Rev. Acad. Canar. Cienc., XIX (Núms. 1-2), 95-120 (2007) (publicado en septiembre de 2008)

EL TEOREMA MATEMÁTICO. REFLEXIONES SOBRE LA HISTORIA Y LA NATURALEZA DE LA DEMOSTRACIÓN

Nácere Hayek
Universidad de La Laguna (Spain)
E-mail: nhayek@ull.es

"Sin las matemáticas no se puede penetrar a fondo en la filosofía; sin la filosofía no se puede penetrar a fondo en las matemáticas, y sin ambas, no se puede penetrar a fondo en nada"
G.W. Leibniz

Abstract
In this work a general overview about mathematical theorem and its meaning as a mathematical truth is given. The paper contains a number of reflections concerning the nature of the demonstration along with some remarks in relation to its history.

Resumen
En este artículo se expone una ojeada general sobre el teorema matemático y su significado como verdad matemática. El trabajo contiene un conjunto de reflexiones sobre la naturaleza de la demostración y una serie de acotaciones relacionadas con su historia.

1. Introducción. La verdad matemática y la crisis de fundamentos.

Durante siglos los matemáticos estuvieron plenamente convencidos de que el razonamiento deductivo no podía jamás reconducir a resultados inconsistentes, y calibraban los resultados de su ciencia por los teoremas que habían sido demostrados; un juicio convencional que se convirtió en una amalgama de dudas y contradicciones que duraría hasta los albores del siglo XX, con la aparición de las paradojas lógicas. Ya desde el siglo XVII, las matemáticas se habían encontrado en una situación de incertidumbre, y la inexistencia de unos correctos cimientos de esa disciplina condujo a un estado de fuerte confusionismo, que se dilató hasta las postrimerías del siglo XIX. En una visión retrospectiva, las dificultades lógicas atormentaron a los matemáticos durante los siglos XVII, XVIII y XIX, y los desarrollos que hubieron a partir de 1900 en la fundamentación de su disciplina con el firme intento de conseguir la verdad matemática apoyada en la lógica, fueron desconcertantes. Muchos ilustrados, sin embargo, seguirían creyendo que la matemática constituía un conjunto de verdades inquebrantables sobre el mundo físico y que el razonamiento matemático era exacto e infalible. Unos años antes del XX, ninguna de las ramas de las matemáticas estaba lógicamente asegurada. Carecían de exactitud en la demostración matemática y con el pesado lastre de confusiones y controversias existentes (en especial, en el área del análisis), se desencadenó un indispensable movimiento para una rigorización de las matemáticas. Los matemáticos recurrieron a un método especial [1], que fue el de demostración "deductiva" a partir de verdades autosuficientes denominadas "axiomas". Ese proceso axiomático de construcción de fundamentos de las matemáticas, debía dejar establecida la consistencia de todo sistema, es decir, que de los axiomas del mismo no se pudieran derivar teoremas inconsistentes. Si bien esa corriente encaminada a una axiomatización llevaría consigo más tarde graves problemas, el método axiomático fue proclamado como el más adecuado al despuntar el siglo XX. A pesar de todo, esto no fue óbice para que surgiera entre sus cultivadores, un conjunto de discrepancias (que perseveraría hasta nuestros días) y que involucró una vez más a los filósofos de la ciencia en el debate de una cuestión que afectaría al auténtico pilar de la matemática misma: el teorema matemático.

Ahora bien, incluso actualmente no existe acuerdo sobre qué es una demostración matemática correcta y lo probable es que una interpretación axiomática de cualquier rama de la matemática pudiera resultar inadecuada [2].

---

[1] Un método que consistía en asentar ciertas afirmaciones, usando inicialmente algunos términos indefinidos básicos y algunos términos de la lógica clásica.

[2] Hay que advertir que, ya en los albores del siglo XX, los seguidores del método axiomático sostuvieron que existe un "rigor matemático" absoluto que debe satisfacer toda deducción que pretenda ser válida. La rigorización, una necesidad que claramente se puso de manifiesto en el siglo XIX, revelaría un importante aspecto de la creación matemática. Como veremos seguidamente, hubieron otros grupos de matemáticos que no opinaban lo mismo, porque la historia les había mostrado que ese no era el caso, al quedar constatado que notables matemáticos clásicos (entre ellos, Gauss) habían cometido pecados contra el rigor. De hecho, su "intuición" les hizo reconocer en ocasiones a distinguidos matemáticos algunos resultados (y también conceptos) como absolutamente claros y evidentes.

Si nos ajustamos a los cánones del rigor moderno, ¿qué se puede decir hoy acerca de lo que es o debiera ser un teorema matemático? Dicho de otra manera, ¿qué se ha de aceptar y entender en la actualidad como prueba matemática? ¿Puede aceptarse como una demostración matemática, la que se obtiene, por ejemplo, con los insoslayables recursos de un ordenador?
Por otra parte y como es sabido, la metodología de la enseñanza conlleva la hipótesis hasta la conclusión, y tal proceso deductivo es lo que denominamos "prueba". Partiendo de esto, la prueba significa un argumento matemático deductivo [3] que inequívocamente demuestra la verdad de una "proposición" dada. La demostración de un enunciado es una prueba del mismo y las demostraciones matemáticas representan garantías de validez de las afirmaciones. Además y como dogma usual, una afirmación matemática que ha sido probada se llama teorema.

Debemos sopesar asimismo que, como ya se ha señalado, en las postrimerías del siglo XIX, grandes matemáticos dieron comienzo a una batalla para estudiar con más cuidado y rigor unos nuevos cimientos básicos de las matemáticas. Durante un período de más de treinta años (1895-1930) se crearon varias escuelas de pensamiento, que trataron de encerrar a las matemáticas dentro de los límites de la lógica humana, y dió lugar a las concepciones filosóficas conocidas como *logicismo*, *intuicionismo* y *formalismo* [4]. Afrontando diatribas y controversias, estas escuelas adoptaron posturas distintas, esforzándose cada una de ellas en hacer prevalecer sus puntos de vista sobre las restantes. Al no haber unanimidad en las aproximaciones de los fundamentos ideadas por las escuelas en torno al propio significado de lo que son matemáticas correctas, se produjo el curioso hecho de que cualquier matemático adoptara la aproximación que más le atrajera. El problema fundamental se concentró en establecer la

---

[3] Como se tiene reconocido, los argumentos se dividen en dos clases: deductivos e inductivos. Las premisas de los argumentos inductivos requieren razones (quizás a veces, incompletas o parciales) como pilares básicos de la conclusión. En las ciencias, los argumentos son generalmente de este tipo y la aceptación de premisas conducen a la conclusión más razonable .En cambio, un argumento deductivo requiere para su conclusión, la estricta necesidad de las premisas. Una prueba matemática es un argumento deductivo.

[4] Todas las concepciones filosóficas habituales se han basado fundamentalmente en un concepto intuitivo inmerso en nuestra mente, y ninguna de ellas trató de explicar la naturaleza y significado de la intuición que postularon. "A priori, el uso por los matemáticos de la propia palabra intuición, conlleva misterio y ambigüedad(…); a veces, representa una noción escurridiza que simula ser una sustituta ilegítima y aventurada de la demostración rigurosa". Para detalles, véanse sugestivos listados interpretativos de significados y giros de esta enigmática y voluble noción, en P. Davis y R. Hersh, *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston 1981, caps. 7 y 8.

consistencia de varias ramas de la matemáticas que habían sido axiomatizadas, es decir, que sus axiomas no pudieran llevar a contradicciones. El esfuerzo realizado por las escuelas durante el primer cuarto del siglo XX, para eliminar estas últimas y garantizar la consistencia, dio lugar a un cúmulo de incredulidades que sacudiría el curso de la historia de la ciencia, y que representó un hito importante conocido más tarde como "crisis de fundamentos".

Antes de exponer un breve y necesario análisis de las tres concepciones precedentes, conviene agregar que, tras el confusionismo del siglo XIX, tuvo una gran influencia sobre estas corrientes filosóficas un grupo histórico de la Grecia clásica, que fue el del "platonismo" encabezado por Platón (427-347 a. C.), cuya posición filosófica subraya la intuición [5]; como asimismo que, muchos siglos después, el filósofo alemán Emmanuel Kant (1724-1804), con una metafísica que era continuación de la herencia platónica, dejaría una marcada huella en las matemáticas que se prolongó hasta los inicios del siglo XX. Manifiestamente, sería Kant quien asignó mayor importancia al papel de la intuición en lo que llamamos conocimiento [6].

