

Otro enfoque de la geometría afin en Bachillerato

Noelia Díaz García (Universidad de La Laguna. España)

Resumen

La enseñanza de la Geometría Afin el segundo curso de Bachillerato en España (17-18 años), se realiza en general con una orientación hacia el aprendizaje de conceptos y procedimientos, con poca aplicación a contextos reales. En este artículo se presenta una propuesta de actividades que pueden incluirse en dicho tema y que tienen dos características: por un lado, persiguen un enfoque contextualizado hacia posibles aplicaciones de su uso, y por otro lado, se presentan utilizando la herramienta tecnológica GeoGebra 3D.

Palabras clave

GeoGebra 3D, geometría afin, recta, plano, contextualización, interactivo

Title

Another approach in affine geometry for baccalaureate

Abstract

The teaching of Affine Geometry in the second year of Baccalaureate in Spain (17-18 years) is generally performed with an orientation towards the learning of concepts and procedures, with little application to real contexts. This article presents a proposal of activities which can be included in this subject and have two characteristics: firstly, they pursue a contextualized approach into possible applications of its use, and secondly, they are presented using the technological tool GeoGebra 3D.

Keywords

GeoGebra 3D, affine geometry, line, plane, contextualization, interactive

1. Introducción

La geometría afin en los niveles preuniversitarios incluye, entre otros aspectos, los conceptos de vectores, rectas y planos en el espacio. Muchas propuestas curriculares abordan este tema de manera visual, aunque con un enfoque abstracto. Pero hay diferentes aplicaciones a la realidad que pueden incluirse en dichas propuestas. Así, por ejemplo, se puede encontrar uso de vectores en: la cinemática, la dinámica, los campos de fuerza, la arquitectura, la ingeniería, etc. Del mismo modo, las rectas y los planos están presentes en estos campos, y además, aparecen en el arte, la naturaleza o las mediciones que hacemos. ¿Por qué no aprovechar toda esa riqueza para la docencia de la geometría? (Figura 1).

La enseñanza de la geometría afin y euclídea del espacio en España se sitúa en el segundo curso de Bachillerato (17-18 años), como parte fundamental de la materia Matemáticas II. Este curso está orientado a la preparación preuniversitaria, lo que muchas veces condiciona el enfoque y la metodología de enseñanza.

El currículo de Bachillerato de la Comunidad Autónoma de Canarias recoge los contenidos y los criterios de evaluación referidos al bloque de Geometría que se muestran en la Tabla 1 (BOC, 2008).



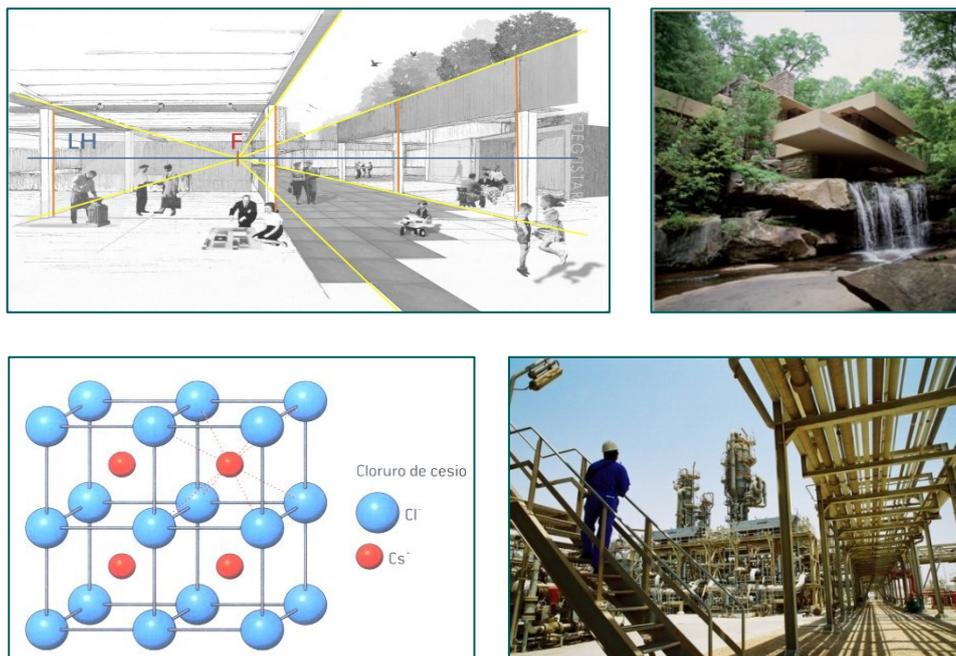


Figura 1. Ejemplos de contextos reales donde se visualizan planos y rectas en el espacio

Contenidos

III. Geometría

- Vectores en el espacio tridimensional. Productos escalar, vectorial y mixto. Interpretación geométrica y física de las operaciones. Resolución de problemas geométricos y físicos con vectores.
- Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.
- Resolución de problemas de posiciones relativas y métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes. Estrategias generales de resolución de problemas e investigaciones matemáticas.

Criterios de evaluación

1. Transcribir situaciones y problemas derivados de la geometría, la física y demás ciencias del ámbito científico-tecnológico a un lenguaje vectorial y utilizar las operaciones con vectores para resolverlos e interpretar las soluciones de acuerdo con la situación.

Con la aplicación del criterio se intenta evaluar la capacidad del alumnado para transcribir situaciones a un lenguaje vectorial en tres dimensiones y utilizar las técnicas y operaciones apropiadas en cada caso: suma, resta y multiplicación por un escalar, la dependencia e independencia lineal, producto vectorial y mixto, para interpretar fenómenos diversos y resolver problemas del ámbito científico-tecnológico.

2. Realizar transformaciones sucesivas con objetos geométricos en el espacio utilizando el lenguaje vectorial para interpretar analíticamente distintas situaciones de la geometría tridimensional.

Este criterio se propone poner de manifiesto si el alumnado obtiene ecuaciones de rectas y planos en el espacio, identifica sus elementos característicos y utiliza distintas expresiones de la ecuación de una recta o de un plano, para resolver problemas de incidencia, paralelismo, perpendicularidad y para calcular distancias, ángulos, áreas y volúmenes.

Tabla 1. Contenidos de Geometría en 2º de Bachillerato (BOC, 2008)

En los criterios de evaluación se muestra el interés por resolver problemas reales del ámbito científico-tecnológico a través de la Geometría. Sin embargo, una atención a diferentes propuestas curriculares de Bachillerato muestra que este bloque de contenido se orienta principalmente a la resolución rutinaria de ejercicios abstractos, con poca aplicación práctica. La excepción radica en la propuesta de algunos enunciados referentes a determinadas figuras geométricas.

En este trabajo se presentan diferentes ejemplos que se pueden utilizar en este tema, los cuales persiguen promover un aprendizaje contextualizado, interactivo y participativo. Contextualizado por la utilización de enunciados reales que invitan a una valoración del uso de la geometría tridimensional en la vida cotidiana. Interactivo porque se plantea trabajo que puede ser grupal y además con el uso del programa informático GeoGebra 3D. Y participativo porque se pretende que la dinámica de las actividades incite al debate y discusión de los resultados.

Los alumnos pueden observar el aula o estructuras de su entorno identificando rectas, planos y visualizando los puntos de corte, el paralelismo entre ellos, etc. Por otra parte, el programa informático GeoGebra 3D permite visualizar en tres dimensiones vectores, rectas y planos, de manera que ayudamos al alumnado “a ver”, en lugar de sólo “a imaginar”. De esta manera se aspira a que puedan comprender y valorar mejor la geometría, así como a participar de un mundo cada vez más tecnológico. Los estudiantes pueden crear sus propias composiciones artísticas en GeoGebra, utilizando rectas, planos y sus posiciones relativas. Para ello sólo hace falta conocer cómo se escribe la ecuación de una recta, de un plano y cómo estudiar sus posiciones relativas.

2. Actividades de geometría

A continuación se muestran algunos ejemplos de actividades que cumplen los fines descritos. Se han categorizado en cinco grupos: actividades para comenzar en situación, actividades de rectas y planos en la construcción, en movimiento, en la naturaleza, y en el arte y con figuras geométricas. No pretenden ser una secuencia de aprendizaje completa, sólo ejemplificaciones que se pueden incluir en determinadas propuestas.

2.1. Actividades para comenzar en situación

Se trata de actividades que intentan mirar a nuestro entorno más próximo, como puede ser el aula, para encontrar rectas y planos.

Actividad 1. Rectas y planos

Supongamos que el origen de un sistema de referencia $(0,0,0)$ se sitúa en la esquina inferior izquierda de nuestra aula, que queremos representar en el primer octante. Obtener las ecuaciones del plano del suelo y de las dos paredes. Recrear el aula con GeoGebra 3D.

- Supongamos que situamos a algunos alumnos en los puntos $A(2,2,0)$, $B(4,2,0)$, $C(2,4,0)$, $D(4,4,0)$, $E(6,2,0)$, $F(6,4,0)$. Obtener la recta que pasa por los alumnos A y F . ¿Sobre qué plano se encuentra?*
- Vamos a colocar la pizarra en los extremos $G(0,2,2)$, $H(0,4,2)$, $I(0,2,4)$, $J(0,4,4)$. ¿Sobre qué plano se encuentra la pizarra?*
- Obtener la recta que pasa por el alumno B y el extremo J . ¿Se sitúa esta recta sobre alguno de los planos OXY , OXZ o OYZ ?*
- Determinar el plano que pasa por los puntos H , D , I .*



La Actividad 1 se sitúa en el entorno del aula. La primera parte consiste en fijar el sistema de referencia y a partir de ahí, deducir los planos OXY , OYZ , OXZ que corresponden a las dos paredes, y al suelo. La segunda parte consiste en hacer el diseño del aula en GeoGebra 3D. Se sitúan los alumnos y la pizarra en unos puntos dados y se pide obtener ecuaciones de rectas y planos que pasen por algunos de ellos.

