NUMEROS,15 - 1986

JUSTIFICACION GEOMETRICA DE LOS NUMEROS REALES

Manuel Suárez Fernández
E.U. del Profdo. de E.G.B.
Segovia

Recordando recientemente el trabajo "INTRODUCCION GEOMETRICA DE LOS NUMEROS REALES", que publiqué hace algunos años en la *Revista de Bachillerato*, me pareció que algunas ideas y la redacción del mismo podían ser mejoradas. Esto me animó a redactarlo de nuevo, partiendo esta vez de algunas sencillas ideas de Geometría y Teoría de conjuntos, al alcance de quienes hayan estudiado la E.G.B.

Las referidas "sencillas ideas" servirán aquí para justificar intuitivamente los axiomas que se construyan para el fundamento e inclusión de los números reales y su estructura. Tales axiomas, así como las definiciones, notaciones y teoremas, irán, para diferenciarlos claramente de las nociones de Pre-matemática aludidas, encerrados en recuadros.

Consideremos un plano Π, que podemos suponer es el del papel o de la pizarra, como un conjunto de puntos.

Para todo $X,Y \in \Pi$, $X \neq Y$:

. la notación $\overline{XY}$ significará "recta que pasa por X e Y"

. con $\overleftarrow{XY}$, denotaremos "semirrecta de origen X que pasa por Y"

Para todo $X,Y,X',Y' \in \Pi$, $X \neq Y$ e $X' \neq Y'$, indicaremos que "la recta XY es paralela a la X'Y'", así: $\overline{XY} \| \overline{X'Y'}$.

Por último :

. con $\overline{XY}$,queremos decir "segmento de extremos X e Y" ;

. llamaremos "vector de origen X y extremo Y",o más simplemente,"vector XY",y notaremos $\overrightarrow{XY}$,a cualquier (X,Y) de $\Pi\times\Pi$.

Consideremos una relación binaria $\sim$ sobre $\Pi\times\Pi$ de manera que :

Para todo $\overrightarrow{XY}$, $\overrightarrow{X'Y'}$ de $\Pi\times\Pi$, $\overrightarrow{XY}\sim\overrightarrow{X'Y'}$ si y sólo si $\overline{XY}||\overline{X'Y'}$ y $\overline{XX'}||\overline{YY'}$.

En virtud de lo dicho y de lo que la intuición nos dice,justificamos el siguiente enunciado abstracto :

Admitiendo que existe un conjunto Π,no vacío,a cuyos elementos llamaremos puntos,de manera que sobre $\Pi\times\Pi$ está definida una relación de equivalencia $\sim$ tal que,si para todo $X,Y\varepsilon\Pi$,notamos $\overrightarrow{XY}$ al (X,Y) de $\Pi\times\Pi$, entonces :

. para todo $X,Y,X'\ \varepsilon\ \Pi$ existe un único $Y'\varepsilon\Pi$ tal que $\overrightarrow{XY}\sim\overrightarrow{X'Y'}$;

. para todo $\overrightarrow{XY}$, $\overrightarrow{X'Y'}\ \varepsilon\ \Pi\times\Pi$, $\overrightarrow{XY}\sim\overrightarrow{X'Y'}$ si y sólo si $\overrightarrow{XX'}\sim\overrightarrow{YY'}$.

Sobre $\Pi\times\Pi$ definimos una ley de composición interna,que llamaremos "suma sobre $\Pi\times\Pi$" y notaremos Φ,de manera que :

Para todo $\overrightarrow{XY},\overrightarrow{VW}\ \varepsilon\ \Pi\times\Pi$, el vector suma,que notaremos $\overrightarrow{XY}\Phi\overrightarrow{VW}$,es el $\overrightarrow{XW'}$,en donde W'es el único punto tal que $\overrightarrow{YW'}\sim\overrightarrow{VW}$.

