Escrito por Redacción Matematicalia
miércoles, 09 de enero de 2008

Recibido: lunes, 24 octubre 2005; revisado: miércoles, 02 noviembre 2005 - martes, 08 enero 2008

cultura ::
matematicalia
revista digital de divulgación matemática
Vol. 3, no. 3 (jun. 2007)

Las matemáticas del arte y el arte de las matemáticas (*)

Gustavo Montero García
Departamento de Matemáticas e Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería (IUSIANI)
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
e-mail: gustavo@dma.ulpgc.es
página web: http://www.iusiani.ulpgc.es/gente.php?id=33

La idea de esta reflexión me surgió a partir de una pregunta que suelo hacerme a menudo debido a mi condición de profesor de matemáticas y a mi particular interés por el arte. Intentando descubrir aquellas cosas que acaparaban la atención de mis alumnos, carentes en general de cualquier forma de motivación hacia las matemáticas, todo parecía conducirme a actividades artísticas: música, danza, literatura, dibujo, entre otros divertimentos. Conocedor de que todas estas disciplinas contienen una base matemática, uno no logra entender el porqué de ese desinterés por las matemáticas y ese entusiasmo por las distintas parcelas del arte.

En efecto, ¿quién no se ha preguntado alguna vez por qué algo nos parece bello o, simplemente, agradable a la vista? Desde tiempos remotos, el hombre ha estudiado este enigma para finalmente decantarse por una cuestión de proporciones, considerando que todo en la naturaleza está diseñado siguiendo unas determinadas pautas de proporcionalidad.

Las matemáticas del arte...

El arquitecto e ingeniero romano *Vitruvio*, en su tratado *De Architecture* (siglo I D.C.) sostenía que la relación más armoniosa entre las partes de un todo se alcanza cuando la proporción entre la menor y la mayor de las partes es la misma que entre la mayor y el total. Surge así la idea de la *sección áurea* (tal como la definió *Leonardo da Vinci*, 1452-1519), también conocida como *divina proporción* (*Luca Pacioli*, 1445-1509), y del *número de oro* Φ, cuyo valor aproximado es 1.618033989... (de forma exacta se puede representar por $(\sqrt{5} + 1)/2$). Asimismo, se define el *rectángulo dorado* como aquel rectángulo en el que el cociente de las magnitudes de sus lados es Φ. Se puede hablar incluso de *triángulo dorado* si un triángulo isósceles tiene en la base ángulos de 72º y en el vértice de 36º. La divina proporción aparece también en otras figuras geométricas, como pentágonos, círculos y decágonos. Sin embargo, el *rectángulo dorado* es el considerado como una de las formas geométricas más agradables a la vista.

Figura 1. Templo de Dendur.

Arquitectos, escultores y pintores de todos los tiempos han utilizado la sección áurea como método de composición de sus obras, al observar en ella una agradable impresión de armonía y belleza. A modo de ejemplo en arquitectura, se muestra en la Figura 1 el *Templo de Dendur*. Expuesto actualmente en el Metropolitan Museum of Art, fue construido por el emperador romano Augusto en honor de la diosa Isis. Como se puede ver claramente en la imagen, los arcos del templo están alineados formando rectángulos decrecientes que son proporcionales al número de oro.

Figura 2. Estatua de niño.
Siglo IV-III A.C. Arte Helenístico.

La Figura 2 muestra un ejemplo de escultura de la Antigua Grecia, donde ya la utilización de la sección áurea es evidente. Aunque en las proporciones del niño no es trivial encontrar el número de oro, en cambio, la figura se apoya en un soporte con *dimensiones doradas*. Obsérvese que la inclusión del ave en la composición completa la altura necesaria para obtener un rectángulo dorado.

