ASPECTOS HISTÓRICOS DE LAS MATEMÁTICAS

Manuel Valdivia
Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad de Valencia

Excelentísimo señor Presidente de la Academia Canaria de Ciencias, Ilustrísimos señores académicos,
Señoras y Señores:

En primer lugar, quiero agradecer sincera y profundamente a los ilustres miembros de esta Academia el gran honor que tan generosamente me han concedido al designarme para académico correspondiente.

A continuación paso al objeto tema del discurso. Aunque el origen de las matemáticas está en civilizaciones muy antiguas como, por ejemplo, la sumeria y la egipcia, puede decirse que se organiza como una disciplina estrictamente racional en la época clásica de los griegos, es decir, desde el año 600 al 300 antes de Cristo. Las matemáticas en Grecia están muy ligadas a la filosofía, sobre todo en Platón. Hasta ellos, los conocimientos en esta materia tenían carácter rudimentario, pero la estructuración como ciencia fue griega, así como la introducción del arte de la demostración.

El gran monumento del intelecto griego se titula *Elementos de Euclides*, y ocupa uno de los primeros lugares entre los libros que se han escrito a lo largo de todos los tiempos. La base de nuestras matemáticas, puede decirse, sin ninguna duda, que se encuentra en los *Elementos de Euclides*.

Euclides fue director del famoso Museo de Alejandría en la época en que Egipto estaba gobernado por Ptolomeo primero. Publicó su obra matemática, posteriormente llamada *Elementos de Euclides*, a la edad de 30 años, en el año 300 antes de Cristo.

En los elementos se inicia el método axiomático que tanta importancia y repercusión ha tenido y tiene en la llamada matemática moderna. Puede decirse que Euclides fue el sistematizador de casi todos los resultados matemáticos conocidos en su tiempo, ordenándolos de una forma magistral en un sistema deductivo, demostrando a partir de pocas propiedades geométricas simples, evidentes por sí mismas y que no necesitan pruebas, según el espíritu de la época, todas las demás propiedades geométricas como consecuencia lógica de las primeras.

Los Elementos de Euclides están formados por trece libros, tres de los cuales contienen la aritmética y los diez restantes se dedican a la geometría. Se recogen en ellos muchas investigaciones matemáticas de los pitagóricos de los siglos V y IV antes de Cristo, como las de Hipócrates de Quíos, Eudoxo de Cnido y Taetetus.

Al principio los griegos creían que si se tienen dos segmentos rectilíneos, existe un tercer segmento que tomado como unidad de medida, el primer segmento lo tiene un número entero de veces, y el segundo segmento, también un número entero de veces, o, en un lenguaje posterior, si se tienen dos segmentos y se toma uno de ellos como unidad, la medida del otro es un número racional. Esto se expresa de otra manera afirmando que dos segmentos cualesquiera son conmensurables.

El primero que descubrió que esta creencia era falsa fue un pitagórico del siglo V antes de Cristo, Hipassus de Metaponto. *La escuela pitagórica*, fundada por Pitágoras en el siglo VI antes de Cristo, en Crotona, en el sur de Italia, en la llamada entonces

Magna Grecia, era algo más que una sociedad dedicada a la filosofía y a la matemática. Los bienes materiales eran comunes a la sociedad y también los descubrimientos científicos. Solía mezclar Pitágoras el misticismo con la ciencia; él creía en la inmortalidad del alma y en la transmigración, quizá concebida ésta como un castigo al verse obligada el alma a vivir varias vidas, pasando de una persona a otra. Por esta razón afirmaba que la purificación más grande se obtiene dedicándose a la ciencia desinteresada, y el hombre que así lo hace puede de una forma más eficaz librarse de la *rueda del nacimiento*.

Pues bien, un símbolo de la escuela pitagórica era el pentágono regular. Aún en la astrología medieval se conservaba la potencia mágica del pentágono. Según la leyenda, Fausto lo utilizó para exorcizar a Mefistófeles. Parece que Hipassus, trabajando sobre el símbolo, encontró que el lado y la diagonal de un pentágono regular son dos segmentos inconmensurables, es decir, que si se toma uno de ellos como unidad, el otro no tiene medida racional. Esto obligaba a ampliar el conjunto de los números racionales añadiéndoles los irracionales, o sea, las medidas entre segmentos inconmensurables, y constituir así los números reales. Este descubrimiento causó una verdadera crisis intelectual y filosófica. Según la leyenda, el descubrimiento despertó la cólera de los dioses. También produjo un gran impacto en la escuela pitagórica, ya que ponía en cuestión su filosofía que afirmaba que los números enteros constituyen la esencia de todas las cosas.

Otro matemático pitagórico, Eudoxo de Cnido, que vivió del año 400 al 347 antes de Cristo, desarrolló una teoría geométrica para el estudio de los números reales contenida en el libro V de los *Elementos de Euclides*. Esta teoría fue perfeccionada en el siglo XI por el poeta y matemático persa Omar Kayyan, autor de la colección de poemas *Las Rubaiatas*. La exposición de Eudoxo es de una perfección lógica extraordinaria, precursora de la matemática rigurosa del siglo XIX y, en especial, de la teoría de las cortaduras para la construcción de los números reales, introducida por el matemático alemán Dedekind, y que expresa nuestra intuición geométrica del continuo. Eudoxo fue discípulo del también pitagórico Arquitas de Tarento, que vivió del 440 al 360 antes de Cristo, digno predecesor de Arquímedes, que aplicó la geometría a la mecánica construyendo mecanismos análogos a los que más tarde sirvieron a Arquímedes para la defensa de Siracusa. Todos los griegos posteriores que tuvieron voz en matemáticas fueron directa, o indirectamente, discípulos suyos.

A continuación voy a referirme al famoso *número* π. Si se mide la longitud de una circunferencia y el resultado se divide por la longitud de su diámetro, se obtiene un número que no depende del tamaño de la circunferencia. A este número se le ha representado desde los tiempos de Euler (año 1737) por la letra griega π. Como consecuencia de su definición, resulta que la longitud de una circunferencia cualquiera es el producto de π por dos veces su radio. También resulta que el área del círculo es igual a π por el cuadrado del radio. Respecto a las aproximaciones de π, en la Biblia, en el libro de los Reyes, se utiliza el número 3. Este valor también lo usaban los babilonios. En Egipto, en los escritos de aritmética de Ahmes del año 1900 antes de Cristo, se utiliza 3'16 como aproximación del *número* π, pero no se dice cómo se llega a dicho resultado. Esta aproximación es sorprendente para aquellos tiempos.