Se puede probar que,cualesquiera que sean $\overline{XY},\overline{VW},\overline{X'Y'},\overline{V'W'},\overline{HK}$ de $\Pi\times\Pi$:

. si $\overrightarrow{XY}\sim\overrightarrow{X'Y'}$ y $\overrightarrow{VW}\sim\overrightarrow{V'W'}$, entonces $\overrightarrow{XY}\Phi\overrightarrow{VW}\sim\overrightarrow{X'Y'}\Phi\overrightarrow{V'W'}$;

. $(\overrightarrow{XY}\Phi\overrightarrow{VW})\Phi\overrightarrow{HK}\sim\overrightarrow{XY}\Phi(\overrightarrow{VW}\Phi\overrightarrow{HK})$;

. $\overrightarrow{XY}\Phi\overrightarrow{VW}\sim\overrightarrow{VW}\Phi\overrightarrow{XY}$;

. para todo $V\varepsilon\Pi$, es $\overrightarrow{XY}\Phi\overrightarrow{VV}\sim\overrightarrow{XY}$;

. para todo $V\varepsilon\Pi$, existe un único $Y'\varepsilon\Pi$ tal que $\overrightarrow{XY}\Phi\overrightarrow{XY'}\sim\overrightarrow{VV}$.

Con base en lo anterior y la intuición, justificamos el enunciado que sigue :

Admitiendo que existen $O,U \in \Pi$, $O \neq U$, y un subconjunto de Π , que notaremos $\overline{OU}$ y llamaremos "OU" , tal que $O,U \in \overline{OU}$, se cumple que:

Para todo $X \in \overline{OU}$ y para todo $Y,V \in \Pi$, si $\overrightarrow{OX} \Phi \overrightarrow{OY} \sim \overrightarrow{OV}$, entonces, $Y \in \overline{OU}$ si y sólo si $V \in \overline{OU}$

Sobre OU definimos una ley de composición interna $\dagger$, que llamaremos "suma sobre OU", de manera que:

Para todo $X,Y \in \overline{OU}$, el resultado $X \dagger Y$ es el único $V \in \overline{OU}$ tal que $\overrightarrow{OX} \Phi \overrightarrow{OY} \sim \overrightarrow{OV}$.

Se puede demostrar que dicha ley :

- es asociativa;
- es conmutativa;
- admite un elemento neutro para $\overline{OU}$, el O;
- es tal que todo $X \in \overline{OU}$ tiene elemento simétrico, "-X".

Sobre $\overline{OU}$ consideramos una relación binaria $\leqslant$, tal que :

Para todo $X,Y \in \overline{OU}$, es $X \leqslant Y$ sii el único punto V tal que $\overrightarrow{OV} \sim \overrightarrow{XY}$, es $V \in \overset{\longmapsto}{OU}$.

La intuición y lo anteriormente dicho, nos permiten enunciar :

Admitimos que sobre $\overline{OU}$ hay definida una relación de orden total $\leqslant$, de manera que:

Para todo $X,Y,V \in \overline{OU}$, si $X \leqslant Y$, entonces es $X \dagger V \leqslant Y \dagger V$.

Consideremos la recta OU y otra r, que corta a la primera en el punto O.

La notación T(X,Y,V) significará "triángulo de vértices X,Y,V en el que $\overline{XY} \parallel \overline{OU}$ e $\overline{YV} \parallel r$ " .

Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de dichos triángulos y de los triángulos de generados, es decir, que consisten en un segmento, entiéndase cerrado.

La notación $P(X,Y,V)$ indicará "paralelogramo del que son vértices X,Y,V, de manera que $\overline{XY}\,||\,\overline{OU}$ e $\overline{YV}\,||\,r$".

Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de los referidos paralelogramos y de los paralelogramos degenerados, usado este término en igual sentido que antes.

Diremos que " un $T(X,Y,V)$ es congruente con un $T(X',Y',V')$", lo que notaremos $T(X,Y,V) \equiv T(X', Y', V')$, sii $\overrightarrow{XY}\sim\overrightarrow{X'Y'}$ e $\overrightarrow{YV}\sim\overrightarrow{Y'V'}$.

Diremos que "un $P(X,Y,V)$ es congruente con un $P(X',Y',V')$ sii $\overrightarrow{XY}\sim\overrightarrow{X'Y'}$ e $\overrightarrow{YV}\sim\overrightarrow{Y'V'}$.

Es evidente que la relación $\equiv$ es de equivalencia sobre el conjunto $\mathcal{T}\cup\mathcal{P}$.

Consideraremos la noción de "área" para los elementos de dicho conjunto, a los que llamaremos "figuras", pero no como un número, sino como una relación de equivalencia $\&$. De esta forma, diremos que:

Para todo $F,G\in(\mathcal{T}\cup\mathcal{P})$, "es F equivalente en área a G" sii $F\&G$ y admitimos que:

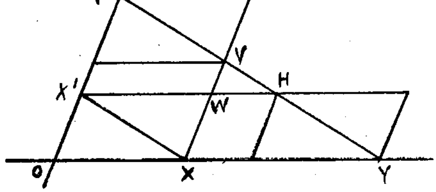
. si $F\equiv G$, entonces $F\&G$;

. si F es una figura unión de las figuras F', F'' y F''', de interiores disjuntos dos a dos, y también G es una figura unión de las figuras G', G'' y G''', de interiores disjuntos dos a dos, y $F'\&G'$ y $F''\sim G''$, entonces, $F\&G$ sii $F''\&G''$.