La primera de las escuelas citadas, la *logicista*, desarrolló su concepción filosófica en una monumental obra debida a los grandes artífices ingleses B. Russell (1872-1970) y A. Whitehead (1861-1947) [7]. Su tesis, enunciada brevemente, se reducía a que todas las matemáticas son derivables de la lógica. La tesis sostenía, entre otros y muy en especial, un tipo de argumentación, adoptado como "principio" característico denominado

---

5 Una intuición geométrica y física que se ubicaría simultáneamente en la investigación, la enseñanza y el desarrollo de las matemáticas. Según Platón, el llamado mundo de la experiencia nada tiene de real. "Somos como moradores de una cueva, que perciben las sombras del mundo exterior y confunden las sombras con los objetos reales (*La República*)". Nada se puede inventar, todo está ya presente y todo cuanto se puede hacer es descubrir. Algunos objetos matemáticos que se hallan fuera del espacio y del tiempo, no son ni físicos ni materiales.

6 Kant creía que las matemáticas estaban fundadas sobre una intuición pura, no sobre el pensamiento. El dogma principal kantiano se basaba en sus ideas sobre intuición (interna) del tiempo y (externa) del espacio, en el *conocimiento "a priori"*: la del tiempo, en la noción de sucesión, y la del espacio sustentada en la geometría (no hay que olvidar que, ya desde Platón, las matemáticas significaron "geometría" y la filosofía de las matemáticas sería "la filosofía de la geometría"). La comprensión del fenómeno del conocimiento intuitivo, ha sido siempre un problema fundamental de la epistemología matemática. En realidad, si se contemplaran las matemáticas a través de su desarrollo histórico, se tiene que introducir una misteriosa intuición que cubriera el vacío que existe entre la descripción formalista (de la que nos ocupamos seguidamente) y la experiencia real que cada uno tiene de las matemáticas.

7 *Principia Matemática,* Cambridge Univ., N. York, 3 vols. (1910-1913).

proceso de inducción completa, que luego fue cuestionado, al no ser posible deducir de un número limitado de inferencias, un número infinito de conclusiones [8]. La segunda de las escuelas, la *intuicionista*, desafió el encadenamiento en la lógica apoyándose en que la única fuente de conocimiento matemático no es más que la intuición, una facultad indispensable de conexión entre la consciencia humana y la realidad matemática. Esta escuela fue fundada (1908) por el matemático holandés E. L. Brouwer (1881-1966), cuya doctrina consideraba sólo matemática genuina la dada por una intuición obtenida mediante una construcción finita de ciertos objetos primitivos. Sus adeptos, en unión de otros matemáticos con puntos de vista próximos, constituyeron el grupo de los "constructivistas". Brouwer, consciente seguidor de Kant y de su filosofía idealista, sabía hasta qué medida se podía confiar en la intuición, asumiendo que los números naturales representaban la noción fundamental dada por nuestra intuición (imposibles de reducir a otra noción más básica), para constituir el punto de arranque de todas las matemáticas. Entre los constructivistas hubieron no obstante, disensiones sobre su manera de proceder, al fundarse exclusivamente en una intuición universal e inconfundible [9]. Los principales oponentes de la tesis intuicionista, fueron los seguidores de la tercera de las escuelas, la *formalista* de D. Hilbert (1862-1943) que había definido a las matemáticas como la ciencia de la demostración rigurosa. Hilbert tenía una confianza ilimitada en el poder de la razón y la inteligencia humanas y a tenor de su concepción filosófica, ni el logicismo ni el intuicionismo probaban la consistencia. En 1915 emprendió un programa de restauración de las matemáticas, formulando durante la década de los 1920 su propia aproximación de los fundamentos con unas bases axiomáticas de la lógica, cuyo propósito era probar la consistencia de cualquier sistema formal. Los sistemas formales ideados por

---

[8] El principio fue contemplado en muchas ocasiones como un misterio inescrutable. Existían problemas en que la palabra "todos" al referirse a conjuntos infinitos, adquiría cierta significación que complicaba el uso de la inducción matemática. El método de inducción implica un número infinito de razonamientos y como ningún principio lógico abarca un número infinito de razonamientos, aquel método no podía ser deducido de tales principios. Consecuentemente, sería imposible probar la consistencia de los fundamentos en las matemáticas. El principio de inducción completa, que había sido demostrado mediante el axioma de reducibilidad de la teoría de tipos (*Principia,* 2ª ed., 1926), tuvo que ser reformulado. Aún hoy, la naturaleza de este principio se mantiene en discordia.

[9] Creían en objetos reales (ideales en su construcción) que se intuían sin saber por qué. Si bien, según Brouwer, las ideas matemáticas más sencillas se encuentran implícitas en el pensamiento corriente de nuestra vida cotidiana, el dogma de que el sistema de números naturales sea universal se resquebrajaría ante la experiencia histórica, pedagógica y antropológica.

Hilbert consistían en un alfabeto de símbolos con una gramática que especifica cómo han de combinarse para explicitar las afirmaciones y un nuevo campo, la metamatemática[10], para examinar "a priori" el alcance que podían tener las demostraciones matemáticas. Para Hilbert, o se tiene demostración, o no se tiene nada. No existen objetos matemáticos. Su matemática consiste estrictamente en axiomas, reglas, definiciones y teoremas.

Una escueta visión de lo que se propusieron dichas escuelas podría interpretarse del modo siguiente:
La lógica representó una complicada estructura que era difícil identificar con la lógica entendida como "conjunto de reglas para un razonamiento correcto"[11]. La pretensión de que las matemáticas no eran sino lógica (una lógica intuitiva, lo que podía interpretarse que no significaban más que una inmensa tautología), se llegó a plasmar en una realidad inevitable. Más concisamente, las concepciones logicista y formalista, tratando de hacer más seguras las matemáticas, las transformaron en una tautología; algunas de sus premisas fueron compartidas por los constructivistas, otras nó [12]. Al final, los lógicos (nada satisfechos) siguieron desconcertados, los científicos naturales aceptaron sólo la evidencia y los matemáticos exigieron mayor rigurosidad en las demostraciones. En resumidas cuentas, con cualquiera de aquellas filosofías, era presumible que se corriese el riesgo de llegar a una contradicción.
Quienquiera que se pusiese a hurgar en los fundamentos de las matemáticas, asumiría pronto que lo que se requería realmente para los niveles de rigor, era una mayor austeridad. "¿Dónde se podría encontrar unas bases la mitad de firmes, para cualquier cosa que tratara de fundamentarse?"[13]. En definitiva, tras los esfuerzos realizados en el desarrollo de los fundamentos,

[10] La escuela formalista tiende a identificar la matemática con su concepción formal abstracta, y a la filosofía de la matemática con la metamatemática (o "teoría de la demostración"). Esta última podía evitar círculos viciosos y eliminar inconsistencias, dentro de un programa que señalaría el cambio al método axiomático moderno donde los axiomas no son considerados como verdades autoevidentes.

[11] "El conjunto lógico-matemático no puede ser considerado como el lenguaje adecuado y necesario para la ciencia, ni como *una* de las ciencias. A decir verdad, es la Ciencia misma" (W.V. Quine, *Mathematical Logic*, Cambridge, Massachussets, Harvard Univ. Press, 1951 (versión castellana, Madrid, Rev. *Occidente*, 1973).

[12] P. Davis y R. Hersh, **ibid.**, cap. 7, p. 333.

[13] W.V. Quine, *Los fundamentos de la matemática* (en"Mathematics in the modern world", versión española "Matemáticas en el mundo moderno", Edit. Blume, Madrid, 1974 -p. 215 -; una antología en la que se presenta una colección de trabajos de importantes autores).

el estado de las matemáticas sería desconcertante. En lugar de un cuerpo único universalmente admirado de las matemáticas, dotado de un envidiable razonamiento sólido (incluso aceptando a veces alguna enmienda en sus demostraciones), lo conseguido sólo fue unas aproximaciones a las matemáticas que siguieron en conflicto. Con las posiciones divergentes y contrapuestas que surgieron incluso dentro de cada una de las escuelas, no lograron ser fiables del todo las posteriores y recientes investigaciones habidas sobre los fundamentos, que llegarían a traspasar fronteras sin descubrir nada nuevo.

En un interesante y reciente artículo de carácter expositivo, Solomon Feferman [14] (autor de numerosos trabajos de lógica matemática, de historia y de los fundamentos de las matemáticas) afirma en uno de ellos, que "la más cruda diferencia entre el punto de vista matemático y el del lógico, concierne a los fundamentos de las matemáticas". En otro de esos trabajos remarca también que "el objetivo de una teoría lógica, es dar un modelo de razonamiento del matemático (sea platónico o bien constructivista) *idealizado*"; y en cuanto al uso de los sistemas formales por parte de algunos lógicos que se autodenominan formalistas, se debe a que consideran que en el seno de aquellos sistemas, queda mejor diseñada su propia actividad[15] . Fefferman dejó patente que: "En su trabajo el matemático se fía de intuiciones vagas y sorprendentes, y da marcha atrás a tientas en demasiadas ocasiones. Es significativo que, en su forma actual, la lógica sea incapaz de dar una descripción directa ni del desarrollo histórico de las matemáticas ni de la experiencia cotidiana de los profesionales; y queda igualmente claro que la búsqueda de unas fundamentaciones definitivas a través de los sistemas formales, ha fracasado en llegar a conclusión convincente alguna"[16]. Como alguien ha dicho, las reconstrucciones racionales de los fundamentos sólo significaron una parodia de la historia.
Entre otros grandes matemáticos que enjuiciaron lo que produjo la crisis de fundamentos, estimamos de interés añadir los curiosos e interesantes extractos de lo que escribieron algunos de ellos:
Félix Klein (1849-1925), jefe del departamento de Matemáticas durante el primer cuarto de siglo en la universidad de Gotinga (por entonces centro

[14] "Does Mathematics needs new axioms?", *The American Mathematical Monthly,* **106** nº 2, 99-111 (1999), p. 99.