Arquímedes se ocupó también del *número* π. Arquímedes, el mayor matemático de la antigüedad, nació en Siracusa, en Sicilia, en el año 287 antes de Cristo. Era hijo de un astrónomo y, durante su juventud, visitó Alejandría en donde trabajó con los sucesores de Euclides. Arquímedes se ocupó del cálculo de áreas y volúmenes de diversas figuras geométricas por un método llamado de exhaución, que es el origen del cálculo integral moderno. En mecánica, es el fundador de la hidrostática, que estudia el equilibrio de los cuerpos que flotan en el agua. Calculó también diversos centros de gravedad de figuras planas y de figuras sólidas. Construyó un planetario, inventó una bomba para elevar el agua, la famosa hélice de Arquímedes, dio teoremas sobre la palanca y la utilizó para levantar grandes pesos, y, para botar una galera del rey Hierón de Siracusa, usó poleas compuestas. Una de las historias sobre Arquímedes se refiere a la invención de catapultas e ingenios militares para la defensa de Siracusa de los ataques romanos. Respecto al *número* π, fue el primero en dar cotas inferiores y cotas superiores mediante la construcción de polígonos regulares inscritos o circunscritos a la misma. No se ocupó de calcular más de dos cifras exactas de π. Fue Apolonio quien utilizó el método de Arquímedes para dar como aproximación 3'1416. Hubo que esperar hasta el siglo XVI en el que un matemático holandés, Ludolph van Ceulen, calculó el *número* π con 35 cifras decimales. Por esta razón, a partir de entonces, algunos matemáticos llamaron al *número π número de Ludolph*.

He de citar un caso curioso. Fue en los Estados Unidos, en Indiana, en el año 1897. Intervinieron los políticos y propusieron dos valores para el *número* π, 4 y 3'2, que en lo sucesivo serían aplicados. El Senado de Indiana aplazó la adopción de esta medida. Afortunadamente para los ciudadanos de Indiana y para el *número* π este aplazamiento continúa.

Voy a referirme ahora a la irracionalidad del *número* π. Para ello he de hablar antes de *la cuadratura del círculo*, que es un problema clásico griego, históricamente muy importante y que consiste en lo siguiente: dado un círculo en un plano, construir a partir de él, y utilizando únicamente la regla y el compás, un cuadrado cuya área coincida con el área del círculo. Por otra parte sabemos que el área del círculo es el producto de π por su radio al cuadrado. Por tanto, si tomamos como unidad de medida la longitud del radio del círculo, el área del círculo será entonces igual a π y, en consecuencia, el lado de dicho cuadrado tendrá como longitud la raíz cuadrada de π. Se deduce de lo anterior que el problema de *la cuadratura del círculo* consiste en lo siguiente: dado un segmento unidad, construir a partir de él, con regla y compás, otro segmento cuya longitud sea igual a la raíz cuadrada de π.

Los primeros intentos para conseguir *la cuadratura del círculo* se localizan en Grecia, en la Atenas del Siglo V antes de Cristo, el siglo de Pericles. La primera persona importante que se ocupó de este problema fue Anaxágoras, un filósofo jónico amigo de Pericles. Anaxágoras nació en Clazómenas, en el año 500 antes de Cristo aproximadamente, pero pasó treinta años en Atenas. Fue el primero que introdujo la filosofía en Atenas. Pericles, que estaba muy interesado en aumentar el nivel cultural de sus conciudadanos fue el que indujo a Anaxágoras a ir a Atenas. En esta época, Atenas era rica y poderosa, y tenía una constitución democrática que estaba administrada por los aristócratas. Pronto surgió una oposición que con el tiempo, cuando Pericles envejeció, empezó una campaña contra él y atacó a sus amigos. A Fidias, el célebre escultor, se le acusó de malversar el oro con el que adornaba sus estatuas. Dieron una ley apoyando las denuncias de los que no practicaban la religión, y con esta ley en la mano, lograron encarcelar a Anaxágoras. Pericles le sacó de prisión y le ayudó a abandonar Atenas. Volvió a Jonia y fundó allí una escuela de filosofía. Parece que Anaxágoras, mientras estuvo encarcelado en Atenas, trabajó en el problema de *la cuadratura del círculo*.

Después llegaron tiempos peores para Atenas y para Pericles. Se acabaron los días de progreso, paz y riqueza. En el año 431 antes de Cristo estalló la guerra del Peloponeso. Apareció en el año 430 antes de Cristo, la peste, que redujo drásticamente la población ateniense, que entonces era de unos 230000 habitantes. En el mismo año, Pericles fue destituido de su puesto de general por malversación de fondos públicos, aunque muy pronto fue rehabilitado. Sus dos hijos murieron de la peste, y él mismo falleció al año siguiente.

En el siglo de Pericles, algunas personas en Atenas tenían verdadera obsesión por el problema de *la cuadratura del círculo*. Esto motivó que Aristófanes, el célebre comediógrafo griego, que tan dado era a la burla, escribiera sobre la necesidad de hacer la cuadratura del mundo. A partir de entonces y durante más de dos mil años, se ha empleado, por numerosos matemáticos, un inmenso caudal de energía para encontrar una respuesta satisfactoria al problema.

Aristóteles, en el siglo IV antes de Cristo afirmaba lo siguiente: si se tienen dos segmentos, uno de los cuales sea el diámetro de una circunferencia y el otro la circunferencia rectificada, entonces dichos segmentos son inconmensurables.

¿Por qué Aristóteles hacía esta afirmación? Probablemente por la influencia del problema de *la cuadratura del círculo* que nadie era capaz de resolver. Sin embargo, si se admite la conmensurabilidad de dichos segmentos, un razonamiento elemental permite cuadrar el círculo.