En pintura, los grandes artistas han expresado movimiento incorporando el rectángulo dorado en sus obras. El número de oro expresa movimiento debido a que se mantiene en una espiral hasta el infinito. Algunos han llevado a cabo este principio ignorando las dimensiones clásicas de los bastidores que se han venido utilizando hasta nuestros días y trabajando sobre formatos que representen rectángulos dorados. La Tabla 1 contiene la numeración y las dimensiones de los bastidores más utilizados en pintura, Figura, Paisaje y Marina, y los correspondientes *formatos dorados.*

Este número ya era utilizado tanto en la antigua Grecia como en el antiguo Egipto para el diseño de edificios y monumentos. Los egipcios creían que el número de oro era sagrado. Por lo tanto, era muy importante en su religión y lo usaban para construir templos y lugares relacionados con la muerte. Si las proporciones de sus edificios no estaban de acuerdo con el número de oro, el fallecido no podría alcanzar el más allá o el templo no sería agradable a los dioses. Además, los egipcios descubrieron que estas proporciones eran también agradables a sus ojos, lo que suponía un valor añadido a las obras correctamente realizadas. Aunque en aquella época no conocían el concepto de número de oro, ellos lo utilizaban y lo denominaban *número sagrado*.

Mucho más tarde, en el año 1202, *Leonardo de Pisa* (más conocido por *Fibonacci*), un brillante matemático italiano, investigó la rapidez con la que los conejos se podían reproducir en circunstancias ideales. Supongamos que una pareja de conejos, un macho y una hembra, acabados de nacer se colocan en el campo. Los conejos son capaces de reproducirse a la edad de un mes, así que al final de su segundo mes una hembra puede producir otra pareja de conejos. Supongamos también que nuestros conejos nunca mueren y que cada hembra siempre produce una nueva pareja (un macho y una hembra) cada mes a partir del segundo mes en adelante. Lo que *Fibonacci* se cuestionó fue qué número de parejas existiría al cabo de un año. A finales del primer mes, se aparean, pero aún existe una sola pareja. A finales del segundo mes la hembra produce una nueva pareja, por lo tanto, tenemos dos parejas. A finales del tercer mes, la hembra original produce una nueva pareja, pero la segunda hembra aún no puede reproducirse, por lo que existen tres parejas en todo el campo. A finales del cuarto mes, la pareja original ha generado otra nueva pareja y la segunda hembra produce su primera pareja, lo que hace un total de cinco parejas.

nº	Figura	Paisaje	Marina	Dorado
0	18×14	18×12	18×9	18×11
1	22×16	22×14	22×12	22×13.5
2	24×19	24×16	24×14	24×15
3	27×22	27×19	27×16	27×16.5
4	33×24	33×22	33×19	33×20.5
5	35×27	35×24	35×22	35×21.5
6	41×33	41×27	41×24	41×25.5
8	46×38	46×33	46×27	46×28.5
10	55×46	55×38	55×33	55×34
12	61×50	61×46	61×38	61×37.5
15	65×54	65×50	65×46	65×40
20	73×60	73×54	73×50	73×45
25	81×65	81×60	81×54	81×50
30	92×73	92×65	92×60	92×57
40	100×81	100×73	100×65	100×62
50	116×89	116×81	116×73	116×71.5
60	130×97	130×89	130×81	130×80.5
80	146×114	146×97	146×89	146×90
100	162×130	162×114	162×97	162×100

Tabla 1. Dimensiones clásicas de los bastidores y de sus correspondientes rectángulos dorados.

De esta forma, *Fibonacci* dedujo la sucesión de números que lleva su nombre y que, en el ejemplo de los conejos, representa el número de parejas al comienzo de cada mes: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

No es muy difícil darse cuenta de que cada término de la sucesión se obtiene a partir de la suma de los dos anteriores. Igual de fácil es comprobar que los cocientes de dos términos consecutivos de la sucesión de *Fibonacci* van tendiendo a un número fijo, que como por arte de magia no es otro que el número de oro, es decir, 1.618033989... Matemáticamente, diremos que Φ es el límite de la sucesión de *Fibonacci*.

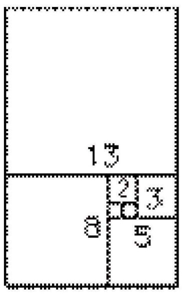

Figura 3. Rectángulo de *Fibonacci.*

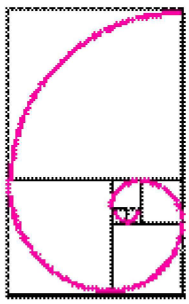

Figura 4. Espiral de *Fibonacci.*

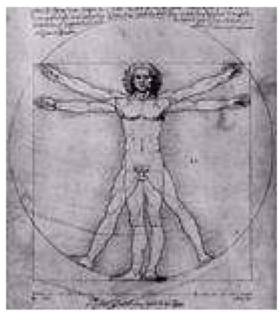

Figura 5. *El hombre de Vitruvio* (*Leonardo da Vinci*).