Al recrear el aula en GeoGebra se obtendría la Figura 2.

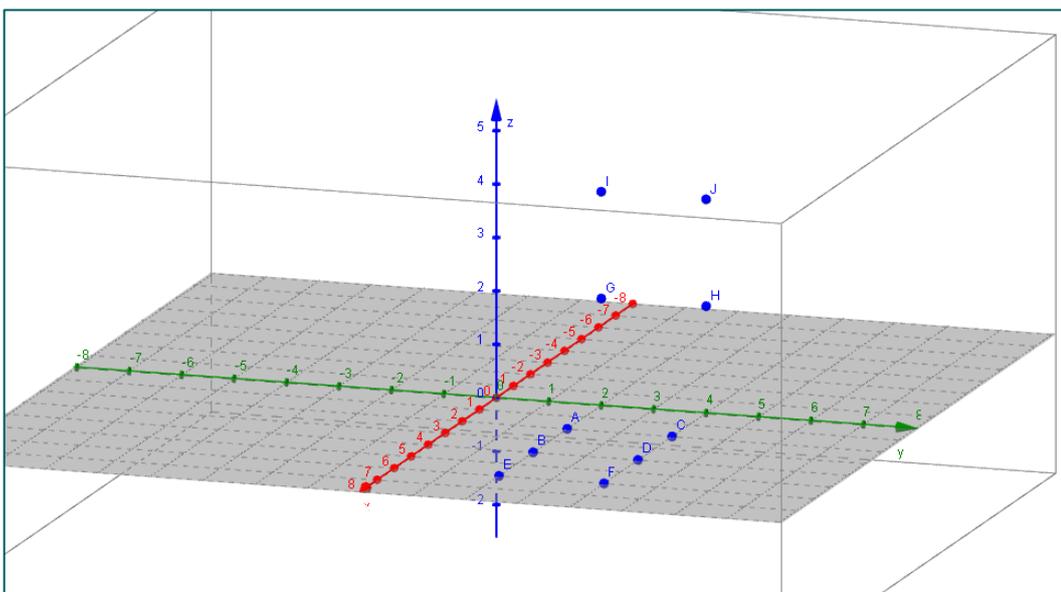


Figura 2. Representación del aula

Y las soluciones serían:

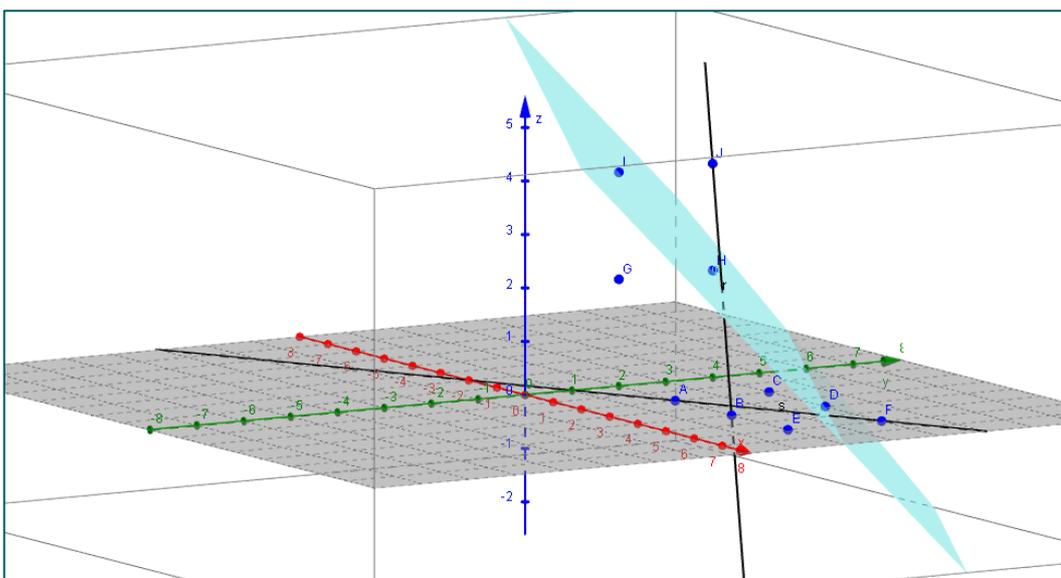


Figura 3. Respuesta de la Actividad 1

La representación que muestra GeoGebra 3D (en la vista gráfica 3D de la derecha) permite visualizar los puntos, rectas, planos, además de rotar la vista. En definitiva, ayuda a la comprensión porque permite ir más allá de la visualización mental. Por otro lado (en la vista algebraica de la izquierda), se observan las ecuaciones de las rectas y planos considerados (ver Figura 4).

El alumno aprende con esta actividad a escribir en la barra de entrada de GeoGebra (esquina inferior izquierda) diferentes conceptos (Figura 4):

- Puntos: por ejemplo, A(2,2,0).
- Rectas que pasan por dos puntos: por ejemplo, la recta[B,J] muestra la recta que pasa por los puntos B y J.
- Plano que pasa por tres puntos: plano[H,D,I].

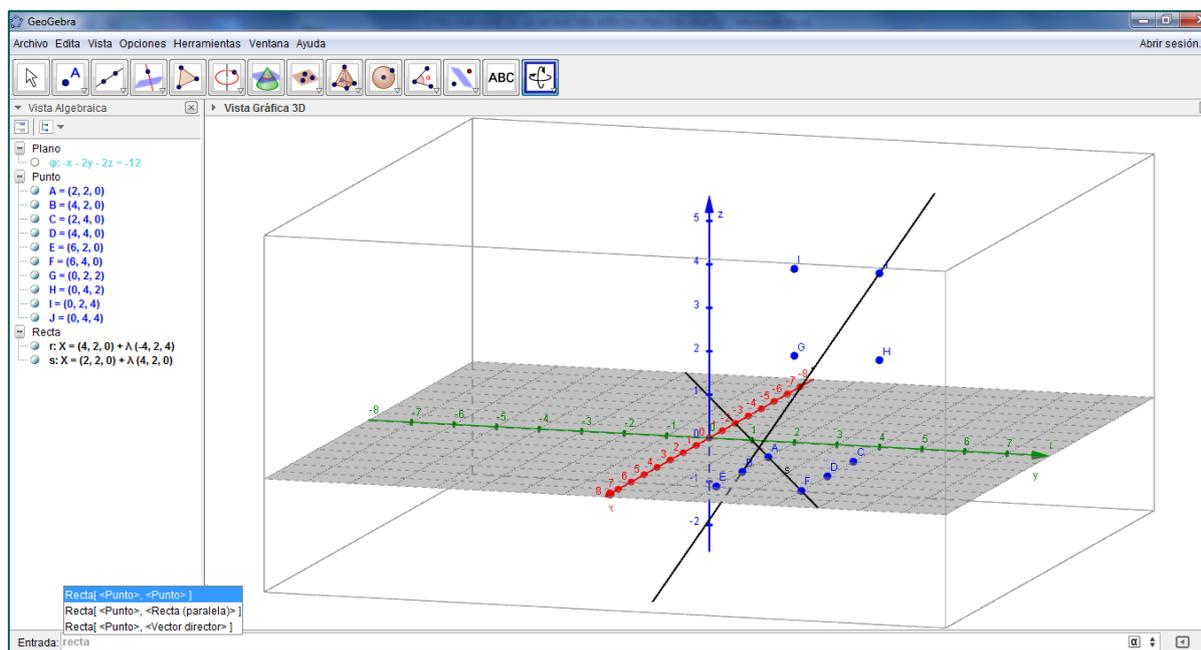


Figura 4. Ventanas de vista algebraica, vista gráfica 3D y barra de entrada

En la barra de entrada de la Figura 4 se observa que otras opciones para obtener una recta en GeoGebra 3D son Recta[Punto,<Recta(paralela)>] y Recta[<Punto>,<Vector director>]. En el 4º icono de la barra de herramientas encontramos las opciones “Perpendicular” y “Recta paralela”, entre otras.

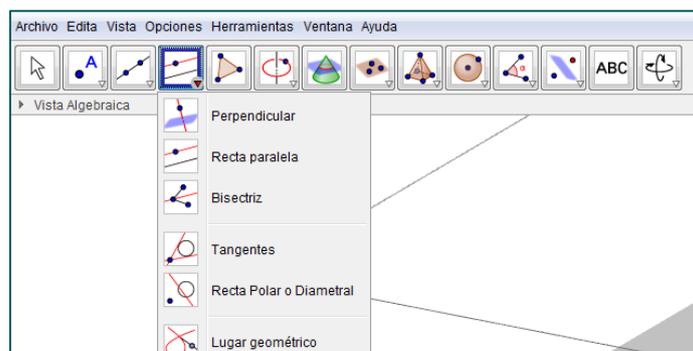


Figura 5. Opciones para obtener una recta



2.2. Actividades de rectas y planos en la construcción

Las actividades de este apartado se caracterizan por estar contextualizadas en entornos arquitectónicos. Los edificios son un contexto cercano y sencillo para buscar rectas, planos y estudiar su posición relativa.