Elijamos un punto cualquiera $U'\neq O$ perteneciente a la recta r.

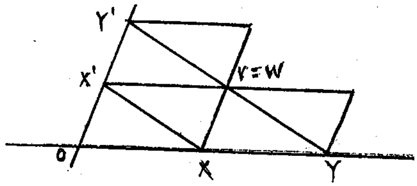
Para todo $X,Y\in\overleftarrow{OU}$ y para todo $X',Y'\in\overleftarrow{OU'}$, si X,Y,X',Y' son distintos de O y $\overline{XX'}\,||\,\overline{YY'}$, entonces ha de verificarse uno de los tres casos siguientes :

Caso 1-Fig.1



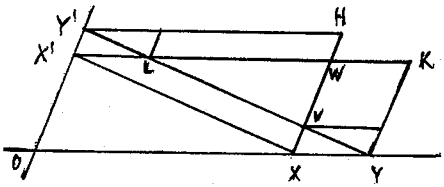
El punto W está entre el V y el X.

Caso 2-Fig.2



El punto W coincide con el V.

Caso 3 -Fig.3



V está entre W y X

En todos los casos, se puede argumentar, sobre la respectiva figura, que :

P(X,O,Y´) & P(Y,O,X´) (*)

En 1, considerando que T(H,X´,Y´) & T(Y,X,V) y, en consecuencia, que P(X´,W,V) & P(H,W,X) , se ve fácilmente que se cumple (*).

En 2, es inmediato.

En el caso 3, si consideramos que T(Y´,H,V) & T(L,K,Y) y, en consecuencia, que P(L,W,H) & P(K,W,V), también resulta cumplirse (*).

La relación (*) se usará más adelante a modo de lema.

En lo que sigue, supondremos que la recta r, en la que está contenida la semirrecta OU´, es perpendicular a la $\overline{OU}$ y, además, que los segmentos OU´ y OU son iguales en longitud. Estas condiciones no son necesarias; si las suponemos es sólo porque resultan "familiares".

Para todo X,Y$\varepsilon\overline{OU}$, si Y´$\varepsilon\overline{OU}$´ y $\overline{U'U}\,||\,\overline{Y'Y}$, entonces, notaremos XΔY al punto perteneciente a la $\overline{OU}$ tal que $\overline{U'X}\,||\,\overline{Y'(X\Delta Y)}$. (Fig.4)

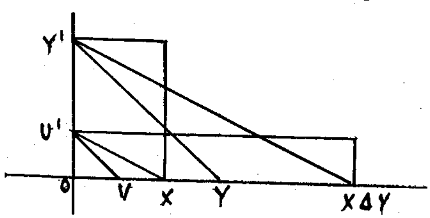


Fig.4

En virtud de (*), puede escribirse:

$P(X,O,Y') \ \& \ P(X\Delta Y,O,U')$ (**)

Es inmediato (fig. 5) que:

Para todo $X \varepsilon \overleftarrow{OU}$, es $U\Delta X = X$

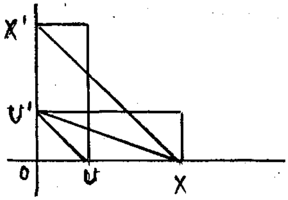


Fig. 5

Argumentemos que:

Para todo $X,Y,V \varepsilon \overleftarrow{OU}$, es $(X\Delta Y)\Delta V = (X\Delta V)\Delta Y$.