La afirmación de Aristóteles equivale a decir que él *numero* π es irracional. Como Aristóteles no dio prueba de ello quedó planteado en el siglo IV antes de Cristo el siguiente problema: ¿ Es el *número* π un número racional? A pesar de los numerosos esfuerzos para conseguir una respuesta, pasaron siglos hasta alcanzar la solución. Fue, precisamente, en el año 1766, por el matemático alsaciano Lambert, que en un breve manual sobre *la cuadratura del círculo* demostró que el *número* π es irracional. Lambert, que era autodidacta, fue miembro de la academia de Berlín. La prueba de Lambert se basa en el desarrollo en fracción continua de *tag x*. No obstante la prueba de Lambert no es completamente rigurosa pues utiliza, sin prueba, un lema sobre la irracionalidad de ciertas fracciones continuas infinitas. Este lema fue demostrado después por el matemático francés Legendre, en el año 1806. Lo publicó en la sexta edición de su famoso libro *Elementos de Geometría.*

Si consideramos una ecuación de primer grado, $b\,x + c = o$, siendo b y c números enteros, b diferente de cero, tiene como raíz $-c/b$ que es un número racional. Por otra parte, dado un número racional p/q , $q \neq o$, se tiene que este número es raíz de una ecuación de primer grado con coeficientes enteros, precisamente la ecuación $p\,x - q = o$. Entonces, la respuesta de Lambert de que el *número* π es irracional, puede enunciarse de la siguiente forma: el *número* π no es raíz de una ecuación de primer grado con coeficientes enteros.

Este enunciado tan simple permitió a Legendre, en el año 1806, hacer la siguiente conjetura: el número π no es raíz de una ecuación algebraica con coeficientes enteros.

La conjetura anterior planteaba un nuevo problema en matemáticas que es el siguiente: ¿ Hay números reales o complejos que no sean raíces de ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros?

Para encontrar una respuesta, no hubo necesidad de esperar tanto como en el caso de la irracionalidad del *número* π, que fue desde Aristóteles hasta Lambert. No obstante, fueron bastantes años de espera, 38 años exactamente. Un matemático francés, Joseph Liouville, en 1844, construyó una infinidad no numerable de números reales que no son raíces de ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros. Estos son los famosos *números de Liouville.* A partir de entonces, los números complejos quedaron clasificados en dos conjuntos no vacíos, los números algebraicos, que son aquellos que son raíces de alguna ecuación algebraica con coeficientes enteros, y aquellos otros que no lo son, los llamados números trascendentes.

Con este lenguaje, el problema que surge con Legendre puede enunciarse de la siguiente forma: ¿ Es el *número* π trascendente?

Una demostración breve de la existencia de números trascendentes se debe al matemático alemán Cantor y se basa en comprobar primero que los números algebraicos forman un conjunto numerable, es decir, un conjunto cuyos elementos se pueden poner en correspondencia biunívoca con los números naturales, mientras los números complejos no constituyen un conjunto numerable. La prueba de Cantor, aunque breve, tiene menos valor que la de Liouville, pues Cantor sólo prueba la existencia de números trascendentes mientras que Liouville construye efectivamente muchos números trascendentes.

En el año 1873, un matemático francés, Hermite, publicó un famoso artículo sobre la función exponencial en el cual demuestra que *el número e*, base de los logaritmos neperianos, es trascendente. Hermite, que es muy conocido en matemática elemental por su método de cálculo de primitivas, era un gran matemático y un magnífico profesor. El matemático Painlevé se refiere a él con estas palabras: " los que han tenido la dicha de ser alumnos del gran geómetra no pueden olvidar el tinte casi religioso de sus enseñanzas, el estremecimiento de belleza o de misterio que hacía correr a través de su auditorio ante algún admirable descubrimiento o ante lo desconocido".

Hermite pensaba que el método que había utilizado para demostrar la trascendencia del *número e* no era lo suficientemente potente para conseguir lo mismo con el *número* π. Sin embargo, no fue así, pues, en el año 1882, Lindemann, un matemático alemán, logró probar con las mismas técnicas de Hermite, que el *número* π es trascendente.

El trabajo de Lindemann es muy importante por su relación con *el problema de la cuadratura del círculo* como vamos a ver. Con la regla y el compás, podemos construir dos rectas perpendiculares que tomamos como ejes. Si elegimos como unidad el radio del círculo que queremos cuadrar, es posible obtener con los instrumentos citados cualquier punto del plano cuyas coordenadas sean racionales, es decir, el plano racional. Nos apoyamos ahora en este plano. Las operaciones que podemos realizar son las siguientes:

1. Unir dos puntos del plano racional por una recta. Entonces se obtiene una recta racional, es decir, una recta cuya ecuación tiene coeficientes racionales.
2. Hallar la intersección de dos rectas racionales no paralelas, que será un punto de coordenadas racionales.
3. Trazar una circunferencia de centro un punto de coordenadas racionales y que pase por otro punto de la misma clase. Así se obtiene una circunferencia cuya ecuación tiene sus coeficientes racionales y que vamos a llamar racional.
4. Hallar la intersección de dos circunferencias racionales o bien la intersección de una circunferencia racional y de una recta racional. Entonces obtendríamos puntos de la forma $a + \sqrt{b}$ en donde a y b son racionales, es decir, puntos cuyas coordenadas pertenecen a la ampliación del cuerpo de los números racionales mediante la adjunción de la raíz cuadrada de un número racional. Nos apoyamos ahora en el plano cuyos puntos tienen como coordenadas, elementos del anterior cuerpo ampliado. Si la cuadratura del círculo fuera posible, llegaríamos después de un número finito de operaciones a obtener un punto en el eje *OX* cuya abscisa fuera la raíz cuadrada de π, es decir, el lado del cuadrado cuya área es igual a la del círculo. Por las ampliaciones sucesivas que vamos haciendo, es fácil de probar entonces que raíz cuadrada de π es raíz de una ecuación algebraica con coeficientes enteros y, por tanto, π es raíz de una ecuación algebraica con coeficientes enteros, lo cual esta en contra del *teorema de Lindemann*. Con esto, después de más de dos mil años de trabajo, el problema de *la cuadratura del círculo* quedaba definitivamente resuelto, alcanzándose el siguiente enunciado: la cuadratura del círculo, con regla y compás, es imposible.

Es curioso que problemas sobre los números trascendentes, de enunciado extremadamente simple, permanezcan abiertos, así, por ejemplo, con los números e y π si hallan la suma y el producto se obtienen dos números de los cuales se sabe que por lo menos uno es trascendente, pero no se sabe cuál de ellos es.