Actividad 2. Construcción del plano del techo de una casa

Se desea construir el plano del techo sobre la escalera de una casa, de manera que éste sea paralelo a la recta descrita por la

barandilla $r: \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 1 \\ z = 0 + \lambda \end{cases}$ y que pase por los puntos $A(0,0,4)$ y $B(2,1,3)$. Determinar la ecuación de dicho plano.



Figura 6

La actividad 2 es una manera contextualizada de proponer la búsqueda de la ecuación de un plano, sabiendo que es paralelo a una recta y que pasa por dos puntos dados, que se puede representar con GeoGebra. Así, podemos utilizar el programa para simular la recta de la barandilla, los puntos, y para obtener y visualizar el plano resultante. El alumnado intentará encontrar ese plano de dos formas: de forma analítica y planteándose cómo conseguirlo con el programa.

La recta se consigue escribiendo en la entrada: Recta[[2,1,0], Vector[[-2,0,1]]] de manera que se parte de la situación de la Figura 7.

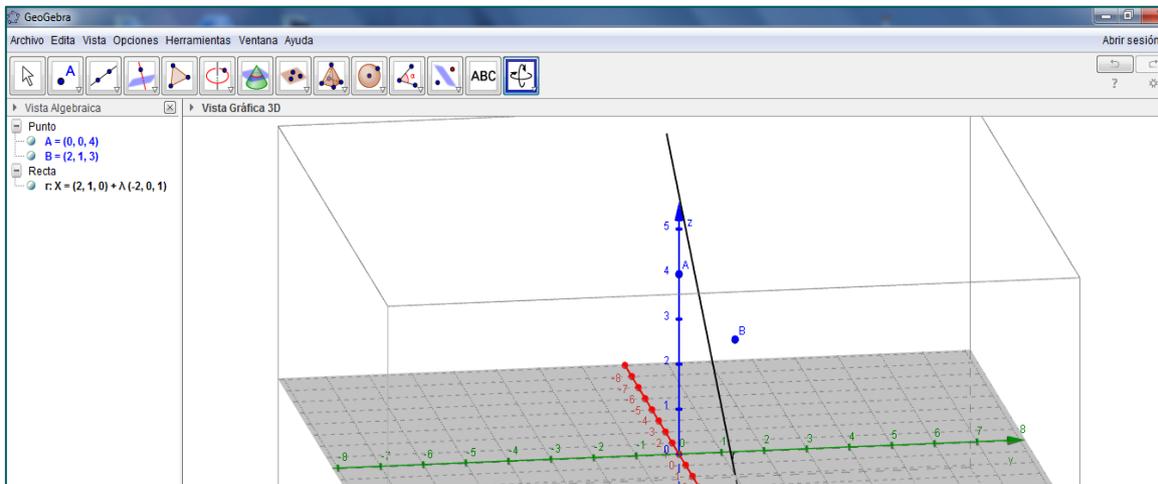


Figura 7. Recta de la barandilla y puntos A, B dados.

En primer lugar, el vector que pasa por los puntos A y B, es decir, $u = \text{vector}[A, B]$ y el vector director de la recta r , $v = \text{vector}[(-2,0,1)]$, son dos vectores paralelos al plano e independientes entre sí. Por tanto, con ambos vectores y uno de los puntos A o B obtendríamos la ecuación del plano buscado (Figura 8).

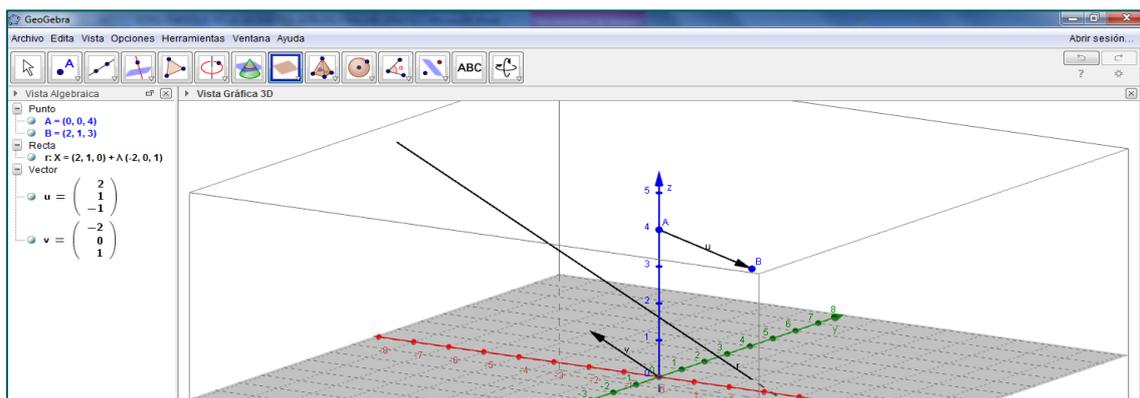


Figura 8. Vectores u y v paralelos al plano buscado

En segundo lugar, obtenemos el plano en GeoGebra 3D. Obsérvese la barra de entrada del programa (Figura 9) o el icono 8º (Figura 10).

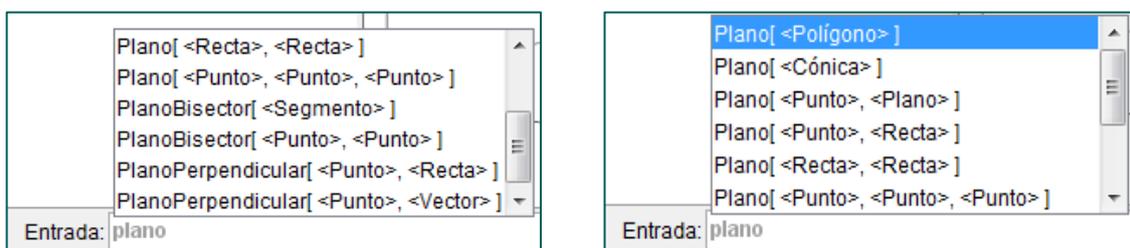


Figura 9. Opciones para obtener un plano en la barra de entrada

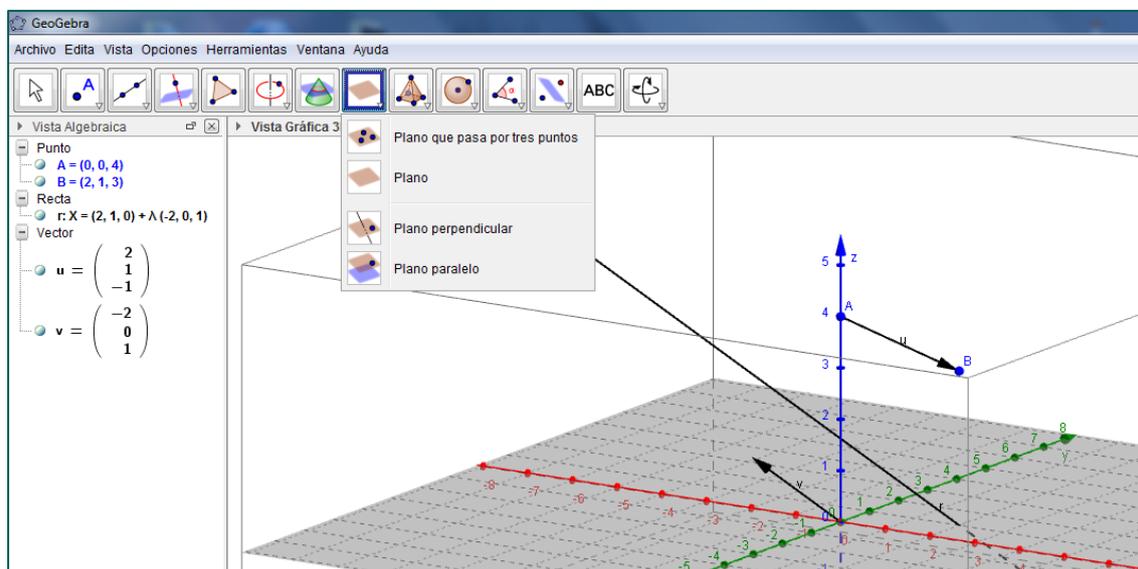


Figura 10. Opciones para obtener un plano en el 8º icono

A partir de aquí, una posible solución podría ser obtener el producto vectorial de u y v, $w=u \otimes v$, que por definición es un vector perpendicular a ambos vectores u y v. Este vector será normal al plano. Luego, se recurre a la última instrucción de la Figura 9, PlanoPerpendicular[A, w]. Ver solución en Figura 11.



En las figuras 9 y 10 se ha mostrado cómo obtener un plano en GeoGebra 3D. También, es necesario aclarar que es posible escribir directamente la ecuación implícita de un plano en la barra de entrada.