Pero, ¿qué relación existe entre esta forma ideal de reproducción de los conejos, definida mediante la sucesión de *Fibonacci*, y el arte? Para apreciar la existencia de la sucesión de *Fibonacci* en el arte, debemos prestar mucha atención a la belleza, a las proporciones y al ritmo continuo.

Los rectángulos cuyos lados miden dos números consecutivos de *Fibonacci* y que se componen de cuadrados de lados números de *Fibonacci*, se llaman rectángulos de *Fibonacci* (Figura 3). La Figura 4 muestra cómo se puede dibujar una espiral uniendo los cuartos de circunferencias correspondientes a cada cuadrado. Esta espiral se denomina espiral de *Fibonacci*.

Muchos ejemplos de aplicación del número de oro aparecen en las estructuras de plantas y animales. Concretamente, la divina proporción se puede observar en el caso del dedo humano, donde el cociente entre las longitudes de la primera falange y la segunda, y el de la segunda y la tercera, se aproximan bastante al número de oro. Igualmente, el ombligo divide la altura del cuerpo humano en la proporción áurea. *Leonardo da Vinci* estudió estas proporciones del cuerpo humano, como muestra su dibujo del *Hombre de Vitruvio* (Figura 5). Se trata de un retrato realizado de tal forma que el cociente de la distancia desde el ombligo al límite superior de su cabeza y la distancia desde las plantas de sus pies a su ombligo, sea igual a Φ. Sin embargo, sería *Luca Pacioli*, bajo la influencia benéfica del artista *Piero della Francesca*, quien escribiría un libro acerca de Φ, llamado *De divina proportione*, que fue ilustrado con dibujos de modelos que había hecho su amigo *Leonardo da Vinci*.

Más recientemente, pintores de la talla de *G. Seurat* (1859-1891) y *P. Mondrian* (1872-1944), entre otros, aplicaron estas herramientas matemáticas para realizar sus cuadros. Del primero, en la Figura 6, se muestra *La parade*, pintado en su característico estilo puntillista. Esta pintura contiene varios ejemplos de rectángulos dorados. La obra de *Mondrian*, por otra parte, lejos de cualquier interés por la reproducción del mundo material, se centra en expresar su concepción de máxima armonía y equilibrio. Para ello utilizó líneas negras horizontales y verticales que encerraban bloques de colores puros: blanco, rojo, azul o amarillo. Este estilo se denominó *Neo-Plasticismo*. En el ejemplo de la Figura 7 *(Place de la Concorde)*, *Mondrian* usa rectángulos dorados que se superponen. Al menos los tres indicados son apreciables a simple vista.

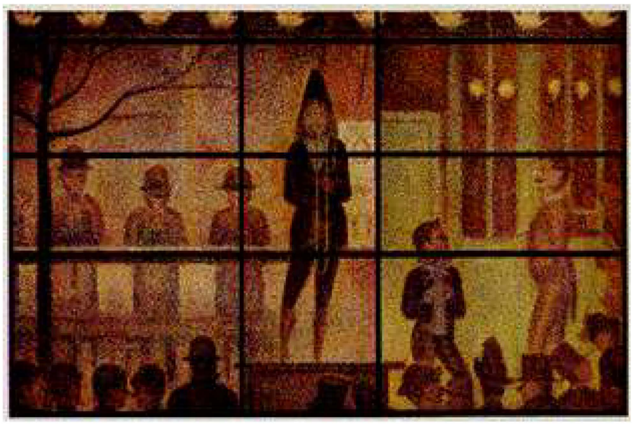

Figura 6. *La Parade*
(*G. Seurat*).