[15] S. Feferman, *What does logic have to tell us about to mathematical proofs?* , The Mathematical Intelligencer, **2**, 20-24, 1979.

[16] *The logic of mathematical discovery vs. The logical structure of mathematics*, in PSA, 1978, vol. 2, 309-327, Philosophy of Science Assoc., East Lansing, 1981. Consúltese P. Davis y R. Hersh, **ibid,** cap. 7.

mundial de las matemáticas), dejó escrito que a causa de la profundizada comprensión crítica, "hoy en día estamos menos seguros que en cualquier otro tiempo, de los fundamentos últimos en los que se basa la matemática"[17] ; y tras su descripción acerca del desarrollo de las matemáticas, expuso en páginas posteriores, algo que sería luego confirmado por la historia: "De hecho, las matemáticas [han] crecido como un árbol, que no parte de sus finas raícillas y crece simplemente hacia arriba, sino que más bien hunde sus raíces cada vez más profundamente, al mismo tiempo y a la misma velocidad, con que sus ramas y hojas se extienden hacia arriba [...]. Vemos pues, que por lo que respecta a la investigación sobre los fundamentos de las matemáticas, *no existe un final, y asimismo que, por otra parte, no existe un comienzo*".

R. von Mises (1882-1953), destacado matemático y brillante representante de la filosofía positivista, captaría una especial atención en el mundo científico con su trabajo sobre la formulación axiomática de una disciplina como la matemática, en el que incluía al propio tiempo, una interesante valoración de imperfecciones de las tres principales interpretaciones de los fundamentos de la misma. Tras su excelente análisis sobre las precedentes escuelas de pensamiento, afirmaría [18] : "Las matemáticas en su conjunto, como cualquier otra ciencia, tiene una parte tautológica y un aspecto empírico. Difiere de las demás ciencias en que su aspecto formal es mucho más esencial y decisivo que en cualquier otra. Y así resulta comprensible que la matemática se haya identificado frecuentemente con su parte tautológica". Su conclusión final sería que "ninguna de las tres formas de fundamentación de las matemáticas pudo conseguir racionalizar completamente la relación entre los sistemas tautológicos y las experiencias (extramatemáticas), que es su verdadero objeto; esto es, ninguna fue capaz de hacer de esa relación una parte del sistema matemático mismo".

Morris Kline, profesor de matemáticas en la Universidad de Nueva York, notable investigador y más conocido por sus diversas obras sobre historia de las matemáticas, describió en el prólogo de una de ellas [19], una original y más bien curiosa definición, al expresar que "las matemáticas en sí misma,

---

[17] Félix Klein, *Matemáticas Elementales desde un punto de vista superior*, C.S.I.C, Nuevas Gráficas, Madrid, 1931. La famosa descripción de la matemática, expresada por Klein como "la ciencia de las cosas que son evidentes por sí mismas", estuvo de moda durante varias décadas y causaría gran impacto por su profundo sentido; no obstante, digamos de paso que, al igual de la gran mayoría de las otras descripciones habidas para definir las matemáticas, daría muy poca información sobre su naturaleza real.

[18] *Los postulados matemáticos y el entendimiento humano*, SIGMA (El mundo de las matemáticas), Edit. Grijalbo, Barcelona-México, 1969, vol. **5**, p.142.

[19] M. Kline, *Mathematics in the modern World* (Nota pie 13 anterior).

es un esqueleto; su carne y sangre consiste en lo que se hace con ellas". En otro contexto y refiriéndose a la famosa crisis de fundamentos (que duraría algunas décadas y ya ha sido sobrepasada), consideró irónicamente que se podía resumir en una escalofriante historia: "A orillas del Rhin, un hermoso castillo se había mantenido en pie durante siglos. En los sótanos del castillo, las industriosas arañas que lo habitaban, habían construido una tupida red de telarañas. Un día sopló un fuerte viento y destruyó la red. Las arañas se pusieron a trabajar frenéticamente para reparar el daño. Creían que eran sus telarañas las que mantenían en pie su castillo"[20].

2. Acotaciones sobre la naturaleza de la demostración y el papel de la intuición.

La noción de demostración fue situada alrededor del 500 (a. C.) por E.T. Bell [21], quien añade también que las demostraciones son las cadenas que sujetan a la razón humana desde hace más de 2300 años.

Ninguna de las demostraciones habidas en ciertas épocas, resultaron ser definitivas. Algunos contraejemplos socavaron y en varias ocasiones resquebrajaron, viejas demostraciones. La historia de las matemáticas evidencia además que en ninguna de sus épocas cruciales, se consideró que había llegado la hora de un examen crítico de la demostración.

El advenimiento (a principios del siglo XX) de las precedentes concepciones filosóficas matemáticas opuestas entre sí y el trepidante antagonismo que se viviría entre sus bandos, originó tal desconcierto y tan numerosos escepticismos, que fomentaron muchas incredulidades sobre la idea de demostración.

"En cualquier tiempo han existido matemáticos que tildaron algunas demostraciones de algunos de sus predecesores o de sus contemporáneos, de *poco rigurosas* y a menudo, las que propusieron para sustituirlas fueron consideradas a su vez insuficientes por la generación siguiente. Esto impedía que llegara el momento de alguna demostración exenta de toda posible crítica"[22].Ningún matemático purista podría debatir la declaración tautológica de que "el lugar del rigor en matemáticas reside en las mismas matemáticas"[23] .

La mayoría de las frases de alabanza con las que se ha ponderado el concepto de demostración matemática que aparecen en algunos textos

---

20 M. Kline, *La pérdida de la certidumbre,* Edit. Siglo XXI, Madrid, 1985, p. 335.

21 *The search of truth*, American Mathematical Monthly, **41**, 599-607 (1934).

22 J. Dieudonné, *En honor del espíritu humano*, Hachette 1985, Alianza Edit., Madrid, 1989, p.318.

23 E.T. Bell, *American Mathematical Monthly*, **ibid**, p. 600.

modernos, como por ejemplo el de P.Davis y R.Hersh [24], al matizar que "la demostración, da una comprensión más profunda al revelar el alma de un problema; y en los mejores casos, la demostración es una rúbrica definitiva, un sello postrero de autoridad, una especie de energía matemática o de tensión eléctrica que da vida y dinamiza los estáticos enunciados de los teoremas", estimamos que pertenecen a una clase de descripciones que inclina más bien a entrar en una historia más completa del rigor o, al menos, en asimilar con cautela la suprema dificultad que conlleva una construcción rigurosa del edificio de las matemáticas [25].
En la creación matemática, más que en mostrar demostraciones rigurosas, la mayoría se contentaron con una mera indicación de la demostración. El clima reinante en aquel tiempo, era en general, que únicamente podían existir demostraciones "rigurosas" en el seno de una teoría axiomática. La axiomatización de las matemáticas representó un serio problema que inquietó a la mayoría de sus practicantes, quienes al comenzar a sentirse en una posición incómoda, desencadenaron un movimiento para eliminar dudas y contradicciones, insistiendo a su vez en explicitar definiciones y demostraciones intuitivamente evidentes. Una situación que se tornó complicada, porque nadie se había antes percatado de que todo lo que estaba ocurriendo fue simplemente debida a que se aferraron a la intuición de la mente humana[26]. Si bien se presentaron graves obstáculos, que se acusaban en mayor grado con la reincorporación de algunas nociones descartadas que serían luego base de teorías provechosas, la intuición acabó por considerarse necesaria para la comprensión de las matemáticas[27] y llegaría a jugar un papel histórico esencial en la evolución de esa ciencia para que pudiera desarrollarse lógica, sistemática y rigurosamente [28]. Sucederían, no

---

24 P.Davis y R. Hersh, *The Mathematical Experience*, **ibid,** cap. 4, p. 151.

25 El propio concepto de rigor está definido intuitiva y no rigurosamente. En ciencia y filosofía, nuestro sentido común es sinónimo de la intuición. Ahora bien, si lo intuitivo se considera lo opuesto a lo riguroso, parece significar falto de rigor. Quizás muchos piensen que se trata de un juego de palabras.