Los trabajos de Hermite y Lindemann fueron simplificados por Weierstrass en el año 1885, y a su vez las pruebas de los resultados de Weierstrass fueron simplificados en el año 1893 por Hilbert, Hurwitz y Gordan. *El teorema de Weierstrass* es más general que el de Lindemann y, como consecuencia de él se obtiene, por ejemplo, que el seno de un número entero diferente de cero, o bien el coseno o la tangente, son números trascendentes.

En París, en el año 1900, se celebró un congreso internacional de matemáticas. En él, David Hilbert propuso una famosa lista de 23 problemas. El problema número siete se refería a los números trascendentes y preguntaba lo siguiente: Si α es un número algebraico diferente de 0 y de 1, y β es un número algebraico irracional ¿ es α^{β} un número trascendente?

El primer avance significativo sobre la resolución de este problema lo hizo un matemático ruso, Gelfond, en el año 1929, que demostró que si α es un número algebraico diferente de 0 y de 1, y β es un número algebraico irracional cuadrático imaginario, es decir, un número imaginario raíz de una ecuación de segundo grado con coeficientes enteros, entonces α^{β} es trascendente. En particular se obtiene de aquí que e^{π} es trascendente, pues este se escribe en la forma $(-1)^{-i}$ que es una potencia de -1, que es un número algebraico diferente de 0 y de 1, y el exponente es $-i$ que es un irracional cuadrático imaginario. En el año 1930, otro matemático ruso, Kuzmin, obtuvo un resultado análogo al de Gelfond, pero para irracionales cuadráticos reales en vez de para irracionales cuadráticos imaginarios. Para las demostraciones de ambos resultados se utiliza una técnica de interpolación debida a Gelfond. Finalmente, en el año 1934, se alcanzó un gran éxito al resolver el problema de Hilbert en toda generalidad, esto lo consiguieron, independientemente, el mismo Gelfond y el matemático alemán Schneider.

Este problema y su solución dieron lugar después al desarrollo de la rama de la matemática conocida como *Teoría de los números trascendentes* en donde se han conseguido profundos y bellos teoremas.

Quizá sea el momento de decir algunas palabras sobre el famoso matemático David Hilbert. Hilbert, alemán, nació en Königsberg en el año 1862. Estudió en la Universidad de su ciudad natal de 1880 a 1884. Después enseñó en esta Universidad. En el año 1885, Hilbert conoció a Felix Klein, en Leipzig, el cual apreció tanto la valía de Hilbert que le envió a París con Poincaré, del cual recibió un curso sobre teoría del potencial y mecánica de fluidos. En París se puso en contacto con Picard y con Hermite, y fue precisamente Hermite quien le descubrió el famoso problema de los invariantes del que, en aquel tiempo, Gordan, en Erlangen, buscaba su solución.

Después de su habilitación, Hilbert, aconsejado por Lindermann y por Hermite, fue a Erlangen a escuchar a Gordan, el cual quería demostrar, sin haber conseguido nada hasta entonces, que todo sistema de invariantes tiene una base finita. Fue Hilbert, después, en el año 1888, quien demostró con toda generalidad la existencia de dicha base. Su prueba no era constructiva, sino por reducción al absurdo, por lo que recibió ataques muy duros de varios matemáticos, sobre todo de Kronecker y de Gordan. La respuesta de Hilbert a sus detractores fue, en el año 1892, dar una prueba constructiva del *teorema de la base finita.*

El estudio detallado de la geometría llevó a algunos matemáticos del siglo XIX a un análisis profundo y exhaustivo de los fundamentos. El principal artífice fue David Hilbert que en el año 1899 publicó su famosa obra Fundamentos de Geometría. Por supuesto que antes de la obra de Hilbert, se publicaron importantes trabajos sobre las bases de geometría, como los de Meray, Pasch, Peano, Veronese y Enriques, pero fue Hilbert quien acertó con un sistema axiomático que ha quedado definitivo, demostrando además la independencia y consistencia de los axiomas reduciendo la geometría a la aritmética. Puso de manifiesto Hilbert que si en aritmética no se alcanza contradicción tampoco se llega a contradicción en geometría.

A raíz del artículo de Fredholm sobre ecuaciones integrales, Hilbert desarrolló su teoría de las formas cuadráticas con un número infinito de variables, y también la teoría espectral. Definió el espacio de sucesiones de cuadrado sumable e interpretó las ecuaciones integrales como transformaciones lineales continuas en este espacio, estableciendo la equivalencia de una ecuación integral y un sistema lineal de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas. Hizo el desarrollo de una función con respecto a un sistema ortonormal completo e introdujo lo que después se llamaría *espacio de Hilbert*. Todos estos resultados los agrupó en un libro que publicó en el año 1912. La axiomática de *los espacios de Hilbert* fue introducida después por el matemático húngaro Von Neumann para espacios separables, y por el también matemático húngaro F.Riesz para el caso general.

A partir de entonces, *los espacios de Hilbert* han sido una herramienta habitual en la Física matemática. Estos espacios y la teoría de las ecuaciones integrales han servido para fundamentar matemáticamente la Mecánica Cuántica tal como lo hizo Von Neumann en el año 1927.

Refiriéndome ahora a la actividad de Hilbert como profesor, he de decir que Felix Klein, en el año 1895, convenció a Hilbert para que aceptara un puesto de profesor en Gotinga sustituyendo a Weber, que había sido nombrado profesor en Estrasburgo. Hilbert aceptó el puesto y ocupó una cátedra en Gotinga desde el año 1895 hasta su jubilación.

En estos años, Hilbert se convirtió en uno de los matemáticos de más prestigio en el mundo, igualando al mismo Poincaré. Hilbert fundó una escuela en Gotinga que ejerció una gran influencia científica, recibiendo estudiantes de Francia, Italia, Rusia, Estados Unidos, Japón, etc... Minkowski escribió: una estancia en Gotinga infunde el deseo de hacer grandes cosas.

Ligados a Gotinga figurarán matemáticos como Minkowski, Runge, Hermann Weyl, Born, Zermelo, Van der Waerden, Landau y Emmy Noether. A la Noether siempre la defendió Hilbert enérgicamente frente a leyes vigentes en Alemania que impedían a las mujeres ocupar puestos de enseñanza superior.