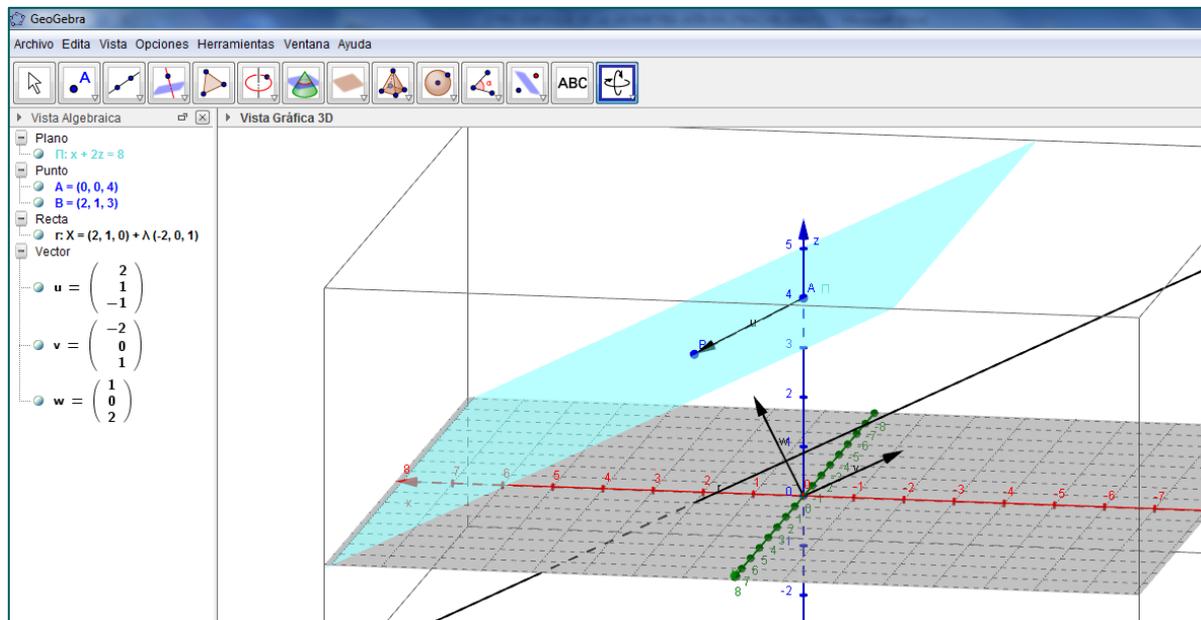


Figura 11. Solución. Vector w perpendicular a u y v , y plano buscado $\Pi: x+2z=8$

Actividad 3. Construcción de una casa

Las cubiertas de edificios son un ejemplo de aplicación del sistema de Planos Acotados. Los planos que forman el tejado se llaman faldones o vertientes y están limitados inferiormente por los aleros. La intersección de faldones se llama limas si son inclinadas, y cumbreras o caballetes si son horizontales (Figura 12). Observa en las Figuras 13 y 14 la estructura de una casa y su tejado.

- a) ¿Cuáles son las ecuaciones de los faldones?
- b) ¿Y de los planos de las paredes?
- c) Estudia la posición relativa de los faldones. ¿Cuál es la ecuación de la recta en que se cortan?
- d) Escribe la ecuación de la recta que pasa por A y por el vértice B .
- e) Localiza un ejemplo de tres planos que se corten en un punto. ¿Cuáles son? ¿Cuál es el punto?

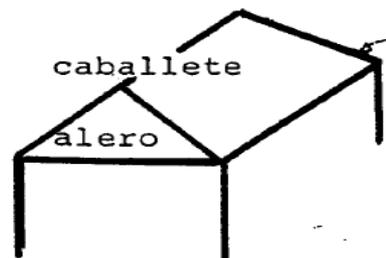


Figura 12

La actividad enunciada es adecuada para proponer la obtención de ecuaciones de rectas o planos con condiciones dadas (que pasen por determinados puntos, que sean paralelas o perpendiculares a otras rectas o planos, etc.) y para el estudio de posiciones relativas de rectas y planos.

La elaboración de la casa con GeoGebra 3D es muy sencilla. El profesor selecciona puntos, primero para la base de la casa y luego para el resto de su estructura. Posteriormente, se diseñan los segmentos seleccionando en entrada Segmento[<Punto (extremo)>, <Punto (extremo)>], por ejemplo, segmento[F, J] crea el segmento que une los puntos F y J (Figura 15).

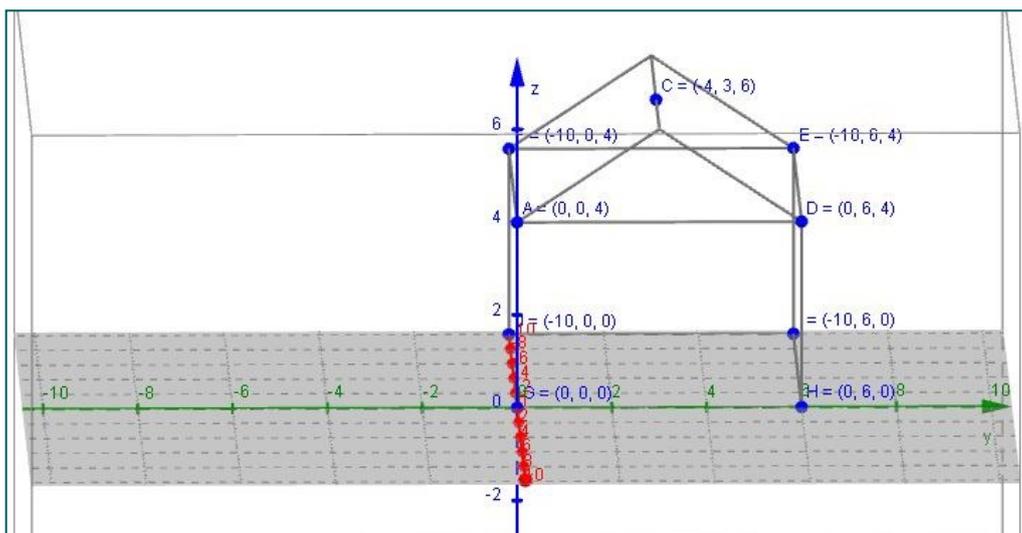


Figura 13. Vista frontal de la casa recreada en GeoGebra

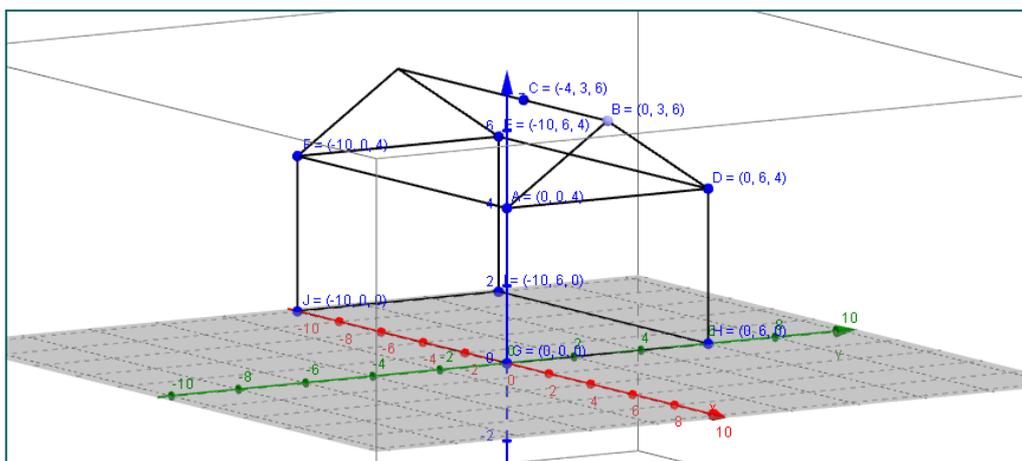


Figura 14. Vista lateral de la casa recreada en GeoGebra

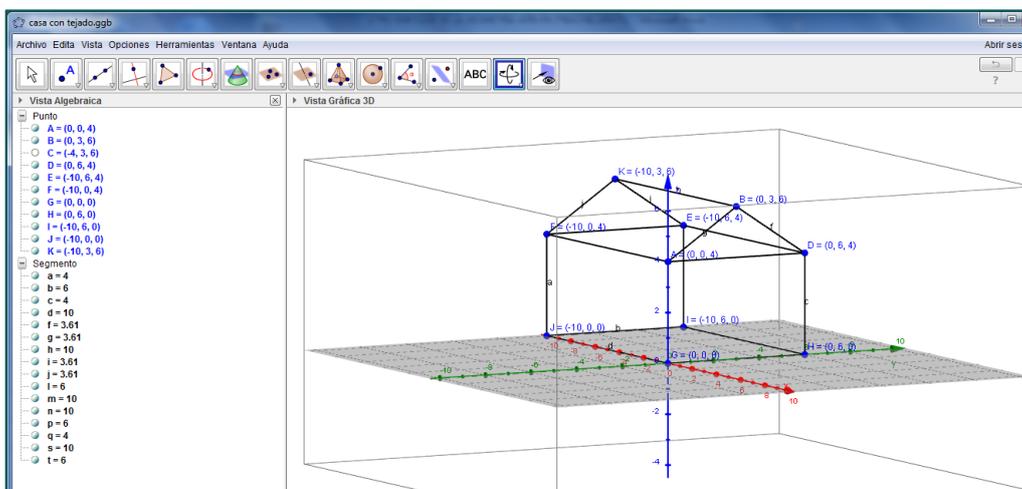


Figura 15. Recreación de una casa en GeoGebra 3D



En el apartado a) se pide obtener la ecuación de los planos del tejado. Una opción podría ser obtener el plano que pasa por tres puntos, es decir, en entrada Plano[<Punto>, <Punto>, <Punto>]. Por ejemplo, plano[A,B,F] nos da el plano Π de la Figura 16.

Se pueden deducir fácilmente los planos de las paredes, ya que son planos verticales. Se trata de los planos $x=0$, $y=6$, $y=0$, $x=-10$. Con GeoGebra 3D se pueden obtener del mismo modo que en a), o también se pueden proponer otras formas de encontrarlos. Por ejemplo, utilizar la instrucción Plano[<punto>, recta], plano que pasa por un punto y contiene una recta. Plano[H,r] siendo r la recta que pasa por D y E, nos devuelve el plano $y=6$. Pulsando en el 9º icono, “Plano paralelo”, y seleccionando este plano $y=6$ y el punto A obtendríamos el plano $y=0$.