26 M. Kline, *La pérdida de la certidumbre,* **ibid,** cap. 9, p. 258.

27 "Casi todo el mundo sabe que cuando se asciende a una montaña, se va notando cada vez más la pureza de la atmósfera, y pudiera creerse que si se ascendiese indefinidamente, el bienestar que se experimenta es cada vez mayor; esto, sin embargo no ocurre, ya que por el contrario, existe un límite de altura, pasado el cual, la vida humana se hace imposible. Análogamente, puede decirse que, en la ascensión de los lógicos hacia la pureza científica., eliminando (en lo posible) la intuición, se encuentran innegables ventajas, pero sólo hasta un cierto límite que no puede ser sobrepasado, sin que el excesivo predominio de la lógica sobre la intuición, produzca la esterilidad del razonamiento" (Félix Klein, **ibid.**, p. 308).

28 Más adelante, H. Poincaré en su artículo *Mathematical discovery* (Science and Method, Dover Publ., N. York,1952) que contiene un material anecdótico, realizó un análisis del

obstante, rechazos imprevistos. El especialista noruego Thoralf Skolem (1887-1963) descubrió nuevos fallos en la estructura de las matemáticas, renegando desde 1923 del método axiomático como fundamento de la teoría de conjuntos, a quien luego se uniría uno de los matemáticos más grandes del siglo, John von Neumann (1903-1957), al suscribir que algunos axiomas de aquella teoría conllevaban ciertamente un sello de irrealidad; este matemático publicaría (1927) un famoso artículo, conjeturando que apremiaba probar cuanto antes que la lógica se encontraba liberada de contradicciones. Su repercusión ocasionó nuevas incertidumbres, y hubo de vivirse entonces un período conflictivo, en el que para una gran parte de matemáticos la intuición resultó ser engañosa, exponiendo incluso en muchos casos la seguridad de la misma. Destacados especialistas atribuyeron el desconcierto a ciertos objetos matemáticos misteriosos, que fueron considerados como monstruos [29]. En un famoso ensayo, el lógico y matemático Hans Hahn (1879-1934), uno de los más brillantes del Círculo (positivista) de Viena (maestro de Gödel y alumno de Hilbert)), utilizó una buena parte de ellos para arremeter duramente en contra del concepto de intuición [30], en el cual se aludía a proposiciones matemáticas que habían sido aceptadas como ciertas por intuición y que luego se probaron falsas por lógica. Unas proposiciones que crearon tal escepticismo que hizo quebrar las bases de toda disciplina matemática que se apoyara en convicciones intuitivas. Al igual que Hans, una gran mayoría de científicos demandaron que cualquier prueba matemática debería llevarse a cabo mediante recursos estrictamente lógicos. En el mundo ilustrado se exigió de inmediato la expulsión de la intuición del razonamiento matemático y se pidió la completa formalización de las matemáticas. Una pesada tarea para reducir

---

papel de la intuición en el proceso creativo. Para más amplia información, véase también la excelente obra de J. Hadamard, *The Psychology of Invention in Mathematical Field* (Princeton, 1949).

[29] "A veces, la lógica produce monstruos", advirtió Poincaré en *Science et Méthode* (1908). Por otra parte y como se sabe, una definición abrevia muchos teoremas; y en las exposiciones "rigurosas", las definiciones rara vez mencionan los monstruos que nos han llevado a las mismas. La palabra *monstruo* era una consecuencia directa de contraejemplos de funciones "patológicas" y de figuras (indicando fallos de la intuición visual) que desafiaban conceptos topológicos intuitivos (curva continua sin tangente en ninguno de sus puntos,...) surgidos en la segunda mitad del siglo XIX para una fundamentación rigurosa del análisis y su aritmetización. La palabra fue muy popularizada muchos años después en la excelente obra de I. Lakatos, *Pruebas y refutaciones:La lógica del descubrimiento matemático*, Cambridge Univ. Press (eds. J. Worrall y E.G. Zahar), 1976 (edic. castellana, Alianza Univ. Ed., **206**, 1978).

[30] H. Hans rechazó el recurso a la intuición para ampliar la visión de algunas áreas de las matemáticas (*La crisis de la intuición*, SIGMA, El mundo de las matemáticas **5,** 342-362 (Grijalbo, Barcelona, 1969).

las matemáticas a la lógica, que resultó ser ardua y difícil, por significar nada menos que una reforma de todas sus ramas y raíces[31].

3. El problema de la consistencia.

La enconada disputa de las anteriores escuelas filosóficas de pensamiento, culminaron en la década de 1930 con la definitiva destrucción del sueño de Fausto de todo matemático; la de probar que su ciencia se encontraba libre de contradicciones. Sería en 1931, cuando un joven matemático de escasamente unos 25 años, Kurt Gödel (1906-1978), rompió la inexpugnabilidad de la verdad matemática con un teorema de incompletitud, que mostraba la existencia de verdades matemáticas imposibles de demostrar dentro del marco axiomático en el que se encontraban situadas. El teorema asestó un terrible golpe a las esperanzas de axiomatización, porque puso de manifiesto que una prueba de la consistencia lógica de cualquier aproximación a las matemáticas era, de todo punto, imposible. Conclusión que conllevaba no poderse probar la consistencia de ninguna aproximación adoptada por logicistas y formalistas (e incluso por el grupo de los conjuntistas seguidores de Cantor [32]), mediante principios lógicos seguros. Los resultados demoledores de Gödel rompieron el espejismo de la verdad matemática y destruyeron el concepto clásico de la noción de demostración matemática, poniendo en entredicho la propia naturaleza de esta última. Desarrollos posteriores al crucial año de 1931, no hicieron más que complicar la situación, frustrando además cualquier intento de definir las matemáticas y de lo que significaban resultados correctos [33]. Los únicos matemáticos que desde ese año se mantuvieron serenos e incluso algo indiferentes, fueron los intuicionistas. En su filosofía, las demostraciones formales eran innecesarias e irrelevantes, en base a que la intuición humana era lo suficientemente poderosa para decidir la veracidad o falsedad de cualquier proposición significativa (o que tuviera sentido). Pensaban

---

[31] P. Davis y R. Hersh, *The Mathematical Experience*, **ibid** . Véase también Solomon Feferman, *Mathematical Intuition vs. Mathematical Monsters*, Twentieth World Congress of Philosophy, Boston MA (1998), para más detalles.

[32] Las discrepancias surgidas involucraron duros debates en torno al fundamental concepto de conjunto. En particular, W. H. Thurston (medalla Fields, 1982) enfatizaría más adelante que "la teoría de conjuntos se basa en mentiras corteses, en cosas sobre las que estamos de acuerdo, aunque sabemos que no son verdaderas", añadiendo "en cierto sentido, la fundamentación de las matemáticas tiene un aire de irrealidad". (*On proofs and progress in mathematics*, Bull. Am. Mat. Soc., **30**, 161-177 (1994))

[33] Con el trabajo de Gödel se generaron nuevas ramas de estudio en la lógica matemática, que provocarían una reconsideración de la filosofía matemática y más aún, de las filosofías del conocimiento en general.

simplemente en las matemáticas como algo que crece y se desarrolla, y siguieron luchando con las demostraciones de existencia "mediante construcciones finitas (sin tener siquiera en consideración que el conjunto R, ni ningún otro conjunto infinito pudieran ser obtenidos de tal manera)".
G. H. Hardy (1877-1947), uno de los matemáticos más distinguidos de la época, consideró que "las demostraciones constituían más bien las fachadas de las columnas que soportan la estructura matemática", y afirmaría abiertamente (1928): "estrictamente hablando, la demostración matemática no existe"[34] . También A.N. Whitehead y algunos otros, atacaron el valor de la demostración; más concretamente, otro destacado matemático R. L. Wilder (1896-1982), declararía que "la demostración es un proceso de comprobación que aplicamos a lo que la intuición nos sugiere". Wilder, le restó asimismo importancia a la misma cuando expresó (1944): "[...] No poseemos un criterio de demostración que sea independiente del tiempo, y de lo que se prueba, ni de la persona o escuela de pensamiento que lo utiliza [...]. Lo más sensato es admitir que, en general, no existe la verdad (**la demostración**) absoluta en matemáticas [...]. La demostración, el rigor absoluto, son quimeras [...]. No existe una definición rigurosa de rigor". En la actualidad, las demostraciones absolutas no constituyen otra cosa que una meta que se indaga, aunque probablemente jamás se logre alcanzar. Para el intuicionista H. Weyl (1885-1955), "las matemáticas no son un cuerpo de conocimiento exacto. Lo mejor es contemplarlas desde un punto de vista histórico"[35]. Para el filósofo y lógico Ludwig Wittgenstein (1889-1951), la fuerza expresiva de la demostración está subrayada con el fiel y desconcertante consejo, "si quieres saber lo que dice una demostración matemática, observa lo que su demostración demuestra". En la lógica formal como ciencia o teoría (sistema de teoremas) en donde se plantea el tratamiento de los teoremas de la lógica y el sentido de la veracidad de los mismos, Wittgenstein sostiene que "las verdades formales no afirman nada ni se refieren a nada; son tautologías que consisten en decir de varios modos una misma cosa"[36] .