Con tantos y tan buenos discípulos, Hilbert y su escuela realizaron un enorme trabajo en diversas ramas de las matemáticas. Así, por ejemplo, Noether, Artin y Van der Waerde, desarrollarán el álgebra moderna. Born creará, con Pauli y Heisenberg, la mecánica cuántica. Bernays, Ackermann, Gentze y el mismo Hilbert investigarán en lógica, con trabajos que servirán de punto de partida al francés Herbrand, al austriaco Gödel y al polaco Tarski.

Entre los años 1920 a 1933 serán muchos los matemáticos, lógicos, físicos y filósofos que visitarán Gotinga convertida por Hilbert en el santuario sagrado del pensamiento puro.

Después, en Alemania, aparecieron los nazis, que se hicieron con el poder. Comenzó la persecución de los judíos y muchos matemáticos de Gotinga tuvieron que huir, o sencillamente se marcharon, como, por ejemplo, la Noether, Courant, Born, Hermann Weyl, etc...

Años después, un ministro nazi de Educación preguntó a Hilbert cómo iban las matemáticas en Gotinga una vez eliminada la influencia judía. Hilbert le respondió: en Gotinga ya no hay matemáticas.

Refiriéndome ahora a la naturaleza de los entes matemáticos he de decir que tienen carácter exacto, cosa que no sucede con los objetos sensibles, pues, por ejemplo, una recta que se dibuje, por muy perfecta que sea la regla utilizada, aparecerá con irregularidades, de aquí que los pitagoricos llegaran ya a la conclusión de que el razonamiento matemático se hace sobre objetos ideales cuya realidad es eterna, y que de todas las actividades humanas, la intelectual es la más noble. Un paso más para alcanzar el resultado de que los entes matemáticos son pensamientos de Dios, de aquí que la afirmación posterior de Platón de que Dios es un geómetra esté perfectamente justificada. Por otra parte, Platón va mucho más lejos inventando su conocida *teoría de las ideas*, cuyo carácter general tiene mayor amplitud que las matemáticas.

La obra de Platón es muy importante y la lectura de sus diálogos resulta deliciosa. Esto sucede con todos los escritos de Platón, salvó quizás con el dialogo más largo: *La República*. En este último se expone una teoría política de carácter totalitario, inspirada por la organización y gobierno de Esparta; es probable, como opina Bertrand Russell en su Historia de la Filosofía Occidental, que la democracia no le resultara agradable a Platón, pues la democracia había condenado a muerte a Sócrates, su maestro, por el que sentía una inmensa admiración y un profundo respeto.

No obstante, *la República*, del libro V al VII se ocupa también de cuestiones de filosofía pura y, en particular, de la teoría de las ideas o formas. En lo que se refiere a las matemáticas esta teoría viene a decir que, por ejemplo, el círculo significa un círculo ideal, creado por Dios y único. Entonces, los entes matemáticos existen realmente en alguna parte. Diríamos nosotros, para entendernos, que existen en el cielo platónico. Han sido muchos los matemáticos que han participado de este pensamiento y, entre ellos, se encuentra el lógico más importante de todos los tiempos, Kurt Gödel, del cual me voy a ocupar a continuación.

Gödel nació en Brün, Moravia, en el año 1906, y fue bautizado en una congregación luterana alemana de su ciudad natal. Fue muy religioso y, a lo largo de su vida, nunca perdió la fe en Dios. En el año 1924, ingresó en la Universidad de Viena con la intención de graduarse en Física, pero al recibir clases del matemático Philip Furtwängler, especialista en teoría de números, quedó tan impresionado que cambió la física por la matemática.

Un maestro de Gödel, Hans Hahn, cuyo nombre va unido al de Stephan Banach en el llamado *teorema de Hahn-Banach*, dio a conocer a Gödel el famoso Círculo de Viena, entre cuyos componentes había científicos relevantes, como el mismo Hahn. En el año 1926, cuando Gödel se incorporó a este grupo, se reunían en un seminario de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Viena. Allí se dedicaban a construir una filosofía de la ciencia que se conoce ahora como *"positivismo lógico"*, y que sostiene que una afirmación para que tenga sentido ha de ser verificable por la experiencia física. Como consecuencia de esto, el primer concepto que hicieron desaparecer fue el de Dios. Gödel, que se sentía muy atraído por este grupo, sobre todo al percibir que las personas que lo componían sabían perfectamente cuáles eran las cuestiones básicas, no podía aceptar sus teorías, pues ya había tomado una postura platónica hacia las matemáticas, tenía el convencimiento de que los números y, en general, todos los conceptos matemáticos eran tan reales como cualquier cosa de este mundo. Años mas tarde, Gödel confesó que su platonismo le había ayudado mucho a conseguir su *teorema sobre la incompletitud de la aritmética*, y de otros resultados en el campo de la lógica matemática.

En matemáticas, un sistema axiomático se dice que es incompleto cuando existe algún enunciado que tiene sentido en la teoría deducida de dicho sistema y que es indecidible, es decir, que su verdad o falsedad no se pueden demostrar a partir de los axiomas, así, por ejemplo, el sistema de axiomas de la llamada geometría absoluta es incompleto, pues no se puede demostrar a partir de dichos axiomas si es verdadero o falso lo siguiente: en un plano, por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela a ella. Es natural preguntarse, pues, si el sistema de axiomas de Hilbert, los cuales dan lugar a la geometría euclídea, es incompleto o no. La respuesta es una consecuencia del famoso *teorema de incompletitud de la aritmética*, publicado por Gödel en 1930, en donde prueba que todo sistema de axiomas que contenga a la aritmética elemental es incompleto.

Gödel, en el año 1933, estuvo en los Estados Unidos invitado por Oswald Veblen y dio una serie de conferencias, durante un semestre, en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Después estuvo en Nueva York, y también en Washington, explicando sus investigaciones. En el año 1934, retornó a Viena y, afectado de una depresión, tuvo que ingresar en el Sanatorium Westand. Tenía entonces 28 años y parece ser que se había enamorado de Adele Nimbrusky, bailarina de un club nocturno de Viena, y quería casarse con ella. Como sus padres no se lo permitían y él había sido educado en el respeto más estricto a las autoridades paterna y materna, lo pasó bastante mal.