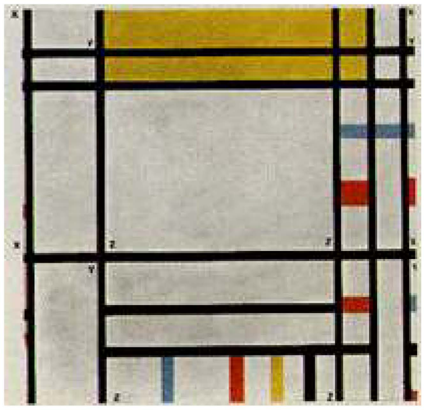

Figura 7. *Place de la Concorde*
(*P. Mondrian*).

El número áureo es esencialmente bidimensional, pero tiene un análogo tridimensional, el *número plástico,* cuyo valor aproximado es 1.3247179572447460 ... y que puede ser representado exactamente como

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}.$$

El *número plástico* fue descubierto en 1928 por el arquitecto y monje benedictino Hans van de Laan, quien lo empleó como base para la escala que lleva su nombre, en la que se apoyó para la construcción de la capilla de la abadía benedictina de *St. Benedictusberg* (Figura 8). El número plástico resuelve las ecuaciones $p+1=p^k$ y $p-1=p^{-r}$ con $k=3$ y $r=4$, mientras que el número áureo lo hace para $k=2$ y $r=1$. Se llaman *números mórficos* aquellos números $p>1$ para los cuales es posible encontrar dos números naturales k y r de manera que se cumplan ambas condiciones. Tanto el número plástico como el número áureo son números mórficos. De hecho, Arts, Fokkink y Kruijtzer, de la Universidad Técnica de Delft, han demostrado en su artículo *Morphic numbers* que ***la sección áurea y el número plástico son los dos únicos números mórficos que existen.***

Figura 8. *St. Benedictusberg*.

A estas alturas uno podría confundirse peligrosamente con este impresionante curriculum que a lo largo de la historia ha ido acumulando el número de oro. Pensar que esta, que no es poca, constituye toda la aportación de las matemáticas al arte, dista mucho de la realidad. Concretamente en el siglo pasado han sido muchas y novedosas las contribuciones del pensamiento matemático al arte. El arquitecto *Le Corbusier* (1887-1965) desarrolló una herramienta de medida que llamó *Modulor*, basada en el cuerpo humano y en proporciones matemáticas (Figura 9). *Le Corbusier* pensaba que las mejores dimensiones se podrían elegir más fácilmente si las pudiéramos ver, si las pudiéramos evaluar con las manos extendidas, no simplemente imaginándolas. Así, la arquitectura debería proporcionar a nuestros sentidos corporales y a nuestro espíritu y mente, una coexistencia armoniosa: el hombre en su entorno.

Por otra parte, *V. Vasarely* (1906-1997), principal exponente del *Op-art*, llenó sus diseños artísticos de figuras geométricas que danzaban en su mundo abstracto mediante el uso certero de colores complementarios, e incluso con contrastes de blanco y negro, que magistralmente imprimía un cierto dinamismo (Figura 10). Toda una lección de geometría.

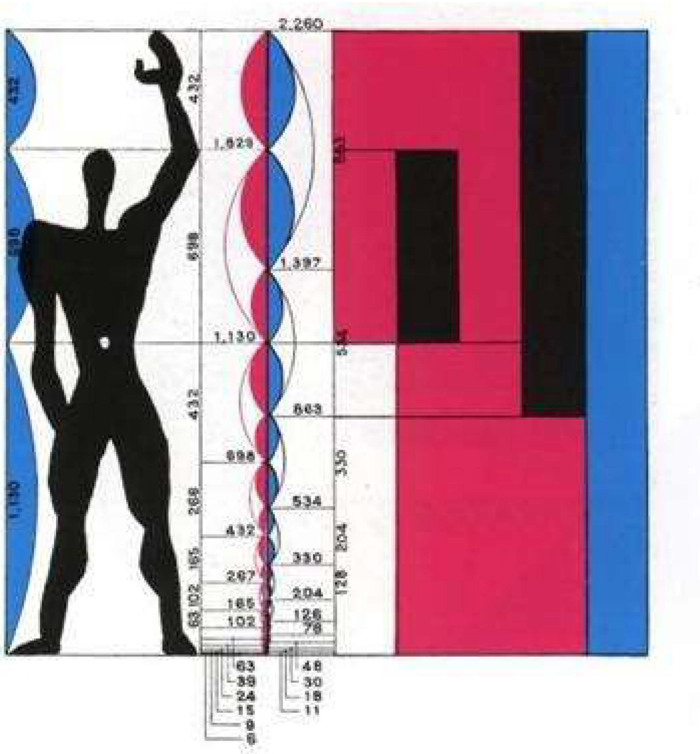

Figura 9. *El Modulor* (*Le Corbusier*).