---

[34] Hardy, si bien sentía un gran respeto por la exigencia de pruebas formales de los lógicos, al querer caracterizar la prueba matemática con la que están familiarizados los profesionales, lo hizo expresándose así: "Estrictamente hablando, no existe eso de prueba matemática (...) en última instancia son lo que Littlewood y yo denominamos *gas*, florituras retóricas orientadas a afectar psicológicamente (...) para estimular la imaginación de los alumnos".

[35] R.L. Wilder, *The nature of mathematical proof*, Univ. Michigan (1944), 309-323. Para más detalles, véase M. Kline, *La pérdida de la certidumbre*, **ibid**, cap. 14.

[36] M. Sacristán, *Introducción a la lógica y al análisis formal*, Edic. Ariel S.A., Barcelona(1964), p. 25.

En definitiva, resultó muy complicado saber lo que requirieron de la intuición, las anteriores corrientes y escuelas filosóficas de pensamiento. Se llegó al extremo de que la intuición provocara nada menos que la gran dificultad de exigir que las matemáticas fueran infalibles[37] , exigencia que fue ante todo afrontada por las dos filosofías del platonismo y del formalismo. En ese aspecto, la dificultad mayor se le planteó principalmente a los platonistas: ¿de qué modo establece contacto la mente humana con ese mundo de objetos matemáticos, para ellos ideal e inmaterial? La postura de los *formalistas* fue diferente. Para sus seguidores, la interpretación platónica no tenía sentido alguno. Eludieron referirse a la intuición, en tanto en cuanto las matemáticas fueran definidas tan sólo como deducciones extraídas de axiomas y teoremas formales. Para el formalista, el único modo de eliminar la intuición, era concentrarse en un refinamiento irrefutable de sus demostraciones. La debacle que produjo entre los matemáticos el trabajo de Gödel sobre la incompletitud y la imposibilidad de probar la consistencia, no había sido del todo asimilada, y unos quince años después nuevas conmociones amenazaron el curso de las matemáticas, sumiéndolas en una mayor confusión acerca de lo que se debería comprender como unas matemáticas <u>sólidas.</u> Se configuró entonces un formalismo contemporáneo, que era descendiente del hilbertiano, si bien no sería justamente lo mismo. La exposición de estos formalistas alcanzaría su mayor repercusión en la segunda mitad del siglo XX, a través de la extraordinaria obra de varios volúmenes (el primero de los cuales fue publicado en 1939) debida al grupo de matemáticos franceses Nicholas Bourbaki, con una acusada sumisión al método axiomático que le permitía adoptar una actitud "realista" para los fundamentos de las matemáticas. Uno de sus representantes, A. Lichnerowicz (1915-1998), llegaría a afirmar [38]: "Las demostraciones de los que nos precedieron no nos satisfacen, si bien han permanecido los hechos matemáticos que descubrieron. Nosotros los demostramos por métodos más rigurosos y precisos, en los que ha quedado prohibida la intuición geométrica". Es curioso, sin embargo, que al inquirirles cómo nuestros antepasados eran capaces de hallar teoremas correctos a través de razonamientos incorrectos, sólo pudieron responder con una sola palabra, la <u>intuición</u>. Ahora bien, si no se cree en los entes <u>reales</u>, ¿qué es lo que puede intuirse? ¿Se habrán de crear nuevos conceptos o se hallarían otros que aún estuvieran ocultos?

---

[37] P. Davis y R. Hersh, *The Mathematical Experience*, **ibid**, cap. 8, p. 399.
[38] *La nueva matemática,* Salvat Edit., Barcelona, 1973.

De todos modos, nos hemos quedado realmente sin conocer qué línea de pensamiento ha de conllevar la verdad. Los esfuerzos por eliminar las contradicciones con el fin de establecer la consistencia de las estructuras matemáticas, fracasaron. Para colmo, brillaba por su ausencia una prueba firme de consistencia. Prevalecía una diferencia esencial que había dividido a formalistas y platónicos, relativa a las cuestiones de existencia y realidad (lo que se aprecia muy claramente, en la hipótesis del continuo de Cantor) [39] . Además, jamás hubo acuerdo para que se pudiera aceptar el enfoque intuicionista no axiomático. Para sus seguidores, la consistencia de las matemáticas estaba clara porque el significado intuitivo la garantizaba. No obstante, la intuición no llegaría a ser nunca una *guía* de absoluta confianza, si se quería usar como criterio de la verdad en la exploración científica. Mas aún, los desacuerdos se extendieron a los métodos de razonamiento (la ley del tercio excluso, por ejemplo, dejó de ser un principio incuestionable de la lógica). Por otra parte, la pretensión de un razonamiento impecable tuvo que ser abandonada. Y a la postre, ninguna escuela pudo merecer el derecho de arrogarse la representación de las matemáticas. Todas las escuelas quisieron tratar de justificar las matemáticas a partir de 1900 y se preguntaron si podían servir para las matemáticas del siglo XX, pero lo que de hecho sucedió fue que los matemáticos habían puesto todo su empeño, voluntad y coraje, para reforzar y completar los fundamentos de su disciplina; y si se consiguieron limar diversas asperezas y eliminar contradicciones, sólo sería hasta cierto punto: el de admitir la conveniencia de que en todo tiempo, una revisión de los fundamentos resultaría muy útil y necesaria para las matemáticas.

4. El ordenador, el concepto de demostración y la verdad matemática.

Retornemos a la década de los 1930. Una vez que Gödel pusiera en evidencia la imposibilidad de probar la consistencia lógica de las matemáticas, sucedió otro acontecimiento espectacular, además de

[39] Para J.D. Monk (*American Mathematical Monthly*,**77** (1970), 703-711), en el mundo matemático *grosso modo* sobresalen dos puntos de vista filosóficos, el platonismo y el formalismo. Ante esta dicotomía, casi todos los matemáticos en ejercicio, preferían tomar en la cuestión de consistencia, la posición realista (es decir, platónica); pero eran conscientes de las dificultades de la teoría de conjuntos. Si, por ejemplo, un matemático hace una simple referencia a los números reales, expresa una tendencia hacia el platonismo; y si se refiere a un teorema como correcto porque es deducido de los axiomas de la teoría de conjuntos, tiende hacia el formalismo. Sin embargo y en general, un argumento matemático correcto deducido de premisas dadas, es reconocido como tal, tanto por un platónico como por un formalista.

sorprendente. El matemático Alan Turing (1912-1954) mostró (1936) la existencia de un "autómata universal", al indagar sobre las clases de sucesiones de unos y de ceros que pudieran ser reconocidos por una máquina abstracta a través de un número finito de instrucciones. Esto significó nada menos que el nacimiento del computador electrónico, cuyo desarrollo promovería la aplicación más extraordinaria del siglo XX. Se hace preciso, no obstante, destacar que habría de ser John von Neumann (1903-1957), quien de hecho implementara (1944) el autómata universal como un computador electrónico, con instrucciones almacenadas mediante un "programa" que la propia máquina podría alterar en el curso del cálculo.
En las últimas décadas del siglo XX, el ya más bien denominado ordenador[40] produciría un notabilísimo impacto en la matemática pura. Transformó el panorama de la demostración, obligando a los matemáticos a reconsiderar la propia naturaleza de su disciplina y a examinar la interconexión de ideas matemáticas. La llegada de esos más recientes computadores dio lugar además a que el pensamiento filosófico experimentara de forma importante, tal revolución en la ciencia, que afectó en particular a las matemáticas, acumulándole nuevas incertidumbres al enorme laberinto de su creciente complejidad. Muy en especial, en lo referente a la verdad, que en matemáticas (al sustentarse indefectiblemente en sus demostraciones) se había encontrado desde siempre mejor definida que en cualquier otra área de las ciencias, lo que hizo que éstas se aferraran a sus evidentes avances medidos desde hace milenios por las conclusiones o teoremas que se pudiesen derivar de una serie de razonamientos que partían de un sistema de axiomas. Sin embargo, surgieron dudas que desencadenarían una cadena de confusiones y controversias; sobretodo en determinadas ocasiones, que se originaron en tiempos recientes, en las que fueron presentadas, con el ordenador como elemento indispensable, demostraciones muy largas y complicadas, si bien en un "status" en el que se permanecía sin ahondar en un nuevo análisis de la propia naturaleza de aquellas y por tanto, de la verdad. Pese a todo, la creación de posteriores lenguajes de programación lograron modelar un renovado formalismo matemático que sustituiría a otros antiguos de las matemáticas aplicadas; y la mayor parte de las pruebas asistidas con ayuda del computador (o demostraciones "computerizadas") que en el inicio habían sembrado

[40] Quien primero concibiera lo que actualmente ha logrado representar el ordenador, fue el matemático inglés Charles Babbage (1791-1871). Éste ideó (1820) y luego creó una bien conocida máquina "diferencial" mecánica, describiendo mucho más tarde (1833) otra que llamaría "máquina analítica", la cual contenía varias ideas básicas y podía ejecutar una buena parte de lo que hace un computador matemático moderno; trató de construirla durante años, pero sin éxito. Sólo lo conseguiría la era electrónica.