En efecto, según la figura siguiente (6) y las relaciones (*) y (**), se verifica que:

$P((X\Delta Y)\Delta V , O , U') \ \& \ P(X\Delta Y , O , V')$

$P(X\Delta Y , O , V') \ \& \ P(X\Delta V , O , Y')$

$P(X\Delta V , O , Y') \ \& \ P((X\Delta V)\Delta Y , O , U')$

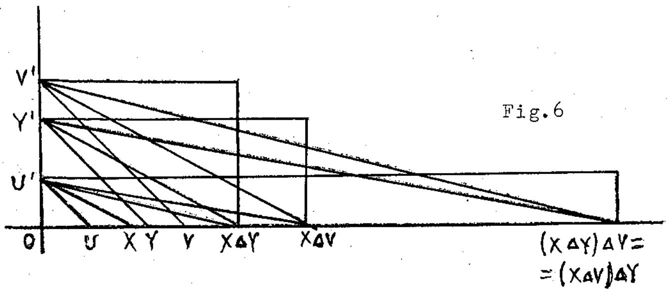


Fig. 6

Por tanto,

$P((X\Delta Y)\Delta V , O , U') \ \& \ P((X\Delta V)\Delta Y , O , U')$, de donde

$(X\Delta Y)\Delta V = (X\Delta V)\Delta Y$

Aclaremos que, en la figura, existe paralelismo entre las rectas U'U y las Y'Y y V'V ; entre U'X e Y'(XΔY) y V'(XΔV) ; entre U'(XΔY) y V'((XΔY)ΔV y, por último, entre la recta U'(XΔV) y la Y'((XΔV)ΔY.

Argumentemos ahora que:

Para todo $X \varepsilon OU$, $X \neq 0$, existe $Y \varepsilon OU$ tal que $X \Delta Y = U$.

En efecto, según la fig.7, representado X, si $Y' \varepsilon \overline{OU}$ es tal que $\overline{Y'U} || \overline{U'X}$, entonces, el punto Y perteneciente a la $\overline{OU}$ tal que $\overline{Y'Y} || \overline{U'U}$, verifica que $X \Delta Y = U$.

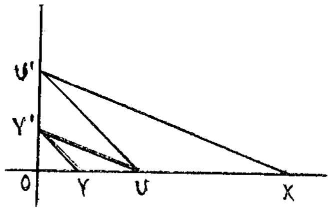


Fig.7

Las figuras 8 y 9 nos permiten argumentar que:

Para todo $X, Y, V \varepsilon \overline{OU}$, se cumple que $(X \dagger Y) \Delta V = X \Delta V \dagger Y \Delta V$, entendiendo que $X \Delta V \dagger Y \Delta V$ significa lo mismo que $(X \Delta V) \dagger (Y \Delta V)$.

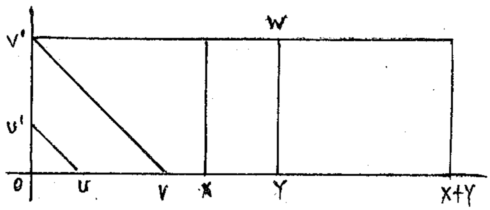


Fig.8

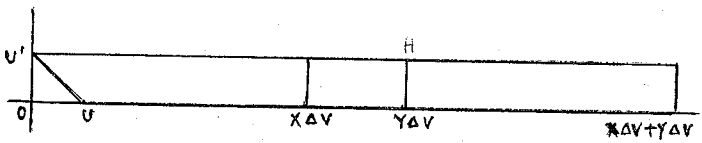


Fig.9

En efecto, según dichas figuras, es:

$P(X \dagger Y , Y , W) \& P(X , 0 , V')$

$P(X , 0 , V') \& P(X \Delta V , 0 , U')$

$P(X \Delta V , 0 , U') \& P(X \Delta V \dagger Y \Delta V , Y \Delta V , H)$

Luego,

$P(X \dagger Y , Y , W) \& P(X \Delta V \dagger Y \Delta V , Y \Delta V , H)$ y, como

$P(Y, 0, V') \& P(Y \Delta V , 0 , U')$, resulta

$P(X \dagger Y , 0 , V') \& P(X \Delta V \dagger Y \Delta V , 0 , U')$

Puesto que también se verifica que

$P(X+Y\ ,\ 0\ ,\ V')\&P(\ (X+Y)\Delta V\ ,\ 0\ ,\ U')$, resulta que

$P(\ (X+Y)\Delta V\ ,\ 0\ ,\ U')\&P(X\Delta V+Y\Delta V\ ,\ 0\ ,\ U')$, de donde,

$$(X+Y)\Delta V = X\Delta V + Y\Delta V$$

Enunciado :

Admitimos que sobre el conjunto $\overleftarrow{OU} = \{\ X \mid X\varepsilon\overleftarrow{OU}\ ,\ 0<X\ \}$ hay definida una ley de composición interna Δ tal que:

Pará todo $X,Y,V\varepsilon\overleftarrow{OU}$ es:

- $U\Delta X=X$
- $(X\Delta Y)\Delta V=(X\Delta V)\Delta Y$
- $(X+Y)\Delta V=X_\Delta V+Y_\Delta V$

Definición :

Sobre $\overline{OU}$ definimos una ley de composición interna, que llamaremos "producto sobre $\overline{OU}$" y notaremos "." , tal que:

Para todo $X,Y\varepsilon\overleftarrow{OU}$ es:

- $X.Y= X\Delta Y$
- $(-X).Y=-(X\Delta Y)$
- $(-X).(-Y)=X\Delta Y$

Puede probarse que . es asociativa y conmutativa ;que $\overline{OU}$ tiene un elemento neutro multiplicativo U y que cada uno de sus elementos $X\neq 0$ tiene un simétrico ; que es distributiva respecto a + y,por último,que para todo $X,Y,V\varepsilon\overline{OU}$, si $X\leqslant Y$ y $0\leqslant V$,entonces es $X.V\leqslant Y.V$

Nueva terminología y notaciones nuevas :

- Al conjunto $\overline{OU}$ lo notaremos $\mathbb{R}$;
- a sus elementos los llamaremos "números reales" y los expresaremos mediante letras minúsculas ;
- a la suma sobre $\overline{OU}$ la llamaremos "suma de números reales" ;
- el producto sobre $\overline{OU}$ se denominará "producto de números rea

les" ;

• al elemento neutro aditivo 0 le llamaremos "cero" y lo representaremos "o" ;

• al elemento neutro multiplicativo U le llamaremos "uno" y su notación será "1" ;

• el simétrico multiplicativo de cualquier real no nulo x, se designará x^{-1} ;

• para todo $x, y, v \in \mathbb{R}$, llamaremos "intervalo real cerrado de extremos x e y , y notaremos $[x,y]$ al conjunto $\{ v \mid v \in \mathbb{R},\ x \leq v\ ,\ v \leq y \}$.

Enunciado :

Admitimos que si I es un conjunto de intervalos cerrados, de manera que para todo $[x,y], [x',y'] \in I$ es $x \leq y'$, $x' \leq y$, entonces existe $v \in \mathbb{R}$ tal que para todo $[x,y] \in I$ se verifica que $v \in [x,y]$

Definición de naturales, enteros y racionales :

Admitimos que existe un subconjunto N de $\mathbb{R}$, a cuyos elementos llamaremos "números naturales", tal que :

• $o \in N$;

• si $x \in N$, entonces $x+1 \in N$;

• si $A \subset N$, $o \in A$ y $x+1 \in A$ siempre que $x \in A$, entonces $A = N$.

Llamaremos "conjunto de los números enteros" al suconjunto Z de $\mathbb{R}$ tal que $Z = \{ x \mid x \in N$ ó $-x \in N \}$

Llamaremos "conjunto de los números racionales" al subconjunto Q de $\mathbb{R}$ tal que $Q = \{ x \mid \exists\, p, q \in Z\ ,\ q \neq o\ \ y\ \ x = p.q^{-1} \}$.

Enunciado :

Admitimos que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, si $o \leq x$, $o \neq x$, entonces existe

$n \in N$ tal que $y \leq x.n$ y, en consecuencia, diremos que "la relación de orden-total $\leq$ es arquimediana" .

En virtud de los enunciados admitidos y de los que, como se ha visto, pueden demostrarse a partir de ellos, llegamos, finalmente, a la siguiente conclusión :

Existe un conjunto $\mathbb{R}$, *a cuyos elementos llamaremos "números reales", que reúne las siguientes características :*

..*Está definida sobre él una l.c.i., que denominaremos "suma de números reales" y notaremos* + *, que:*

. *es asociativa y conmutativa ;*

. *respecto a ella , tiene* $\mathbb{R}$ *como elemento neutro al "cero" ;*

. *cada* $x \in \mathbb{R}$ *tiene un simétrico aditivo, el* $-x \in \mathbb{R}$.

..*La l.c.i. "producto de números reales" , definida sobre* $\mathbb{R}$ *y que notaremos* $\cdot$ *, es tal que :*

. *verifica la asociatividad y la conmutatividad ;*

. *es distributiva con relación a* + ;

. $\mathbb{R}$ *posee elemento neutro relativo a ella, el "uno" (1) y* $1 \neq 0$;

. *todo elemento* x *no nulo de* $\mathbb{R}$ *tiene un simétrico multiplicativo:* x^{-1} .