Pero, si de geometría se trata, no podemos excluir aquí la *cristalografía matemática*, que constituye una de las aplicaciones más importantes de la geometría elemental a la física. En particular, los grupos infinitos bidimensionales son los grupos de simetría de diseños que se repiten, como los que se ven en tapices o en los pisos de baldosa. El cristalógrafo *E.S. Fedorov* demostró en 1891 que no existen sino diecisiete de esos grupos de isometrías. Estos grupos fueron redescubiertos en 1924 por *G. Pólya y P. Niggli*. En la Tabla 2 se han enumerado los generadores de todos los grupos. Los símbolos empleados para denotarlos son los de las Tablas Internacionales de Cristalografía de Rayos X. Los grupos $\mathrm{p1}$ y $\mathrm{p2}$ son dos de los grupos discretos de isometría más sencillos de los diecisiete en los que intervienen dos traslaciones independientes.

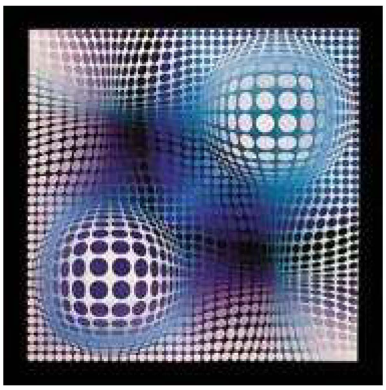

Figura 10. *Feny* (*V. Vasarely*).

Figura 11. *Los jinetes a caballo* (*M.C. Escher*).

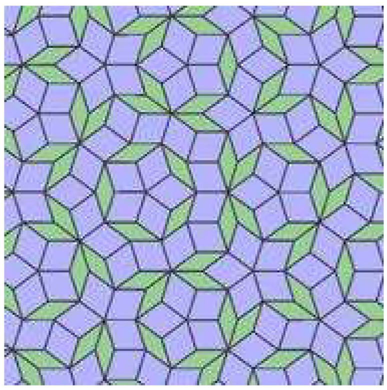

Figura 12. La red de *Penrose.*

El desarrollo del arte que consiste en llenar un plano con un motivo que se repite alcanzó su clímax en la España del siglo XIII, cuando los árabes aplicaron los diecisiete grupos en sus intrincados diseños decorativos de la Alhambra. Su inclinación hacia los diseños abstractos provenía de la estricta observancia del Segundo Mandamiento. El artista holandés *M.C. Escher* (1898-1972), que carecía de esos prejuicios, aplicó con gran ingenio estos grupos al servirse de formas animales para sus regiones fundamentales. Por ejemplo, el grupo de simetrías de *Los jinetes a caballo* (Figura 11) parece a primera vista del tipo $\mathrm{p1}$, generado por una traslación horizontal y otra vertical. Pero si ignoramos la diferencia entre las áreas claras y oscuras obtenemos el grupo pg, más interesante al ser generado por dos reflexiones paralelas en deslizamiento.

Símbolo	Generadores
p1	dos traslaciones
p2	tres semigiros
pm	dos reflexiones y una traslación
pg	dos reflexiones paralelas en deslizamiento
cm	una reflexión y una reflexión paralela con deslizamiento
pmm	las reflexiones en los cuatro lados de un rectángulo
pmg	una reflexión y dos semigiros
pgg	dos reflexiones perpendiculares en deslizamiento
cmm	dos reflexiones perpendiculares y un semigiro
p4	un semigiro y un cuarto de giro
p4m	las reflexiones en los tres lados de un triángulo de ángulos iguales a 45º, 45º, 90º
p4g	una reflexión y un cuarto de giro
p3	dos rotaciones que recorren 120º
p3m1	una reflexión y una rotación que recorre 120º
p31m	las reflexiones en los tres lados de un triángulo equilátero
p6	un semigiro y una rotación que recorre 120º
p6m	las reflexiones en los tres lados de un triángulo de ángulos iguales a 30º, 60º, 90º

Tabla 2. Los 17 grupos espaciales de la cristalografía bidimensional.