aquellas indecisiones en el mundo matemático, consiguieron representar más tarde, implementaciones de pruebas de sus teoremas[41]. Mas, con el recurso al ordenador, no se pudo alcanzar una plena aceptación de algunos razonamientos como teoremas matemáticos, y se generarían serias objeciones y controversias entre filósofos y matemáticos que, al propio tiempo y una vez más, provocó una significativa división entre los mismos matemáticos[42] . La noción de lo que se había dado en llamar demostración rigurosa fue entonces acogida de forma distinta y contraproducente por unos y por otros, y muy acusadamente, desde el momento en que para algunos (como dijimos) el uso del ordenador figurara nada menos que como parte fundamental de la misma. Un hecho que conllevaba un debilitamiento sensible de las normas de la demostración matemática.
Entre los artículos que se publicaron en ese sentido, en uno de ellos que apareció en *Acta Mathematica* (1971), debido a H.P.F. Swinnerton-Dyer, se comentaba: "Cuando un teorema ha sido probado con ayuda de un ordenador, es imposible dar una exposición de la demostración que obedezca al criterio tradicional (…). En toda computadora moderna es muy raro que se provoquen errores (…), si bien son susceptibles algunos fallos transitorios durante el proceso de cómputo (…). Esto no significa que sea necesario rechazar los resultados del cómputo". Su conclusión fue: "La única forma de verificar estos resultados (si se considera que vale la pena) es volver a atacar el problema de forma totalmente independiente, usando una máquina diferente. Una actitud que se corresponde exactamente con la de la mayor parte de las ciencias experimentales". Algunos informarían más tarde, que en varios casos se tuvieron que realizar al efecto, ulteriores comprobaciones independientes de aquellos.

En realidad, la relación entre matemáticas y ordenador es mucho más ardua y compleja de lo que se pudiera sospechar. La popularidad de las matemáticas basadas en el mecanismo informático (de experimentos numéricos o gráficos), desató en esos años reacciones a favor, si bien otras contrarias. Hubo dos grupos protagonistas principales bastante discordantes

---

41 Un buen número de matemáticos creyeron que las pruebas extremadamente extensas y realizadas con ayuda del computador no eran, en cierto sentido, pruebas matemáticas *reales*, a causa de implicar tantos pasos lógicos, que no podían ser prácticamente verificables por seres humanos, cuestionando de ese modo a aquellos matemáticos por exhibir su verdad en una programación de computador.

42 Puesto que había que exponer argumentos sólidos para fundamentar los resultados o teoremas, era importante la aportación de la prueba, acerca de cuya noción desde principios del siglo XX (antes de los avances de la lógica), es sabido que existieron bastantes discrepancias.

entre sí, aunque en ambos existían casos de matemáticos que se pronunciaban con reservas. En uno de ellos, D. Mumford escribió al respecto, que "la comunidad de la matemática pura considera a los ordenadores, como invasores que profanan el campo sagrado", y sostenía que para establecer la verdad, los experimentos con ordenadores y la concordancia con los fenómenos naturales, no podrían jamás reemplazar a las demostraciones. Igual opinión compartían, entre otros, A.M. Jaffe, D. Ruelle, R. Penrose, y P. Deligne (quien dijo *no creo en la demostración por ordenador, sólo si la entiendo y es clara*). Entre los del otro grupo que discrepaba, una buena parte pronosticaría la muerte de la demostración tradicional, para defender las demostraciones "computerizadas". S. Wolfram, creador del programa Mathematica, mostró un absoluto desdén por las demostraciones; así como P.A. Griffiths y muchos más. Por otra parte, algunos como S. Smale, se esmeraron en fundar la computación sobre bases más firmes y M. Atiyah instó a los matemáticos a que se implicaran más en la computación, para que se mezclaran con el mundo real[43] .

Haciendo una apreciación de conjunto de lo anteriormente dicho, las facultades lógicas del ordenador relegaron a un segundo plano sus habilidades matemáticas que, en ocasiones, supuso una sustancial ayuda para zanjar célebres problemas matemáticos, como se concreta seguidamente. Es lo que sucedió con los famosos casos conocidos de *la clasificación de los grupos finitos simples* y d*el problema de los cuatro colores*[44].

En lo que atañe al primero, fueron necesarias para su prueba unas 500 publicaciones realizadas por un centenar de investigadores y que ocuparía unas quince mil páginas. "Tiene más sentido contemplar dicha clasificación, mas bien como un campo completo de las matemáticas, que como el intento de demostrar un único teorema", aseguraría D. Gorenstein en 1979, quien sin duda había sido el mejor informador sobre el tema durante los años anteriores. De todos modos, no sólo era excepcional la desmesurada longitud de la prueba, sino también porque entraba en juego la seguridad de la misma. Al tiempo que Gorenstein aludía irónicamente a teoremas *casi*

---

[43] Hay algunos matemáticos que ponen en entredicho la idea de que el paradigma y epítome de la verdad hayan de ser las demostraciones tradicionales y también la de otros paladines de la tradición (entre ellos, S.L. Krantz). que instaron a los estudiantes a preferir las matemáticas a la informática, previniendo que esta última podría ser pasajera, según anota J. Horgan (*La muerte de la demostración*, Investigación y Ciencia, diciembre 1993), entre otras manifestaciones de interés.

[44] Para más detalles sobre estos dos problemas, véase por ej., N. Hayek, *Rev.Acad.Canar.Cienc.*,**XVII**, 1-2 (2005).

probados, añadía que "parece ir más allá de la capacidad humana presentar un argumento de varios cientos de páginas estrechamente razonado con absoluta seguridad". En consecuencia, era lícito pensar que con una cadena de razonamientos sumamente larga y complicada, la prueba rigurosa infundiera en el lector que quisiera constatarla, severas dudas y hasta aprensión, cabiendo incluso que resultara menos convincente que un argumento puramente intuitivo.

Análogas circunstancias concurrían en el segundo de los casos citados, que en principio fue llamado "conjetura de los cuatro colores". La cuestión consistía en probar que todo mapa (político) plano (o sobre una esfera) pudiera ser coloreado sin usar más de cuatro colores diferentes [45], tales que cualesquiera dos países con frontera común no debían tener el mismo color. Desde el siglo XIX se encontraba sin resolver. K. Appel y W. Haken dieron (en 1976) una solución, pero lo más sorprendente de la misma fue, que una parte esencial de la prueba, se apoyaba en cálculos de computador. Appel y Haken habían recurrido para la prueba, al argumento de exhibir un conjunto *inevitable* de configuraciones *reducibles*, lo cual les permitiría alcanzar el proceso de reducción al absurdo. Sin embargo, descubrieron que dicho conjunto contenía miles de configuraciones, en su mayor parte de tal complejidad, que el método empleado (*la prueba de reducibilidad*) sólo era factible acudiendo a un computador muy rápido. Ahora bien, como los programas de computador y el output correspondientes, formaban parte indestructible de la prueba, se planteó el problema de si se podía considerar como una auténtica demostración matemática. El verdadero meollo de la cuestión estribaba naturalmente, en que los autores presentaron su trabajo, como una prueba rigurosa, completa y definitiva. Para el filósofo existía una diferencia absoluta entre una demostración que depende de la fiabilidad de una máquina y una demostración que únicamente depende de la razón humana. Para el matemático, en cambio, la fiabilidad de la razón daba al ordenador la bienvenida, por considerarlo un calculista más fiable de lo que él posiblemente lograra llegar a ser[46] . En el terreno filosófico, la visión de "demostración rigurosa", fue considerada como una respuesta excepcional y más bien controvertida; para el matemático, sin embargo, la objeción filosófica sería más adelante interpretada, como idealista e ingenua. En un buen número de integrantes de los medios filosóficos, no tuvo buena acogida, a menos que se reconociera sin paliativos, que el uso hecho del computador fuera aceptado como un debilitamiento de los criterios clásicamente admitidos para la prueba matemática; entre ellos, S. Tymoczko

---

45 La experiencia de los cartógrafos ya había hecho ver que cuatro colores bastaban.

46 P. Davis y R. Hersh, **ibid**, cap. 8.

[47], quien en relación con el problema de cuatro colores, expondría: "Si aceptamos el denominado teorema de los cuatro colores como teorema, estamos obligados a cambiar el sentido de la palabra *teorema*, o más concisamente, a cambiar el sentido subyacente de *demostración*". En el campo matemático, hubo en general, división de pareceres. Para los amantes de los computadores, el teorema se recibiría con gran beneplácito; los no partidarios, le despojaron del prurito de pertenecer a problemas o cuestiones de primera o preferente categoría. Es innegable, darían a entender por otra parte, P. Davis y R. Hersh [48], que la aceptación del teorema de Appel-Haken involucraba un acto de fe, que se sustentaba principalmente en la creencia de que los computadores hacen lo que se supone debían hacer, degradando así el nivel de certeza matemática al del conocimiento común, irremediablemente ligado a posibles escepticismos.