La intersección de ambos planos se obtiene pulsando en el 7º icono y eligiendo “Intersección de dos superficies”, de manera que obtenemos la ecuación de la recta e en que se intersecan ambos planos. Se trata de un caso del estudio de la posición relativa de dos planos (Figura 16) (Ver Anexo, Nota sobre el estudio de las posiciones relativas con GeoGebra 3D).

En cuanto al apartado d), para determinar la ecuación de la recta que pasa por A y B basta aplicar el comando recta[A,B].

Para el último apartado una posible solución sería el punto (0,0,0), intersección de los planos OXY, OXZ y OYZ.

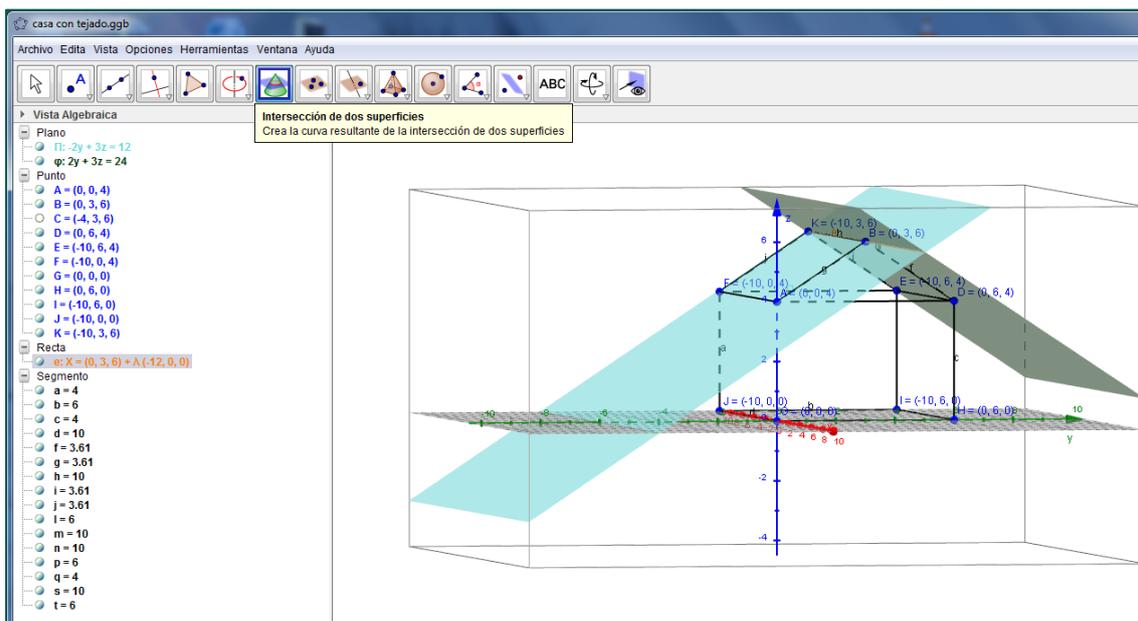


Figura 16. Planos del tejado y su intersección en la recta e

2.3. Actividades en movimiento

Las siguientes actividades se refieren al uso de la geometría afín en contextos que implican trayectorias y movimientos. Por ejemplo, la recta descrita por el movimiento de un avión, la caída de un meteorito, o el rayo de sol que se proyecta en un plano de un edificio. También podría ampliarse a campos magnéticos, fuerzas, etc.

Actividad 4: Problema de los aviones

Supongamos que en un juego simulador, desde una casa-observatorio se observa la trayectoria de dos aviones que viene descrita por las siguientes rectas:

$$r: (x,y,z) = (2,4,8) + \lambda(13,28,4), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s: (x,y,z) = (7,8,13) + \lambda(8,24,-1), \lambda \in \mathbb{R}$$

¿Los dos aviones pasarán por el mismo punto en su recorrido? Si es así, hallar ese punto.

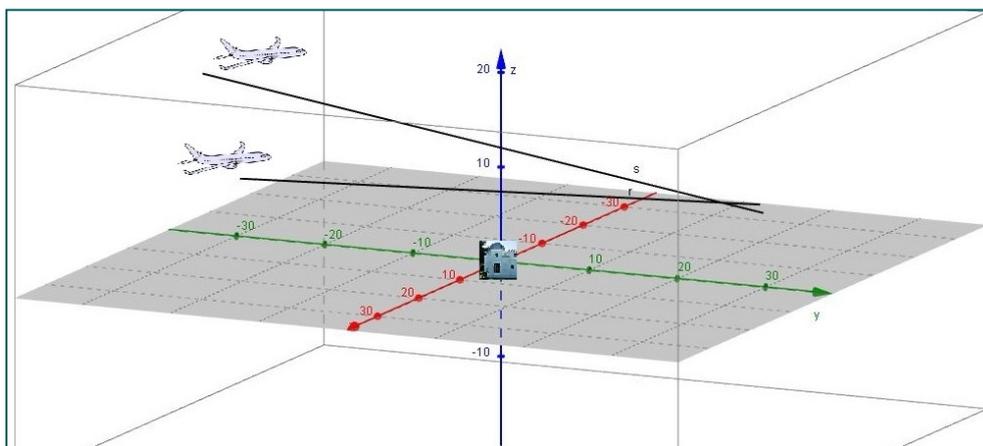


Figura 17. Dos aviones en movimiento

Esta actividad es un caso de estudio de la posición relativa de dos rectas r y s contextualizadas en la trayectoria de dos aviones, uno en despegue y otro en aterrizaje. En GeoGebra 3D el problema se resuelve pulsando el 2º icono de la barra de herramientas y eligiendo “Intersección”, tal y como se indica en el Anexo “Nota sobre el estudio de posiciones relativas con GeoGebra 3D”. El programa da el punto $A(15,32,12)$ como intersección de ambas, de forma que se deduce que las rectas se cortan.

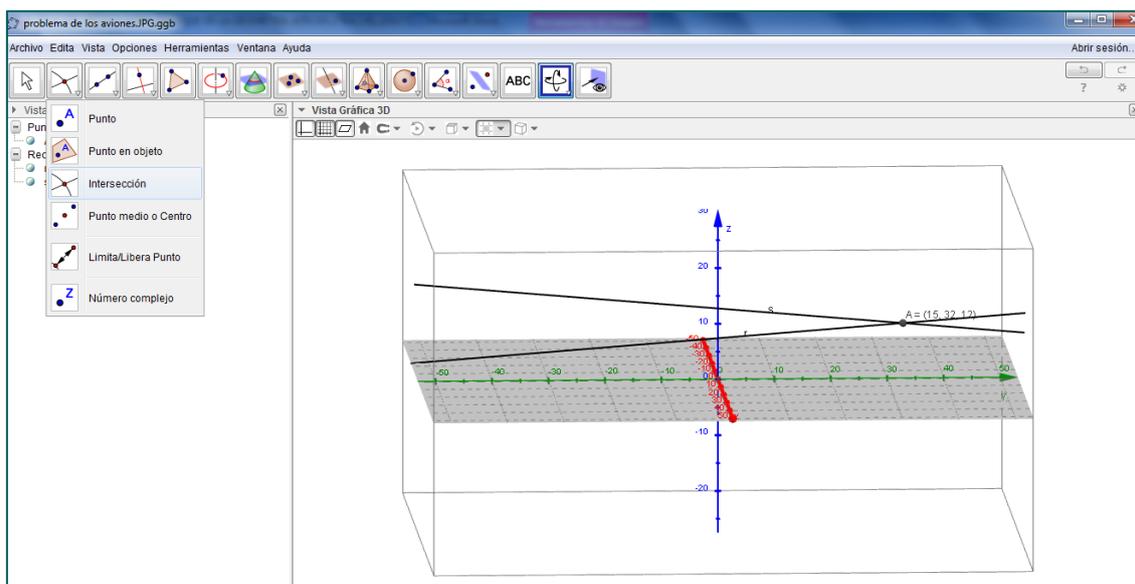


Figura 18. Intersección de las rectas r y s en el punto $A(15,32,12)$



Para animar el movimiento de los aviones se pueden utilizar deslizadores que recorran las dos rectas. Esto se realiza de la siguiente manera:

Abrir la vista gráfica 2. Pulsar en el penúltimo icono correspondiente a deslizador. Y pinchar con el ratón sobre la vista gráfica 2 obteniéndose lo que se muestra en la Figura 19.