Actualmente, el físico y matemático británico *R. Penrose* ha desarrollado una red de rombos no periódica que incorpora la idea de la sección dorada y una simetría basada en reflejar cinco veces los rombos en diferentes direcciones. La red se compone de dos tipos de rombos, unos con ángulos de 36º y 144º, y otros con ángulos de 72º y 108º (Figura 12). Cuando se malla un plano atendiendo a las direcciones de Penrose, la proporción de rombos del primer tipo frente a los segundos es justo el número de oro. Todo este pensamiento, aún en estado embrionario, está siendo utilizado por artistas modernos para componer sus obras.

En definitiva, podemos concluir que el papel de las matemáticas en el arte ha sido y es evidente, pero, a la vez, de alguna manera imperceptible para los sentidos del espectador. Por ello, hasta aquí no he pretendido más que despertar un enfoque más, el matemático, al contemplar una obra de arte, que se puede complementar con la información obtenida desde otros puntos de vista, y ayudarnos a comprenderla mejor.

...Y el arte de las matemáticas

En contrapunto, cuando pensamos en las matemáticas como un medio para expresar ideas nos acercamos a la definición de esta ciencia como arte.

> *El matemático, como el pintor o el poeta, es un constructor de diseños. El hecho de que sus diseños sean más permanentes que los de los otros se debe a que están hechos con ideas. Estos diseños han de ser bellos: las ideas, como los colores o las palabras, deben relacionarse de manera armoniosa. La belleza es la primera prueba: no hay lugar permanente en el mundo para las matemáticas feas.*
>
> G.H. HARDY: *A MATHEMATICIAN'S APOLOGY* (1940)

El proceso de construcción y desarrollo de todo el pensamiento matemático ha seguido y sigue un esquema muy concreto: idea, composición y difusión. En la idea inicial debiera surgir un prodigio lleno de originalidad y creatividad, generalmente como respuesta a un problema previo. Este momento es el más importante, aunque frecuentemente sea olvidado en las contribuciones matemáticas actuales. Según *J.L. Kelley* (*Writing Mathematics*, 1991): *aparte de formatos y estilos, cuando se escribe matemáticas se hace para decir algo. En otras palabras: el número de ideas dividido por el número de páginas debe ser positivo*. Aunque irónicamente expresado en lenguaje matemático, la afirmación anterior nos alerta de que, si bien las matemáticas no deben ser feas, no pueden dejar de ser lo que son, matemáticas.

La segunda parte del proceso consiste en convertir esa idea en una composición con significado propio. Aquí, como en cualquier parcela del arte, interviene la habilidad y el ingenio del autor. Éste, con una paleta cargada de proposiciones, lemas, teoremas, corolarios, etc., debe realizar una pieza suficientemente interesante a la vista (y revista) de los *grandes sabios* para que sea publicada. Pocos lo consiguen: la ley de Lotka afirma que el número de personas que producen n artículos es proporcional a $1/n^2$. Actualmente, la tendencia general es la de documentos concisos, directos y claros, siguiendo la norma de que no existe señal más hermosa que una simple frase declarativa. Por ello, aunque no es fácil, todos los escritores deben aprender el arte de preparar un resumen que contenga la información esencial de sus trabajos. No debemos olvidar que estos pequeños artículos de investigación son los que, definitivamente, permanecen como las auténticas referencias de las ideas desarrolladas.

Como última etapa, el fenómeno de la difusión de los conocimientos alcanzados en estas publicaciones resulta imprescindible. Difícilmente las matemáticas podrían avanzar y crecer al ritmo de los tiempos que corren sin ser transmitidas a toda la comunidad susceptible de recibir esa información, desde científicos y docentes, a estudiantes de todos los niveles. Permítanme que ilustre la pauta a seguir en este final de trayecto con el siguiente fragmento de una carta de *M. Faraday* a su amigo *B. Abbott* en 1813: *la pronunciación no debiera ser rápida ni precipitada, ni, consecuentemente, ininteligible, sino lenta y deliberada, transmitiendo las ideas del profesor e infundiéndolas con claridad y amenidad en las mentes de la audiencia*.