En los decenios de 1940 y 1950, el *positivismo lógico* constituyó la corriente dominante en filosofía de la ciencia. La llamada *escuela de Viena* de estos positivistas (Hahn, Gödel, Carnap, Wittgenstein, ...) abogaba por una ciencia unificada, codificada en un cálculo lógico formal y con un único método deductivo que condujo al formalismo hacia la filosofía de las matemáticas. Fue esa conexión una de las principales causas de la prevalencia (antes anunciada) del grupo formalista [49].
Hay que decir, por otra parte, que la demostración y el rigor absoluto seguían siendo difícilmente analizables. Representaban conceptos ideales, que "no ocupaban un lugar natural en el mundo matemático". No había una definición rigurosa de rigor, ni criterios universalmente aceptables. La lógica tenía toda la falibilidad y la incertidumbre que limitan la mente humana [50].
Ahora bien, en la ciencia la búsqueda de fundamentos nos retrotrae inevitablemente al problema tradicional de la "lógica inductiva" (es decir, extraer de leyes generales, experimentos particulares y observaciones). Uno de los principales estudiosos de la lógica de las matemáticas, el filósofo

[47] S. Tymoczko, *Journal of Philosophy*, **76**, 57-83 (1979).
[48] P. Davis y R. Hersh, **ibid**, cap. 8.
[49] R. Carnap, *The logical sintax of language*, New York, 1937 (traduc. Springer, 1984), enunció claramente la posición formalista, al requerir que la filosofía matemática se sustituyera por la lógica de la ciencia, que no es otra cosa que la lógica del lenguaje científico. Muchos lógicos después de Carnap, opinaron que la misión de la lógica se había de ocupar de la transmisión de la verdad y no de cadenas de símbolos.
[50] El filósofo Nietzsche decía: "La virtud de una demostración lógica no es que obligue a creer, sino que mueva a dudar"; "no esperamos ya ser lógicos; lo más que podemos esperar es no ser ilógicos". (Morris Kline, *La pérdida de la certidumbre*, **ibid**, cap. 14).

austriaco Karl Popper (1902-1994), creador de la escuela del *falsacionismo*, propuso que no era ni posible ni necesario justificar las leyes científicas mediante el razonamiento inductivo. Defendió que la ciencia operaba por falsación y no por inducción. El criticismo de Popper (1934) del dogma inductivista, ocasionó una auténtica revolución en el modo de pensar de la época acerca del conocimiento científico. Aseguraba que la base del control empírico de la ciencia era la de poder falsar las hipótesis en un proceso abierto que tendiese a la verdad científica, y sostenía que una teoría que no sea refutable mediante ningún experimento imaginable no es científica, aunque sea falsa desde el punto de vista de la lógica[51] : "una teoría tiene derecho a ser considerada científica, cuando en principio, pueda ser puesta a prueba, y expuesta a quedar refutada", y "si sobrevive a tales pruebas, puede considerarse provisionalmente establecida, pero nunca *demostrada*"[52] . En la filosofía de Popper, el razonamiento matemático es jamás verificable, sino solamente *falsable*. Los teoremas matemáticos no están garantizados de modo alguno (…). Si nos guiamos por la historia, habrán nuevas adiciones a las matemáticas que reclamarán unos nuevos fundamentos (…). Los intentos de erigir las matemáticas sobre unos fundamentos indestructibles, se ha visto que han terminado en un fracaso [53].

Si bien en general, conforme la tradición, ha habido una tácita creencia sobre una supuesta unanimidad entre los matemáticos sobre los temas que tratan, lo que de hecho ha venido sucediendo en muchos períodos de la historia es una fuerte controversia, sobretodo en algunos puntos fundamentales, muy en particular, en lo que afecta a la prueba matemática[54]. Normalmente, dicha prueba no puede incluir de modo absoluto todos los pasos del razonamiento, puesto que resultaría desmesurada; la comunicación de la misma debe limitarse esencialmente a suministrar los datos precisos para la deducción de su rigor lógico.

Abstracción, formalización, axiomatización y deducción, han venido representando los principales ingredientes de las demostraciones. Entre ellos, la importancia de la axiomatización en una teoría, sobrepasaría su

---

[51] Frente a las diversas pullas habidas a la demostración, Popper indicaría: "Existen tres niveles en la comprensión de una demostración. El inferior es la agradable sensación de haber entendido el razonamiento; el segundo, es la capacidad de repetirlo; y el tercero, o nivel superior, es el de ser capaz de refutarlo" (K. Kopper, *La lógica de la investigación científica*). Véase M. Kline, *La pérdida de la certidumbre*, **ibid**, cap. 14, p.381.

[52] P. Davis y R. Hersh, **ibid**, cap. 7.

[53] M. Kline, *La pérdida de la certidumbre*, **ibid**, cap. 14.

[54] Puede citarse, por ejemplo, que la escuela logicista en su tiempo despreció las pruebas de la formalista y algunos intuicionistas rechazaron con desdén las pruebas de logicistas y formalistas; y también que los lógicos repudiaron lo que descubrieron los matemáticos puros y estos últimos negaron lo que hacían los matemáticos aplicados.

impacto sobre las pruebas[55]. Ninguna teoría matemática informal pudo soslayarse de la axiomatización. Se tuvo que valorar en cambio, que mientras en una teoría informal existen numerosas posibilidades de introducir más términos, más axiomas y cada vez más reglas (hasta allí muchas posiblemente ocultas en forma de argumentos tildados de *obvios*), una teoría formalizada queda prácticamente sujeta a un parco conjunto de axiomas y a unas escasas reglas. No obstante, existen diversas cuestiones alejadas en extremo de las abstracciones matemáticas, y muy en especial las relativas a las matemáticas *informales*. Así, en tanto Popper y otros pensadores contemporáneos transformaban la filosofía de la ciencia, la filosofía matemática permanecía en un estado de inmovilismo, producto de las secuelas de las grandes controversias fundacionistas de principios del siglo XX (el formalismo, el intuicionismo y el logicismo), cuyos programas filosóficos tenían como objetivo construir cimientos seguros del conocimiento matemático. Y según sostenía la filosofía de Popper, las matemáticas informales constituyen una ciencia que evoluciona a través de un proceso de crítica y refinamiento sucesivo del avance de teorías nuevas que compiten entre sí, y que no se aferran a las pautas deductivas de las matemáticas formalizadas [56].

En ese tiempo, el matemático y filósofo de la ciencia, de origen húngaro, Imre Lakatos (1922-1974), que se consagraría como personalidad filosófica de su época después de la publicación de una excelente obra[57] ejerció una decisiva influencia sobre una nueva filosofía de la ciencia, escenificando el rechazo del enfoque formalista de las matemáticas al identificarlas con su abstracción axiomática formal, y a la filosofía de las matemáticas con la metamatemática. Si bien Lakatos estaba ideológicamente influenciado por la filosofía crítica de Popper, consideró ingenuo el falsacionismo popperiano, reformulando una nueva versión que denominó "falsacionismo *sofisticado*", con el propósito de eludir la falsación; al propio tiempo, se adheriría a las refutaciones historiográficas de Thomas Kuhn[58] (1922-1996) destacando la importancia de la historia para mostrar que la falsación no era una acción cotidiana de los científicos como Popper defendía. Las matemáticas para Lakatos, lo mismo que las ciencias naturales, eran falibles y no indubitables,

[55] P. Davis y R. Hersh, **ibid**, cap. 4.
[56] P. Davis y R. Hersh, **ibid**, cap. 7.
[57] *Pruebas y refutaciones: La lógica del descubrimiento matemático,* **ibid** (véase Nota pie anterior 29). Este trabajo que se basó en su tesis doctoral, ya fue reflejado en un brillante ensayo (dividido en cuatro partes) de Lakatos, que había aparecido con anterioridad en *The British Journal for Philosophy of Science*, **14**, 1963-64. Sería impreso en forma de libro por Cambridge University Press después de su muerte.
[58] Véase T.S. Kuhn,*The structure of scientific revolution*, Univ. Chicago Press, 1962.

y crecen gracias a la crítica y a la corrección de teorías no siempre libres de errores, ambigüedades u omisiones. Lakatos, en este contexto de matemática informal y seguidor de Popper del conocimiento científico, aplica en su obra un análisis epistemológico, no a las matemáticas formalizadas sino a las *informales*[59], unas matemáticas en proceso de crecimiento y descubrimiento, que obviamente significan lo que los matemáticos y los que estudian matemáticas conocen en realidad por matemáticas. Para él, cuando la sociedad evoluciona, es natural que también las matemáticas hayan de transformarse, por lo que se deben exponer argumentos para fundamentar sus resultados o teoremas, o sea, tiene que aportarse una prueba. Estima que la "prueba" no significa un procedimiento mecánico que conlleve la verdad en una cadena inquebrantable de hipótesis a conclusiones. Para un mejor desarrollo de las matemáticas informales (y *cuasi-empíricas*), Lakatos consideró que el objetivo de la prueba ha de concentrarse en "la incesante mejora de las conjeturas, gracias a la especulación y a la crítica, y seguir la lógica de su "método" de pruebas y refutaciones"[60], un método que constituyó un patrón heurístico muy general del descubrimiento matemático[61].