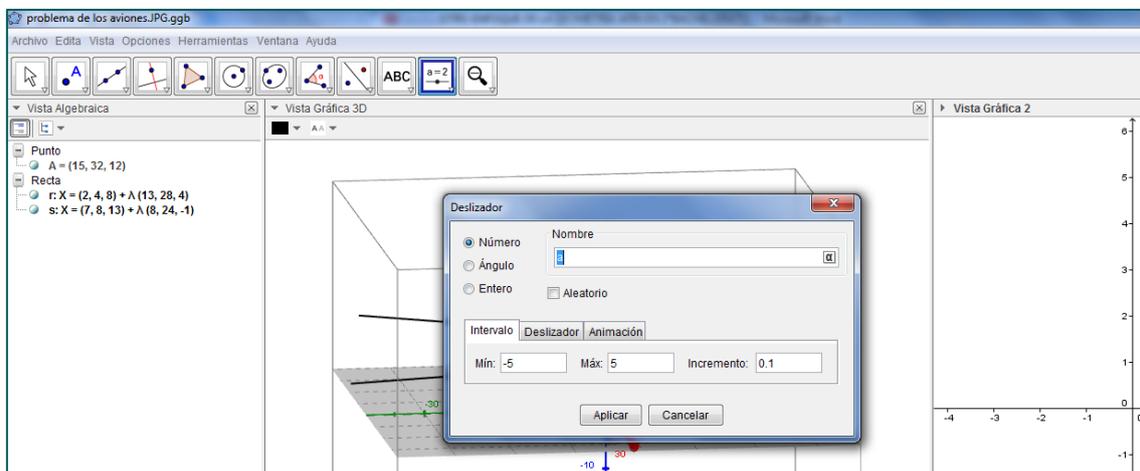


Figura 19. Obtención de un deslizador en vista gráfica 2

Al pulsar en “Aplicar” se obtiene el deslizador a, cuyos valores varían, tal y como se ha seleccionado, entre -5 y 5 (Figura 20).

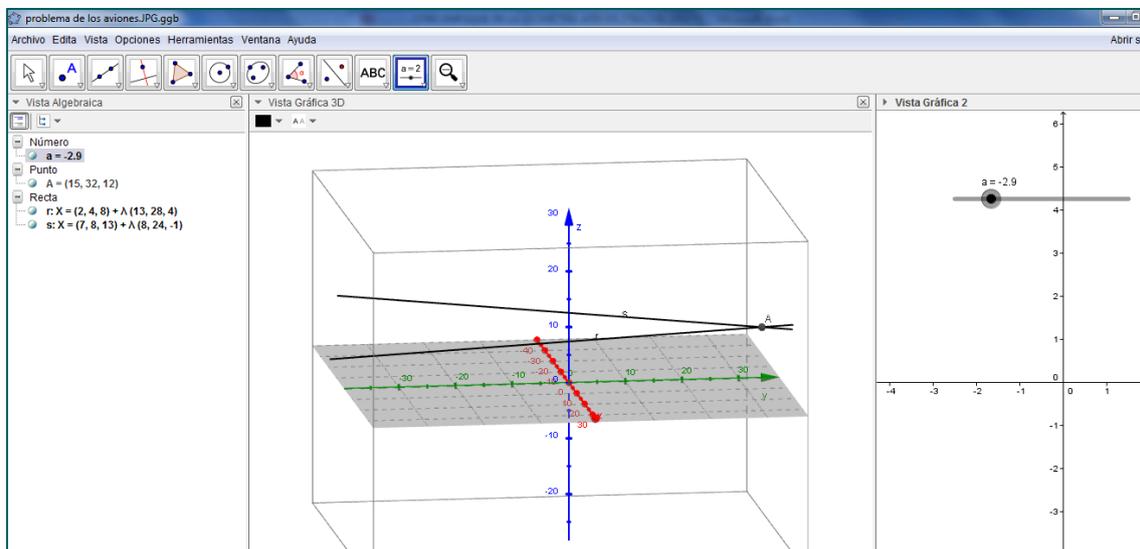


Figura 20. Deslizador en vista gráfica 2

Se introducen en entrada los puntos $C=(2+13a,4+28a,8+4a)$ y $D=(7+8a,8+24a,13-a)$ los cuales recorren las rectas r y s respectivamente, ya que dependen del parámetro a . De esta forma, al animar el deslizador observamos cómo cambian los valores de C y D recorriendo las rectas y cómo coinciden en el punto de intersección A (Figura 21).

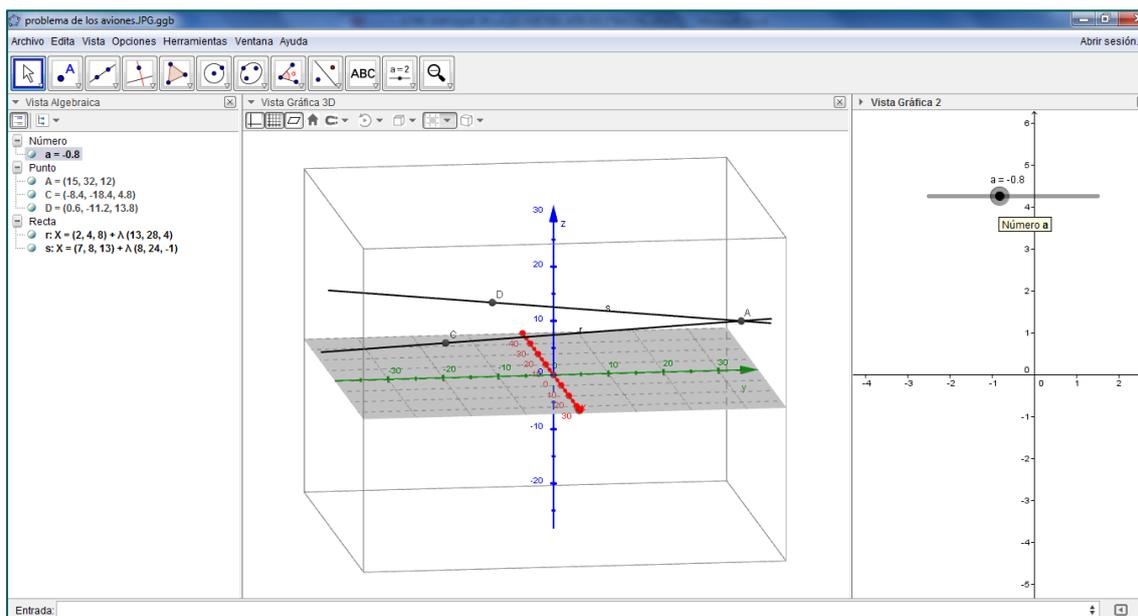


Figura 21. Deslizadores C y D recorriendo las rectas r y s respectivamente

Actividad 5. ¿Se acerca un meteorito!

En un juego simulador se observa que un meteorito de dimensiones pequeñas está a pocos kilómetros de llegar a la Tierra (Figura 22). La trayectoria que describe coincide con la recta

$$r: (x,y,z) = (5, -10, 14) + \lambda(-3, 14, -6), \lambda \in R.$$

- a) ¿En qué punto tocará el suelo?
- b) Si el plano $\pi: -4x + 5y = 12$ se ha fijado como separación entre las fronteras de España y Francia, ¿Atravesará el meteorito la frontera?
- c) ¿Y la frontera $\pi: -0,9x - 0,19y = 0$ que separa Francia de Holanda?



Figura 22

La Actividad 5 está pensada para estudiar la posición relativa de una recta (en este caso la descrita por el meteorito) y un plano (que separa fronteras). Ver Anexo (Nota sobre el estudio de posiciones relativas con GeoGebra 3D).

Actividad 6. Un rayo de sol

A una determinada hora del día, el sol que llega a una parte de una de las Torres de Kio proyecta un rayo en forma de la recta:

$$r: \begin{cases} x - y = 0 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$$

Los planos $\pi: 5x + y - 2z + 1 = 0$ y $\gamma: 5x + y - 2z + 25 = 0$ son los correspondientes a los laterales de la torre izquierda.



Figura 23



- a) ¿Cortará el rayo de sol al plano $\pi: 5x + y - 2z + 1 = 0$ de dicha torre? Si es así, ¿En qué punto?
 b) Dado un punto $A(0,0,5)$ calcular su proyección ortogonal sobre el plano $\pi: 5x + y - 2z + 1 = 0$ de la torre.

La actividad 6, además de incluir un caso de estudio de posición relativa de una recta y un plano, induce a introducir el concepto de proyección ortogonal que se puede visualizar en GeoGebra 3D (ver Bibliografía).

2.4. Actividades en la naturaleza

La naturaleza es un contexto en el que podemos basarnos también para proponer ejercicios de geometría afín y euclídea, desde algunos más científicos, como las moléculas de compuestos, a otros más cotidianos, como un terreno que se ha cultivado formando rectas paralelas.

Actividad 7: Estructura del cloruro de cesio

La estructura cristalina del cloruro de cesio se muestra en la Figura 24. Esta estructura se ha recreado en GeoGebra 3D obteniéndose la Figura 25.

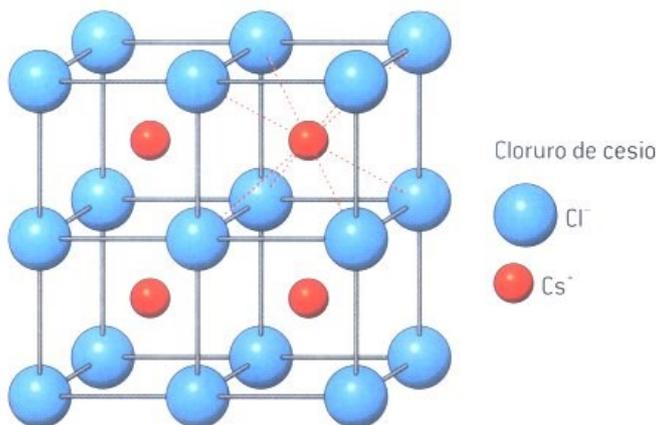


Figura 24. Cloruro de cesio

- a) Obtener la ecuación de la recta que pasa por P, Q y N . ¿Pertenece el punto $(1,4,4)$ a esa recta?
 b) Obtener la ecuación de la recta que pasa por V y F .
 c) Estudiar la posición relativa de las rectas de los apartados a) y b).
 d) ¿Se puede obtener un plano que pase por los puntos A, C y G ? Razónalo.
 e) Construye un ejemplo de un plano paralelo a una recta utilizando los puntos dados en la estructura (A, B, C, \dots, X de la Figura 26).
 f) Construye un ejemplo de tres planos paralelos utilizando los puntos dados.
 g) Construye el plano que pasa por P, C y A y obtén un plano perpendicular a éste que pase por el punto O .