Finalmente, no sé si después de esta exposición se podrá estar en condiciones de responder a la pregunta con la que iniciaba esta discusión. Cierto es que, si bien el arte en general es algo que a toda la humanidad nos ha interesado desde las pinturas de las cavernas, las matemáticas han sido siempre observadas con cierto respeto y desde lejos por la mayoría, dejándola en manos de algunos *elegidos*. No obstante, el arte puede servirnos como un nuevo mecanismo de acercamiento de las matemáticas a esa masa de gente que las aborrece. ¿Acaso no cambiaría su actitud si entendiera que sin las matemáticas el arte no tendría la dimensión que hoy tiene, y que sin arte, gran parte de las matemáticas no se habría desarrollado?

Referencias

J. Aarts, R. Fokkink, G. Kruijtzer: Morphic numbers. *NAW* 5/2, no. 1 (2001), 56-58. [Disponible en http://www.math.leidenuniv.nl/~naw/serie5/deel02/mrt2001/pdf/archi.pdf].

C. Alsina: *Geometría cotidiana: placeres y sorpresas del diseño.* Rubes, 2005.

M. Emmer: La perfección visible: matemática y arte. *Artnodes*, Universitat Oberta de Catalunya (2005). [Disponible en http://www.uoc.edu/artnodes/esp/art/emmer0505.pdf].

M. Ghyka: *The Geometry of Art and Life*. Dover, 1977.

G.H. Hardy: *A Mathematician's Apology.* Cambridge University Press, 1940.

N.J. Higham: *Handbook of writing for the Mathematical Sciences*. SIAM, 1998.

V. Kandinsky: *La gramática de la creación: el futuro de la pintura.* Paidós, 1987.

V. Kandinsky: *De lo espiritual en el arte.* Paidós, 1996.

V. Kandinsky: *Punto y línea sobre el plano: contribución al análisis de los elementos pictóricos.* Paidós, 1998.

J.L. Kelley: *Writing mathematics*. En *Celebrating 50 years of Mathematics* (J.H. Ewing, F.W. Gehring, eds.) Springer-Verlag, 1991.

Le Corbusier: *El Modulor*. Gustavo Gili, 1983.

A.J. Lotka: The frecuency distribution of scientific productivity. *Journal of the Washington Academy of Sciences*, 16 (1926), 317-323.

J. Monterde: Arquitectura y matemáticas. La geometría al servicio del arte: de Gaudí a Gehr*. Mètode,* Universitat de València, 2005. [Disponible en http://www.uv.es/metode/anuario2004/59_2004.htm].

E. Pedoe: *La geometría en el arte*. Gustavo Gili, 1978.

E. Steegmann, J. Acebillo: *Las medidas en arquitectura*. COAC, 1983.

L.P. Williams (ed.): *The Selected Correspondence of Michael Faraday*. Cambridge University Press, 1971.

Sobre el autor

Gustavo Montero García es Doctor Ingeniero Industrial y Catedrático de Matemática Aplicada de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Ha participado en más de 15 proyectos de investigación, en varios de ellos como investigador principal. Posee alrededor de 40 publicaciones entre libros, capítulos de libros y artículos en revistas de reconocido prestigio, así como más de 110 comunicaciones presentadas a congresos y jornadas. Ha dirigido 8 tesis doctorales. Ha figurado en distintos comités editoriales y ha sido miembro del comité organizador de diversos congresos. Periódicamente es revisor de 5 prestigiosas revistas internacionales. Es miembro seleccionado por la ANECA para comisiones en al área de Tecnológicas y cuenta con dos sexenios por su actividad investigadora.

matematicalia
revista digital de divulgación matemática

(*) Este artículo está motivado por la conferencia del mismo título impartida por su autor en el ciclo *Matemáticas en la Ciencia y la Cultura Contemporáneas*, organizado por el Centro de Investigación Matemática de Canarias y la Fundación Mapfre Guanarteme, que tuvo lugar de octubre a diciembre de 2005 en la sede de esta Fundación en las ciudades de La Laguna y Las Palmas de Gran Canaria (Islas Canarias, España).

Cerrar ventana