Señalemos, por último, que en lo que se refiere a las pruebas, la mayoría de los filósofos modernos, acorde con la concepción formalista, dirían que en un sistema formal dado, una prueba significa una secuencia finita de fórmulas, en la que cada una de ellas es, o un axioma del sistema, o bien una fórmula deducida mediante una regla del sistema de algunas de las fórmulas precedentes; lo cual lleva a especificar en qué sistema debemos operar. El logicismo en cambio, acepta esencialmente un sistema ampliamente diferenciado y por tanto, admite un solo concepto de prueba. Una

---

[59] Como ya Popper había afirmado, las teorías científicas no estaban derivadas inductivamente de los hechos, sino más bien inventadas como hipótesis o incluso conjeturas, sujetas entonces a pruebas experimentales donde las críticas intentan refutarlas. Véase P. Davis y R. Hersh, **ibid**, cap. 7, para más detalles y en particular, sobre la exposición de algunos párrafos que se han tenido en cuenta.

[60] En la obra de Lakatos hubo algunas discusiones acerca de cómo la crítica podía convertir la verdad matemática en verdad lógica. La fase de *conjeturar* y *contrastar* reclamaba una heurística de problemas a probar: a la precedencia heurística del resultado sobre el argumento, G. Pólya objetaría que "se tiene que conjeturar un teorema matemático antes de probarlo" (*Mathematics and PlausibleReasoning*, Oxford University, London vol. **1**, 1954).

[61] El esqueleto de su método, mostrado en su citada principal y ya famosa obra, quedó ilustrado en un Apéndice de la misma, en la que se aborda la prueba de Cauchy de la conjetura de Euler-Descartes. En dicho apéndice, Lakatos realizaría un bosquejo que se refiere a un análisis de la prueba en análisis matemático, considerando la problemática de "la defensa de Cauchy del principio de continuidad".

característica notable de semejante prueba formal, es la de poder decidir para cualquier prueba supuestamente dada, si realmente es una prueba o no[62].

Ahora bien, ¿qué se ha de decir de una *prueba informal*? Algunos lógicos han intentado analizar las características de las pruebas en las teorías informales y han dicho que una "prueba informal" es una prueba formal que omite la mención de las leyes lógicas de inferencia y de los axiomas, y sólo indica el uso de los postulados específicos. Para Lakatos, esta llamada prueba informal no es otra cosa que "una prueba en una teoría matemática axiomatizada, que ha adoptado ya la forma de un sistema hipotético-deductivo, si bien deja sin especificar su lógica adyacente"[63] . Denominar a este tipo de prueba una prueba informal constituye una nomenclatura equívoca y errónea, y se la podría llamar mejor una prueba cuasi-formal[64].

Ni el esquema inductivista, ni el método deductivo, ni la teoría falsacionista de Popper, fueron capaces de describir la génesis y el desarrollo de las teorías científicas. Para Lakatos, "la historia de las matemáticas y la lógica del descubrimiento matemático, o sea, la filogénesis y la ontogénesis del pensamiento matemático, no se podía desarrollar sin la crítica y el rechazo final del formalismo". Al desconectar el formalismo, la filosofía de las matemáticas de su historia, se pudo mantener que, por su estructura lógica, la rama más avanzada de la filosofía y patrón de las restantes, era la de las matemáticas. Lakatos no vaciló consecuentemente, en elegir los modelos de razonamiento plausible (en cuanto a la demostración y resolución de

62 En el fuerte ataque que en la Introducción de su obra *Pruebas y Refutaciones* dirige al formalismo, afirma Lakatos: "El contenido de la metamatemática, ideada por su creador Hilbert, es una abstracción de las matemáticas en la que sus teorías son sustituidas por sistemas formales y según ya dijimos, en la escuela formalista, sus matemáticas se identifican con las matemáticas formalizadas. Mas, ¿qué podemos *descubrir* en una teoría formalizada? Dos tipos de cosas: Primero, podemos descubrir la solución a problemas que una máquina de Turing convenientemente programada resolvería en un tiempo finito (como por ejemplo, una pretendida prueba, ¿es o no una prueba?). En segundo lugar, podemos descubrir la solución de problemas (del tipo, ¿es o no es un teorema determinada fórmula de una teoría no-decidible, en los que nos podemos guiar solamente por el método de intuición indisciplinada y buena suerte?). Ahora bien, esta fría alternativa entre el racionalismo de una máquina y el irracionalismo de la ciega adivinanza no vale para las matemáticas vivas".

63 En su obra *Pruebas y refutaciones,* (**ibid**), Lakatos alude a que "en la comprobación de una prueba *ordinaria* (informal), hallar un "error" exige tanta suerte como encontrar una prueba; y a veces, lleva hasta muchísimos años, descubrir "errores" en demostraciones informales. Una investigación acerca de estas últimas, suministra una lógica rica para los matemáticos operantes, lógica que no puede ser reconocida por la filosofía formalista".

64 I. Lakatos, *Matemáticas, ciencia y epistemología*, **ibid**, cap. 4.

problemas) de G. Pólya[65] , como punto de partida de una *reconstrucción racional* de crecimiento de la lógica del conocimiento matemático. En relación con la denominada lógica del descubrimiento científico de Popper, rechazaría la infalibilidad deductiva euclídea, para sustituirla por una visión más amplia de las matemáticas, a las que calificó como un cuerpo de conocimiento falible mejorado incesantemente frente a las acometidas críticas. Para el contraste de filosofías fundacionales de las matemáticas y las teorías cuasi-empíricas, la concepción dialéctica de Lakatos resulta adaptable para el recorrido del progreso en el entendimiento humano.

5. Epílogo[66].

Desde hace mucho tiempo se tiene reconocido que la intuición y la demostración representan una buena perspectiva de las matemáticas; la primera, al desempeñar un papel fundamental en la consecución de verdades matemáticas y la segunda, porque indudablemente brinda una eficaz actitud de apoyo para minimizar el riesgo de contradicciones, hasta el punto de que nadie que haya estudiado las contribuciones de las matemáticas al pensamiento humano, osaría sacrificar el concepto de demostración (considerado por los matemáticos como paradigma y referencia indiscutible). Sin embargo, tanto la intuición como la demostración, no reflejan todas las opiniones acerca del futuro. Destacamos seguidamente como ejemplos, dos de las mismas.
El intuicionista H. Lebesgue (1875-1941) había aceptado que la lógica puede hacernos retrasar algunas demostraciones, pero no puede exigirnos creer en ninguna. La lógica está sujeta a una intuición frecuentemente incontrolada, y quizás sea posible que las condiciones adecuadas para limitar esta última sean impuestas por la lógica.
El valor de la demostración, por otra parte, fue atacado por A.N. Whitehead, quien llegó a expresar que "la concepción de la lógica como el análisis adecuado del progreso del pensamiento, es una falsedad; se trata de un instrumento soberbio, pero requiere una gran dosis de sentido común".

Al citar a Lakatos, Morris Kline dice que si las matemáticas se basan en último término en intuiciones, ¿por qué hacer demostraciones cada vez más profundas? Y añade: ¿Por qué entonces, no paramos de una vez, por qué no

65 G. Pólya, *How to solve it*?, Princeton, Princeton University Press, 1945; (Washington, MAA, 1978).
66 A modo de epílogo, se ha incluido una breve selección de párrafos del capítulo 14 de la excelente obra de Morris Kline, *La pérdida de la certidumbre*, **ibid**.

decir que "la prueba definitiva de que un método es admisible en aritmética, debe evidentemente ser que sea intuitivamente convincente? (…) ¿Por qué no admitir honradamente la falibilidad matemática y tratar de defender la dignidad del conocimiento falible frente al escepticismo cínico, antes que engañarnos con que debemos reparar invisiblemente el mínimo desgarrón del tejido de nuestras "intuiciones" fundamentales?

Y en cuanto a la demostración, M. Kline nos advierte además que "debemos reconocer que la demostración absoluta no es en la actualidad sino una meta; una meta que se busca, pero que probablemente jamás se alcanzará. Puede que no sea más que un fantasma constantemente perseguido, pero escurridizo".

El problema básico de reconciliar las diferencias de opinión sobre lo que son las matemáticas correctas, radica en lo que se debe entender por demostración. Deberían hacerse constantes esfuerzos para fortalecer lo que tenemos sin pretender perfeccionarlo".

La *moraleja* de la historia de la demostración es que, aún cuando persigamos una meta inalcanzable, podemos seguir produciendo los maravillosos valores que los matemáticos han producido en el pasado.