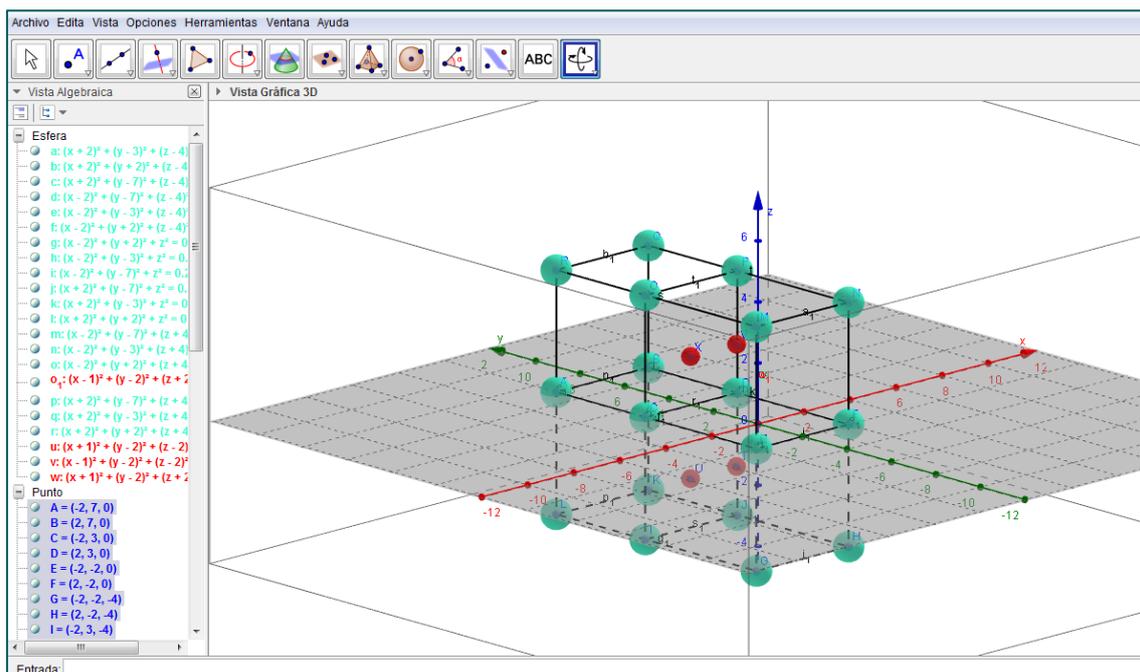


Figura 25. Recreación de la estructura del cloruro de cesio en GeoGebra 3D

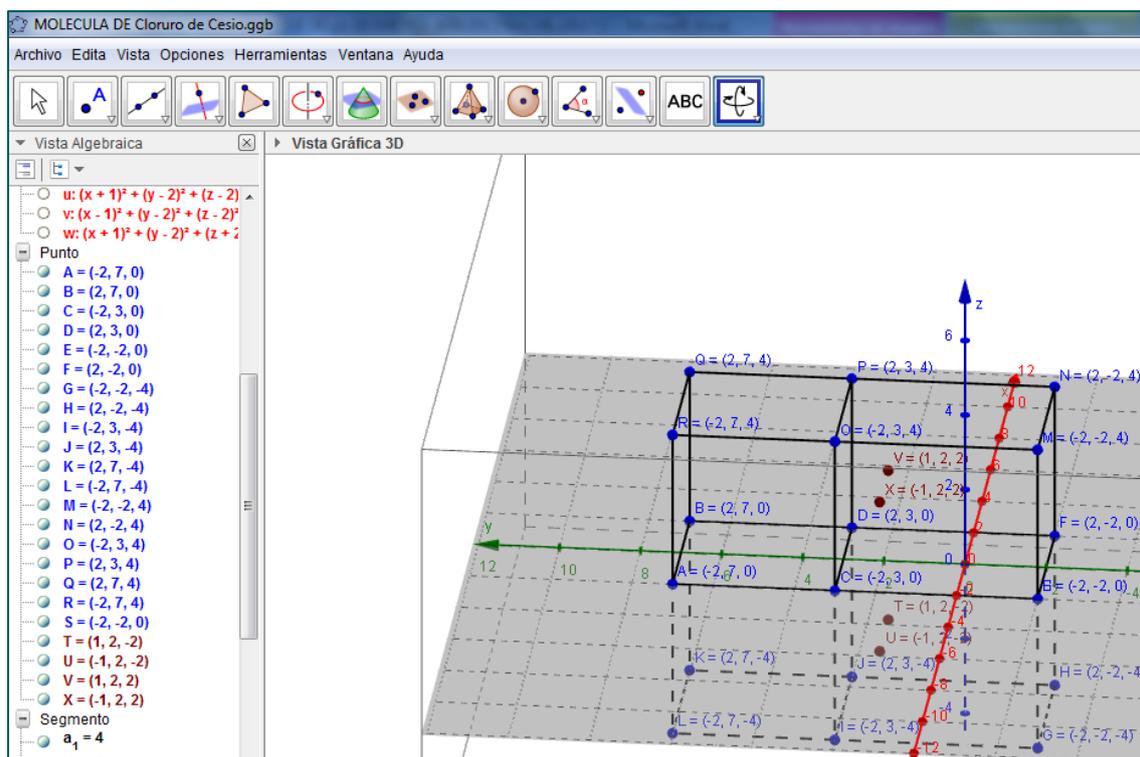


Figura 26. Puntos de la redícula del cloruro de cesio

Esta actividad engloba una gran variedad de casos de obtención de ecuaciones de rectas y planos usando condiciones (que pasen por determinados puntos, paralelismo, perpendicularidad, etc.), y del estudio de posiciones relativas.



De forma similar a la actividad 7, se podría plantear, entre otras, una actividad relacionada con los cultivos que se realizan en forma de rectas paralelas (Figura 27).



Figura 27. Los cultivos forman rectas paralelas

2.5. Otras propuestas: Actividades en el arte y con figuras geométricas

El uso de planos y rectas en las pinturas permite dar sensación de profundidad (Figura 28). Por ello, se pueden mostrar algunos ejemplos al alumnado y plantear también actividades en este campo. Una de ellas podría ser pedir a los alumnos la creación de su propia composición artística en GeoGebra 3D, utilizando rectas, planos y sus posiciones relativas. Podrían escribir diferentes ecuaciones obtenidas y preparar enunciados y respuestas con dicha composición.

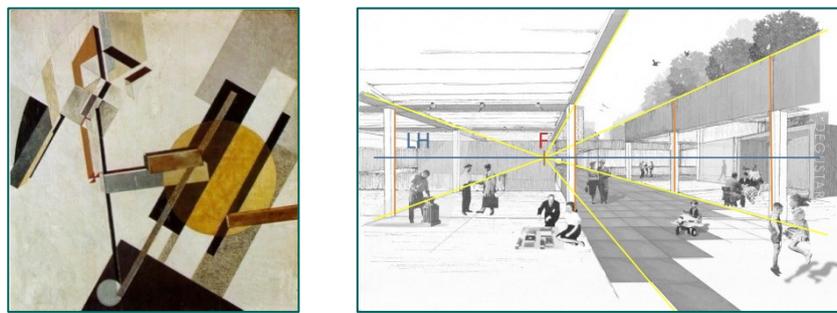


Figura 28. Las rectas y planos en el arte

Para enriquecer nuestras creaciones también podemos utilizar figuras geométricas espaciales, a las que se accede mediante el 9º icono de la barra de herramientas, donde encontraremos tetraedros, cubos y otros sólidos geométricos.

Estas figuras pueden servirnos para enunciar actividades con rectas y planos (Figura 29).