En el año 1935, Gödel estuvo de nuevo en Norteamérica, en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, donde pensaba trabajar una temporada, pero cuando llevaba algo más de un mes, empezó a sentirse deprimido y agobiado por el trabajo. Entonces se volvió a Viena y durante el año 1936 estuvo ingresado varias veces en sanatorios psiquiátricos. Fue en el año 1937 cuando pudo reanudar su actividad docente e investigadora.

En el año 1939, los nazis hicieron algunas reformas en la universidad y, como consecuencia, Gödel se quedó sin trabajo. Además, el ejército nazi le envió un aviso comunicándole que tenía que someterse a un examen físico. Entonces Gödel, a sus treinta y dos años, hombre extremadamente tímido e introvertido, sin trabajo a pesar de ser el lógico más importante de todos los tiempos, casado, pues por fin se había casado con Adele, y con la perspectiva de verse convertido en soldado, se sintió bastante mal. Para colmo, un detalle de poca importancia pero que le afectó, y es que recibió una nota de la mujer de la limpieza donde figuraban el número de marcos que debía recibir por su trabajo; al final de la nota ponía: ¡Heil Hitler ¡ El matrimonio Gödel decidió entonces marcharse a los Estados Unidos. Creyeron que el viaje por el Atlántico era peligroso y escogieron ir a través de Rusia, Siberia, llegando al Japón. En Yokohama tomaron un barco que les llevó a San Francisco y partiendo de San Francisco llegaron finalmente a Princeton. En el Instituto de Estudios Avanzados, acogieron a Gödel con la misma hospitalidad de siempre y le dieron un despacho junto al despacho de Einstein. Entonces comenzó a sentirse a gusto, concentrado en su trabajo de investigación y de espaldas al mundo. Estuvo como residente trece años y después pasó a la categoría de profesor.

Aunque en el Instituto había algunos investigadores raros, parece ser que Gödel era el más raro de todos. Cuenta el matemático americano Salomon Feferman que Gödel estuvo a punto de no conseguir la ciudadanía americana. Para ser ciudadano americano, había que estudiarse la Constitución de los Estados Unidos y sufrir después de un examen oral. En el año 1948, Gödel se estudió la Constitución y comunicó a su amigo Oskar Morgenstern que había encontrado contradicciones que podían dar lugar, siguiendo estrictamente la ley, a que los Estados Unidos cayeran en una dictadura. Morgenstern le aconsejo que no dijera nada de esto en el examen.

Por fin Gödel fue a examinarse a la ciudad de Trenton, y apareció en las oficinas del gobierno acompañado de dos testigos, Einstein y Morgenstern. Parece que durante todo el viaje de Princeton a Trenton, Einstein iba contando historias para distraer a Gödel y evitar que se concentrara en los problemas lógicos de la Constitución americana. Empezó el examen y dijo el funcionario: hasta ahora ha sido usted ciudadano alemán; Gödel le cortó rápidamente y dijo: yo no soy alemán, soy austriaco. Bueno, bien, continuó el funcionario, de todas formas una dictadura siniestra, menos mal que eso no puede pasar en América. Al contrario, dijo Gödel, yo sé perfectamente que sí puede suceder. Entonces empezaron todos a ponerse nerviosos, intervinieron Einstein y Morgenstern para tranquilizar a Gödel y por fin el examen fue reconducido sin incidentes. Gödel aprobó y pudo jurar la Constitución como ciudadano de los Estados Unidos.

Cuando Gödel ingresó en el Instituto de Estudios Avanzados, su trabajo más importante se orientó hacia *el problema del continuo*. Cantor, matemático alemán, desarrolló su *teoría de los conjuntos infinitos* entre los años 1874 a 1897.Cantor llegó a su teoría mientras trabajaba en *las series trigonométricas* y, en particular, en las *series de Fourier*, tema muy estudiado en el siglo XIX por sus aplicaciones a diversos problemas de la física. Al investigar Cantor el comportamiento de dichas series, se vio obligado a analizar conjuntos muy generales de números reales y esto le llevó a su aritmética transfinita. Una afirmación que hizo Cantor fue lo que se llamó después la *hipótesis del continuo* y que tiene el siguiente enunciado: no existe un conjunto infinito de números reales que no se pueda poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los enteros positivos y que tampoco se pueda poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números reales. En otras palabras, no existe ningún número cardinal estrictamente mayor que el aleph subcero, que es el cardinal del conjunto de los números naturales, y estrictamente menor que el continuo, que es el cardinal del conjunto de los números reales.

Durante más de medio siglo, muchos matemáticos abrigaron la creencia de que *la hipótesis del continuo* era cierta y dedicaron ingentes esfuerzos para conseguir su demostración. El mismo Cantor trabajó denodadamente en ello. David Hilbert publicó un artículo en Mathematishen Annalen en donde probaba que *la hipótesis del continuo* era verdad, pero, unos meses más tarde se encontró que había un error en la demostración.

Pues bien, fue Gödel el primero que aportó un descubrimiento importantísimo sobre *la hipótesis del continuo.* Demostró lo siguiente: si la axiomática de la teoría de conjuntos es consistente, es decir, no conduce a contradicción, y se añade a ella, como nuevo axioma *la hipótesis del continuo,* el nuevo sistema axiomático es también consistente.

Este descubrimiento de Gödel no prueba que *la hipótesis del continuo* es cierta, pero sí pone de manifiesto que es imposible demostrar que la hipótesis del continuo es falsa.

Antes que Gödel publicara el anterior resultado, se había utilizado *la hipótesis del continuo* para obtener ejemplos y contraejemplos en matemáticas, en particular, en *Topología Conjuntista.* Todas estas construcciones estaban en el aire amenazadas por la posibilidad de que la hipótesis del continuo fuera falsa. Afortunadamente, Gödel vino a dar luz verde a dichas construcciones y, desde entonces, *la hipótesis del continuo* se utiliza con toda tranquilidad.

La prueba de Gödel del resultado citado consistió en construir un modelo de la teoría de conjuntos en el que se cumplían los axiomas de Zermelo Fraenkel y, además, la hipótesis del continuo.