..*Sobre* $\mathbb{R}$ *está definida la relación de orden total "menor o igual"* ($\leq$) *, que verifica que :*

. *para todo* $x,y,v \in \mathbb{R}$, *si* $x \leq y$, *entonces* $x+v \leq y+v$;

. *para todo* $x,y,v \in \mathbb{R}$, *si* $x \leq y$, $0 \leq v$, *entonces* $x.v \leq y.v$.

..*Existe un subconjunto* N *de* $\mathbb{R}$, *que llamaremos "números naturales" , tal que :*

. *si* $x \in N$, entonces $x+1 \in N$;

. *si* $A \subset N$, $0 \in A$ *y* $x+1 \in A$ *siempre que* $x \in A$, *es entonces* $A=N$.

..*Para todo* $x,y \in R$, *si* $0 \in x$, $0 \neq x$, *entonces existe* $n \in N$ *tal que* $y \leq x.n$.

..*Si I es un conjunto de intervalos reales cerrados , de ma-*

nera que: para todo $[x,y]$, $[x',y']$ de I, es $x\leq y$, $x'\leq y'$, entonces existe $v\in\mathbb{R}$ tal que para todo $[x,y]$ de I se verifica que $v\in[x,y]$.

En virtud de todo lo cual, podemos afirmar que:

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ ES UN CUERPO CONMUTATIVO, TOTALMENTE ORDENADO, ARQUIMEDIANO Y COMPLETO.

SOC. CANARIA PROFS. DE MATS. "I.N."

Comunicación oral

Sesiones breves de alrededor de 15 minutos donde una persona o equipo expone algún trabajo realizado en educación matemática.

Grupos de discusión

Usted puede solicitar la creación de un grupo de discusión sobre un tema de actualidad en educación matemática. En el segundo anuncio de esta conferencia se presentará una lista de los temas propuestos hasta ese momento para identificar otras personas interesadas en el mismo tema.

Grupos de trabajo

Usted puede proponer la creación de un grupo de trabajo donde exponga su experiencia en algún proyecto realizado en educación matemática. En este caso usted sería el líder del grupo que se forme. Cuando se publique el segundo anuncio de la VII CIAEM se incluirá la lista de grupos de trabajos propuestos para identificar las personas interesadas en ese tipo de trabajo.

Sesión de posters

En una sesión de posters la presentación se realiza gráficamente en un cartel preparado por el (los) autor (es) y colocado en un lugar destinado a la exhibición de los posters. El (los) autor (es) deberá(n) permanecer el mayor tiempo posible frente a su poster para responder a las preguntas que se planteen con respecto al trabajo presentado.

Demostración de materiales

Consiste en la exhibición y demostración de materiales que usted o un grupo de colegas haya creado para la enseñanza de la matemática. (Incluye software).

Inscripción

El costo de la inscripción varía, dependiendo de la fecha en que ésta se realice:

US$50.00 hasta el 30 de abril de 1987
US$55.00 hasta el 30 de junio de 1987
US$60.00 en julio de 1987

El formulario de inscripción está anexo a esta comunicación. Es conveniente que la inscripción se realice a la mayor brevedad posible para facilitar una mejor organización del evento.

La solicitud de inscripción debe acompañarse de un cheque que cubra el costo de la misma. Dicho cheque debe hacerse a nombre de la Universidad Católica Madre y Maestra.

Hospedaje y Alimentación

El hospedaje de los participantes en la VII CIAEM se hará en hoteles donde el costo aproximado de habitación es de US$25.00 diarios. Puede calcularse un gasto alrededor de US$20.00 diarios para alimentación. Los costos indicados pueden variar dependiendo de las fluctuaciones de la moneda dominicana. En el segundo anuncio se indicarán los costos de alojamiento y alimentación de manera más precisa.

Por favor, complete el formulario cuidadosamente y preferiblemente a máquina. Envíelo a:

Séptima Conferencia Interamericana de Educación Matemática (VII CIAEM)
Centro de Investigaciones
Universidad Católica Madre y Maestra (UCMM)
Apdo. Postal 822
Santiago de los Caballeros
República Dominicana

Cualquier información adicional a la que se presenta en este folleto puede solicitarse a la dirección indicada arriba o a los siguientes teléfonos o telex: (809) 583-0964
(809) 583-0441 ext. 261
ITT 3461032

→ 79