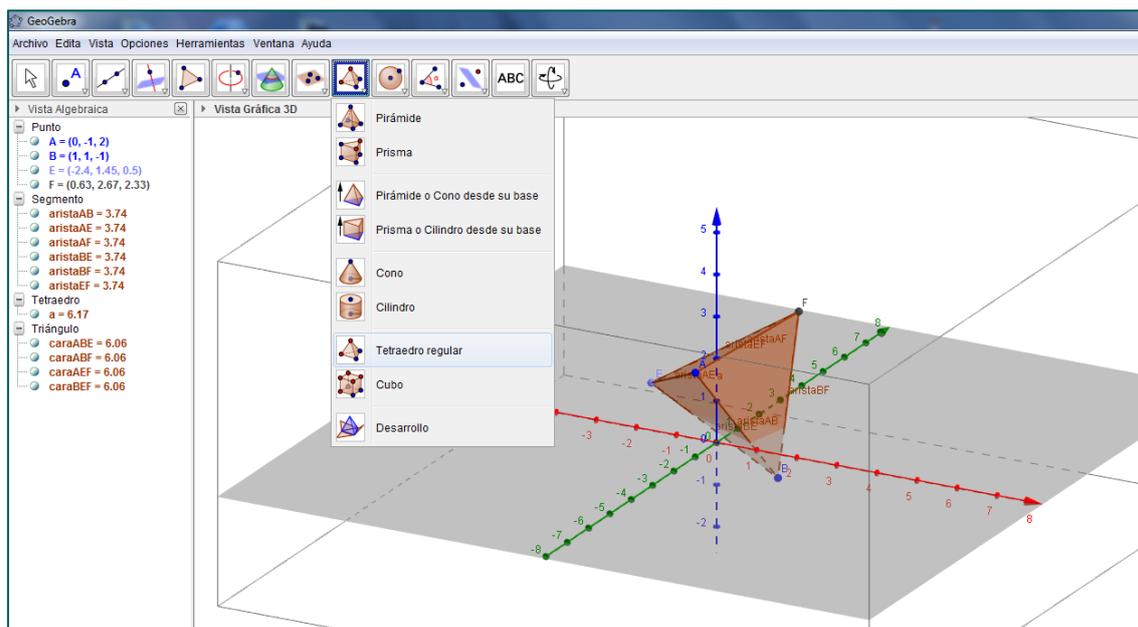


Figura 29. Ejemplo de un tetraedro regular

3. Conclusiones

En este artículo se han presentado actividades de *geometría* al nivel de Bachillerato, susceptibles de ser aplicadas a la realidad, con el objetivo de que el aprendizaje de estos contenidos se haga más cercano. Además, se ha mostrado cómo ejemplificarlas y hacerlas visibles a través de GeoGebra 3D. Es importante señalar que por el momento no es posible insertar imágenes en la vista gráfica 3D, al contrario de la vista gráfica 2D. Aun así, GeoGebra 3D tiene muchas ventajas, ya que permite visualizar las situaciones, de modo que sirve al profesor para plantear enunciados que luego puede contextualizar. Además, contribuye a la visualización de puntos, vectores, rectas, planos y sus posiciones relativas, de forma que los alumnos comprendan todos los casos posibles que pueden darse. Si algún alumno en concreto tiene problemas para imaginar una configuración geométrica (como sucede en muchas ocasiones con el estudio de la posición relativa de tres planos) el programa se convierte en un buen asistente para desarrollar su intuición espacial. Es también un software atractivo para el alumnado, puesto que le lleva a plantearse cómo resolver un problema haciendo uso de las distintas y variadas herramientas que ofrece (qué icono deben utilizar o qué comando deben introducir en la barra de entrada de GeoGebra). Y les permite combinar el razonamiento lógico, los conocimientos teóricos adquiridos y las características del programa, facilitando así la asimilación de contenidos y desarrollando una mayor comprensión de los mismos.

Anexo. Nota sobre el estudio de las posiciones relativas con GeoGebra 3D

El estudio de la posición relativa de dos rectas se realiza con el 2º icono en el apartado intersección y se seleccionan ambas rectas (ya sea en las ecuaciones de la vista algebraica o haciendo clic en cada una de ellas en la vista gráfica). En caso de que éstas se corten se obtiene el punto de intersección. En los casos de rectas coincidentes, paralelas, o que se cruzan, el icono intersección de GeoGebra devuelve en la vista algebraica: punto indefinido. Esto significa que no tienen intersección. Para distinguir entonces de cuál de los tres casos se trata, basta con usar el penúltimo icono de rotar la vista gráfica 3D. *Ejemplo:* dos rectas r_1 y s_3 se cruzan. Se observa punto A indefinido en la vista algebraica y las herramientas del penúltimo icono (rotar la vista, alejar por si fuera necesario, etc.).



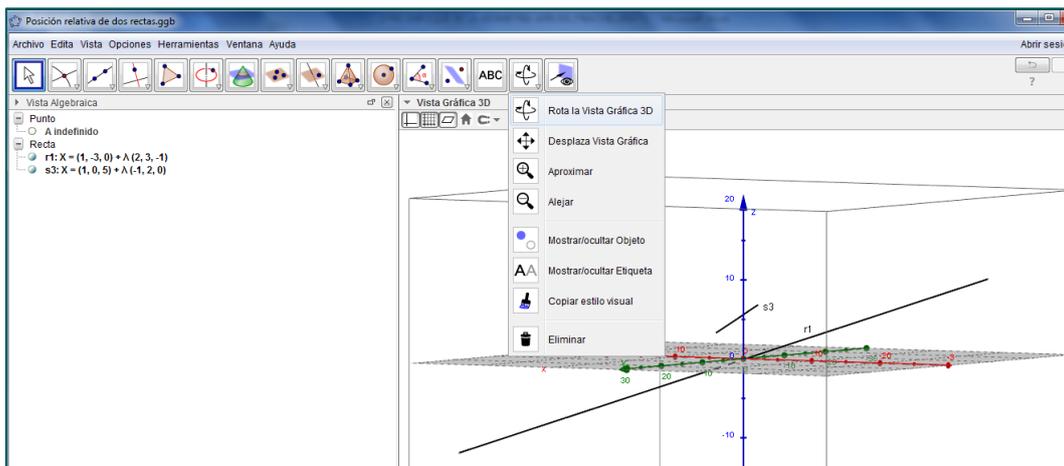


Figura 30. Posición relativa de dos rectas. Caso de rectas que se cruzan

La posición relativa de una recta y un plano se estudia con el 2º icono, “Intersección”. De este modo, cuando la recta y el plano se cortan en un punto se obtiene ese punto. Cuando la recta y el plano son paralelos o la recta está contenida en el plano, se obtiene punto indefinido, y la rotación de la vista gráfica 3D nos permite distinguir de cuál de estos dos casos se trata.

La posición relativa de dos planos se realiza por medio del 7º icono correspondiente a la intersección de dos superficies. Cuando ambos planos se cortan en una recta se obtiene la misma. Cuando los planos son coincidentes o paralelos se obtiene recta indefinida. Nuevamente la rotación de la vista gráfica 3D nos permite distinguir de qué caso se trata.

La posición relativa de tres planos engloba cuatro grandes casos: los tres planos se cortan en un punto, los tres planos son coincidentes, se cortan en una recta, y los tres planos no tienen ningún punto en común. La vista gráfica 3D permite observar todos los casos y obtener los puntos o rectas en caso de que se corten, a través de los iconos de intersección mencionados. Por ejemplo, a continuación se muestran tres planos que se cortan en un punto A.

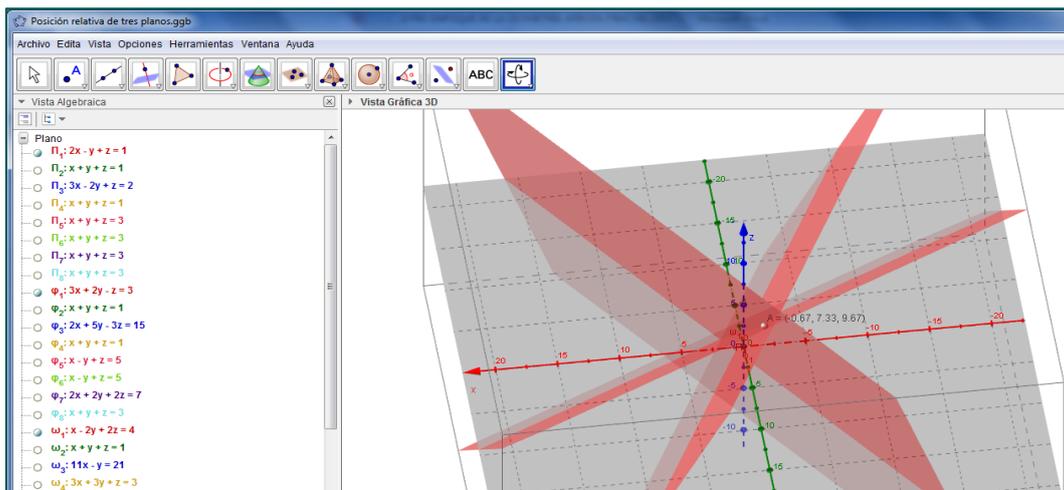


Figura 31. Posición relativa de tres planos. Caso de cortarse en un punto

Bibliografía

- Abellanas L., García J.C, Ontalba C. (1996, Madrid). *Matemáticas 2º Bachillerato Logse*. Mc Graw Hill.
- Bescós E., Pena Z. (2003, Madrid). *Matemáticas 2º Bachillerato. Ciencias de la Naturaleza y de la salud. Tecnología*. Oxford Educación.
- Nortes A., Jiménez P., Lozano F., Miñano A., Ródenaz J.A. (2003, Madrid). *Matemáticas 2º Bachillerato*. Santillana.
- Cólera, J., Oliveira, M.J. (2009, Madrid). *Matemáticas II, 2º Bachillerato*. Grupo Anaya.
- Ruiz M.J, Llorente J., González C. (2009, Madrid). *Matemáticas 2º Bachillerato*. Editex.
- Vizmanos J.R, Fernández J., Alcaide F. (2009, Madrid). *Matemáticas 2º Bachillerato. Ciencias y Tecnología*. SM.
- BOC (2008). DECRETO 202/2008, de 30 de septiembre, por el que se establece el currículo del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Canarias.
- Foro de GeoGebra. <http://forum.GeoGebra.org/>
- Proyecciones ortogonales en GeoGebra 3D
<http://recursos.cepindalo.es/mod/book/view.php?id=1131&chapterid=622>
- López M., Oltra N., Rodríguez R., Salas G. Estudio Analítico de Rectas y Planos en el Espacio. Unidad didáctica. Matemáticas II. (Descargado el 16 de marzo de 2015 en <http://euclides.us.es/da/apenmates/maes/2013-14/Unidad-11.pdf>).

Noelia Díaz García. Licenciada en Matemáticas por la Universidad de La Laguna. Máster en Formación del Profesorado de E.S.O, Bachillerato, F.P y Enseñanza de Idiomas.
Email: noe22_11@hotmail.com

