	-(1.2021635488063220983*10^-28)
19	-(4.1053091036111038051*10^-24)	-(3.3356700131326635130*10^-27)	-(4.8706646999910225563*10^-30)
20	-(2.8517527874328882752*10^-25)	-(1.7341890400171363708*10^-28)	-(1.9733953898603793526*10^-31)

k	A_{0k}	A_{1k}	A_{2k}	A_{3k}
0	1.0000000000000000000	1.0000000000000000000	1.0000000000000000000	1.0000000000000000000
1	-1.0000000000000000000	-0.5000000000000000000	-0.3333333333333333333	-0.2500000000000000000
2	0.7500000000000000000	0.1666666666666666667	0.0694444444444444444	0.0375000000000000000
3	-0.5277777777777777778	-0.0486111111111111111	-0.0120370370370370370	-0.0045138888888888889
4	0.3663194444444444444	0.0135416666666666667	0.0019290123456790123457	0.0004885912698412698 4127
5	-0.2535416666666666667	-0.0037152777777777778	-0.0002990887713109935 3322	-0.0000502232142857142 85714
6	0.1753877314814814815	0.0010143849206349206349	0.0000457528047227121 30120	0.0000050372483098177542622
7	-0.1213117677626606198 03	-0.0002765426193625598 3875	-0.0000069618682521019381690	-(4.99517418850256151 84*10^-7)
8	0.0839069309364370748 30	0.0000753568973564219 92665	0.0000010571643173444503544	4.928163526563824182 9*10^-8
9	-0.0580351435998174704 27	-0.0000205316661969285 88536	-(1.604058903571751406 4*10^-7)	-(4.851058635051736536 2*10^-9)
10	0.0401406103520485197 39	0.0000055938068968949241583	2.433158910777902261 7*10^-8	4.770444186610802755 7*10^-10
11	-0.0277636665464017097 60	-0.0000015240014836172456871	-(3.690394578707508799 6*10^-9)	-(4.689163567050050847 1*10^-11)
12	0.0192030253886746200 31	4.152041733949171007 4*10^-7	5.597025227081026525 0*10^-10	4.608419230522177245 6*10^-12
13	-0.0132819698583432921 51	-(1.131195198754718389 37*10^-7)	-(8.488580285308919751 6*10^-11)	-(4.528707386287597031 4*10^-13)
14	0.0091866109417244668 75	3.081862466738364618 9*10^-8	1.287390717292462608 93*10^-11	4.450223683303030414 0*10^-14
15	-0.0063540138608530906 091	-(8.396318641577551801*10^-9)	-(1.952471760040273104 2*10^-12)	-(4.373036789131005988 4*10^-15)
16	0.0043948189815196901 308	2.287518195051894155 2*10^-9	2.961139069268374384 6*10^-13	4.297162050756830969 1*10^-16
17	-0.0030397217102713028 874	-(6.232183020327172346 2*10^-10)	-(4.490893122192151203 2*10^-14)	-(4.222592605495002484 2*10^-17)
18	0.0021024547574626586 199	1.697914586296283573 1*10^-10	6.810932666823419876 4*10^-15	4.149312483531988957 2*10^-18
19	-0.0014541844380819337 586	-(4.625849290242014850 8*10^-11)	-(1.032952702979179038 6*10^-15)	-(4.077302115515324022 3*10^-19)
20	0.0010058016099769192 123	1.260280218085867628 48*10^-11	1.566586138098420253 2*10^-16	4.006540643404931089 1*10^-20

k	A_{4k}	A_{5k}	A_{6k}
0	1.0000000000000000000	1.0000000000000000000	1.0000000000000000000
1	-0.2000000000000000000	-0.1666666666666666667	-0.1428571428571428571 4
2	0.0233333333333333333	0.0158730158730158730 16	0.0114795918367346938 78
3	-0.0021269841269841269 841	-0.0011574074074074074 074	-0.0006951193175682971 6013
4	0.0001704365079365079 3651	0.0000728300579491055 68153	0.0000357803268699770 15750
5	-0.0000127469135802469 13580	-0.0000042123330813807 004283	-0.0000016704987940931 297866
6	9.191966910220878474 8*10^-7	2.321864625813983334 8*10^-7	7.352450688846431140 8*10^-8
7	-(6.504748925383846018 8*10^-8)	-(1.245741179446142913 0*10^-8)	-(3.123994352842491200 1*10^-9)
8	4.559616542090087063 6*10^-9	6.585426143736681355 6*10^-10	1.300188347216391070 1*10^-10
9	-(3.181191083317983460 8*10^-10)	-(3.453669105932730371 3*10^-11)	-(5.347297847005927635 0*10^-12)
10	2.214428439784322878 3*10^-11	1.803641818556365812 0*10^-12	2.184449729437435689 1*10^-13
11	-(1.539778058455956102 1*10^-12)	-(9.398697645150329271 5*10^-14)	-(8.890454569661565809 7*10^-15)
12	1.070108839920831885 66*10^-13	4.892082778471324820 7*10^-15	3.610866315432920358 7*10^-16
13	-(7.435159147731106778 4*10^-15)	-(2.544885372888405822 8*10^-16)	-(1.464910310081084339 7*10^-17)
14	5.165373816745777210 0*10^-16	1.323470663796161060 16*10^-17	5.939450960872846945 7*10^-19
15	-(3.588304264898869849 1*10^-17)	-(6.881691237010421068 2*10^-19)	-(2.407348351595189355 1*10^-20)
16	2.492673884621012123 0*10^-18	3.578021626055986815 6*10^-20	9.755619682350522490*10^-22
17	-(1.731555212357828785 3*10^-19)	-(1.860261422148074578 5*10^-21)	-(3.953025410604851948 2*10^-23)
18	1.202831296333621171 37*10^-20	9.671559686626602952 5*10^-23	1.601704069150526704 0*10^-24
19	-(8.355489854054614672 3*10^-22)	-(5.028225686739506164 0*10^-24)	-(6.489677742545600114 1*10^-26)
20	5.804149075128392818 8*10^-23	2.614152015954520146 3*10^-25	2.629406051310022881 5*10^-27

BIBLIOGRAFIA

[1] BRIXY, E. "Logarithmus der Besselschen Funktionen reellen positive Argumentes". Zeitsch. f. Angew. Math. Mech. 19, 372-379 (1939).

[2] BRIXY, E. "Einige Integrale der Besselschen Funktionen reellen positive Argumentes". Zeitsch. f. Angew. Math. Mech. 20, 236-238 (1940).

[3] BRIXY, E. "Zur Berechnung der funktionen $J_{\nu+1}(x)/J_{\nu}(x)$".Zeitsch. f. Angew. Math. Mech. 20, 359-361 (1940).

[4] HAYEK, N. "Estudio de la ecuación diferencial $xy''+(\nu+1)y'+y=0$ y de sus aplicaciones" Collect. Mathematica., vol. XVIII, fasc. 1 y 2, 57-174, Barcelona (1967).

[5] WATSON, G.N. *A treatise on the theory of Bessel functions.* Cambridge Univ. Press, 1944 (reprinted 1958).

Recibido: 30 de Septiembre de 1991