En el Instituto, el mejor amigo de Gödel era Einstein con el que solía pasear frecuentemente. Einstein le interesó en la teoría de la relatividad general. Gödel investigó en ello y publicó en el año 1949 un artículo titulado *"Ejemplo de un nuevo tipo de soluciones cosmológicas de las ecuaciones de campo de gravitación de Einstein."*

Gödel trabajó en el Instituto como residente durante trece años, hasta el año 1953, que fue ascendido a profesor. Algunos miembros del Instituto se quejaron por tanta demora, Von Neumann decía: ¿cómo es posible que nosotros seamos profesores y Gödel no lo sea?. Gödel siguió trabajando en *la hipótesis del continuo* y, años más tarde, tomó un ayudante, el joven matemático Cohen, con el que trabajó durante dos años. Cohen, poco después de abandonar el Instituto, obtuvo, utilizando en parte ideas de Gödel, un resultado que le hizo famoso y que publicó en el año 1963. Demostró lo siguiente: si la axiomática de la teoría de conjuntos es consistente y se le añade, como nuevo axioma, la negación de la hipótesis del continuo, el nuevo sistema axiomático también es consistente.

Se deduce de estos descubrimientos de Gödel y de Cohen que *la hipótesis del continuo,* la cual tiene, obviamente, un claro significado matemático, pertenece a los enunciados llamados indecidibles, es decir, que a partir de la axiomática usual de la teoría de conjuntos nunca se podrá demostrar su verdad ni tampoco se podrá demostrar su falsedad.

Gödel, en los años setenta apenas hizo matemáticas. Se dedicaba a estudiar filosofía, sobre todo a Leibniz y a Husserl. También leía mucho sobre teología y religión. Adele, su mujer, le cuidaba mucho, y él no tomaba más alimentos que los que le preparaba ella, pues tenía miedo a que le envenenaran. Al final de su vida estaba deprimido porque pensaba haber decepcionado al Instituto con su trabajo. En el año 1977, Adele tuvo que ingresar en un hospital para someterse a una operación. Gödel se quedo solo en casa. El matemático americano Hassler Whitney fue a visitarle a finales de diciembre, y desde la misma casa de Gödel llamó enseguida al doctor Rothberg para decirle que Gödel estaba deshidratado y en un estado preocupante. Whitney le llevó al hospital y le ingresaron. Estuvo dos semanas en el hospital, negándose a comer. Murió allí, sentado en una silla, el 14 de enero de 1978. El certificado de defunción decía que había muerto por desnutrición e inanición, como consecuencia de una perturbación de la personalidad.

Uno se asombra de que la mente más profunda de la lógica de nuestro siglo, pudiera estar asediada por tantos problemas psíquicos. En fin, es la complejidad de la naturaleza humana.

En los años 1893 y 1903, un brillante matemático y filósofo alemán, Frege, publicó un trabajo en dos volúmenes en el que explica cómo se pueden construir las matemáticas a partir de ciertos principios de lógica. Poco después de publicarse el segundo volumen, Bertrand Russell comunicó a Frege una contradicción que se deducía de los principios lógicos utilizados por éste. Dicha contradicción es la famosa *paradoja de Russell.*

Antes de Russell, se habían detectado paradojas en la teoría de conjuntos por Cantor mismo y por Burali-Forti, pero *la paradoja de Russell*, que por otra parte la había encontrado también independientemente el matemático alemán Zermelo, es tan directa y clara que no es extraño que causara en aquel tiempo una gran conmoción en matemáticas. Parecía que el edificio construido por Cantor se tambaleaba. Para un matemático, el vivir en una teoría en donde existen contradicciones es, por lo menos, muy incómodo. Cuenta Fraenkel que alguien comunicó a David Hilbert su preocupación por la existencia de las paradojas, la contestación de Hilbert fue aproximadamente la siguiente: "Cantor construyó con su teoría de conjuntos un paraíso para los matemáticos, y no habrá nadie capaz de expulsarnos de él."

A continuación voy a explicar *la paradoja de Russell.* Existen dos clases de conjuntos, los que tomados como elementos no pertenecen a sí mismos y aquellos otros que tomados como elementos pertenecen a sí mismos. Por ejemplo, si consideramos el conjunto de todos los hombres, este conjunto, obviamente no es un hombre, y en consecuencia, no pertenece a sí mismo. Por otra parte, el conjunto formado por todos los conceptos matemáticos es un concepto matemático y, por tanto, pertenece a sí mismo. Tenemos así clasificados los conjuntos en dos partes A y B que son los siguientes: A es un conjunto cuyos elementos son conjunto que no pertenecen a sí mismos, y B es un conjunto cuyos elementos son conjuntos que pertenecen a sí mismos. Russell dice que la existencia del conjunto A encierra contradicción, y argumenta de la siguiente forma: A es un conjunto y, por tanto, pueden suceder dos cosas: 1ª) A pertenece a A y 2ª) A no pertenece a A. En el primer caso, si A pertenece a A, entonces A es un elemento de A, pero los elementos de A son conjunto que no pertenecen a sí mismos y, en consecuencia, si A pertenece a A, entonces A no pertenece a A. En el segundo caso, A no pertenece a A y, por tanto, pertenece a B, pero los elementos de B son conjunto que pertenecen a sí mismos de aquí que A pertenezca a A. Resumiendo, partiendo de A pertenece a A se deduce que A no pertenece a A, y partiendo de A no pertenece a A, se llega a que A pertenece a A. Esta contradicción es la paradoja de Rusell.

Uno de los conceptos más interesantes de la teoría de conjuntos es el axioma de elección, que ha sido fuente de controversias apasionadas. Cantor preguntaba, para poder concluir su aritmética transfinita de números ordinales, si a un conjunto cualquiera se le podría dar una ordenación de manera que resultara un conjunto bien ordenado. Zermelo dio una respuesta positiva a esta pregunta, en el año 1905, y usó en su demostración lo que después se ha llamado *el axioma de elección*, cuyo enunciado es el siguiente: " dada una colección de conjuntos no vacíos, disjuntos dos a dos, existe un conjunto que tiene precisamente un elemento de cada conjunto de la colección."

Este enunciado parece muy natural, pero si lo observamos con un poco más de atención aparece una dificultad, y es que la colección puede ser infinita y, entonces, en el mundo ordinario no tenemos ejemplos de esta situación. De hecho, la utilización del axioma de elección ha permitido obtener algunas propiedades matemáticas que ponen de manifiesto que una cosa es el mundo real y otra la matemática, y pueden ser incluso, en algunos casos, extremadamente divergentes.

Como ejemplo de esto diré algunas palabras sobre *la paradoja de Banach-Tarski*. En el año 1923, se publica un famoso artículo en la revista Fundamenta Mathematicae del cual son autores dos matemáticos polacos: Stefan Banach y Alfred Tarski. El teorema fundamental de este artículo es un resultado extraño si se considera la matemática en relación con el mundo físico. A dicho resultado se le conoce como *la paradoja de Banach-Tarski*, y tiene un precedente teórico en una descomposición singular de la esfera, realizada por Hausdorff y recogida en su conocido libro *Mengenlehre*, aparecido en Leipzig en el año 1914.

La paradoja de Banach-Tarski consiste en lo siguiente: se toma una unidad de longitud y se considera una esfera de radio igual a la unidad. Entonces se puede dividir la esfera en un número finito de partes, de manera que, desplazando algunas de estas partes, se reconstruye una esfera de radio unidad, y con el resto de las partes, sometiéndolas también a movimientos se puede formar otra esfera de radio unidad. Es decir, que a partir de una esfera de radio uno, se obtiene, por este mecanismo, dos esferas cada una de las cuales tiene radio uno. Esto es sorprendente y extraño. En el año 1945, el matemático polaco Sierpinski, en un artículo publicado en Fundamenta Mathematicae, descompone la esfera unidad en nueve partes, somete a movimientos cinco de ellas y recompone una esfera de radio uno, y con las otras cuatro partes, moviéndolas adecuadamente, se obtiene otra esfera de radio uno. Robinson, en el año 1947, baja el número de partes de nueve a cinco, demostrando además que con menos de cinco partes no se puede hacer la citada duplicación de la esfera unidad.

Ante un resultado de esta naturaleza uno se queda perplejo. Para empezar, en el mundo real no ocurren estas cosas. Es verdad que existe un precedente histórico: las bodas de Canaá, donde Jesucristo multiplica los panes y los peces, pero este hecho tiene carácter milagroso y, por tanto, no es significativo para la ciencia.

Los razonamientos de Banach y Tarski, Sierpinski y Robinson son perfectos, correctísimos. Entonces que ha sucedido aquí. Si tratamos de buscar un responsable y analizamos las demostraciones llegamos a la siguiente conclusión: el responsable es *el axioma de elección de Zermelo*. Voy a hacer un análisis rápido para justificar esta afirmación. En la geometría elemental, sabemos determinar los volúmenes de ciertas figuras, como, por ejemplo, el cubo, la esfera, las distintas pirámides, etc...Los matemáticos han tratado de hallar a lo largo de la historia, no sólo por motivos teóricos sino también por necesidades prácticas, volúmenes de figuras cada vez más complicadas. Esto dio lugar a la ampliación del concepto de volumen, primero con el concepto de contenido y, después, con la introducción de la idea de medida. El matemático francés Lebesgue, a primeros de nuestro siglo, hizo una extraordinaria teoría de la medida y de la integración para espacios euclídeos de cualquier dimensión. *La medida de Lebesgue* asigna en el espacio a cada conjunto de una cierta clase, la de *los conjuntos medibles Lebesgue*, un número, o bien más infinito, de manera que las figuras elementales forman *conjuntos medibles Lebesgue* y sus medidas coinciden con sus volúmenes. Por tanto, *la medida de Lebesgue* en el espacio generaliza el concepto de volumen.

Si se toma una esfera y se la somete a un desplazamiento, el volumen de la esfera es el mismo en la posición inicial y en la posición final. Esta propiedad la tienen también *los conjuntos medibles Lebesgue*, es decir, que si con un conjunto cualquiera de estos se realiza un movimiento, el conjunto sigue siendo medible Lebesgue y su medida no cambia. Los matemáticos suelen expresar esta propiedad diciendo que la medida de Lebesgue es invariante para los movimientos.

Lebesgue, como hemos dicho, introdujo su medida a primeros de siglo y, a continuación, muchos matemáticos se hicieron la siguiente pregunta: ¿habrá algún conjunto en el espacio que no sea medible Lebesgue?. El primero que obtuvo una respuesta a este problema fue el italiano Vitali que demostró la existencia de conjuntos que no son medibles Lebesgue. La singularidad de la prueba es que Vitali utiliza *el axioma de elección de Zermelo*. A partir de aquí se han hecho grandes esfuerzos para construir un conjunto no medible Lebesgue sin utilizar el axioma de elección. Todo fue inútil. En el año 1972, un lógico matemático ruso, Solovay, consiguió probar que es imposible construir un conjunto no medible Lebesgue sin utilizar el axioma de elección.

Volvamos ahora al problema de la duplicación de la esfera unidad y analicemos la partición más simple, la de Robinson. Este matemático divide la esfera unidad en cinco partes. Somete a movimientos a tres de estas partes y construye con ellas una esfera unidad, y con las otras dos partes, moviéndolas adecuadamente, obtiene otra esfera unidad. Lo primero que observamos es que las cinco partes no pueden ser medibles Lebesgue, porque de serlo, al moverlas seguirían conservando sus medidas y entonces no sería posible hacer ningún tipo de duplicación. Por tanto, deben existir partes que no sean medibles Lebesgue y, por el resultado de Solovay, para construirlas hemos de utilizar necesariamente el axioma de elección. Consecuentemente, sin el axioma de elección no es posible hacer la multiplicación de las esferas. Se puede intuir ahora que si las partes en las que se dividen la esfera no tienen volumen, al mover estas partes, no hay razón para que no puedan aparecer fenómenos que choquen con lo que sucede en el mundo real.

Pese a que las matemáticas puedan alejarse mucho del mundo real, la mayor parte de las veces se aproximan bastante y son un instrumento muy adecuado para el estudio de las ciencias naturales. No obstante, aunque la ciencia alcance muchos éxitos tiene también sus limitaciones. Personalmente pienso que Dios ha hecho un mundo extremadamente más rico de lo que pueda abarcar nuestra ciencia. A este respecto, recuerdo lo que dice Hamlet, en la famosa tragedia de Shakespeare, dirigiéndose a Horacio: " Hay más cosas en el cielo y en la tierra, Horacio, de las que pueda soñar tu filosofía."

Nada más. Muchas gracias por la atención que me han prestado.