Rev.Acad.Canar.Cienc., I, 159-171 (1990)

REPRESENTACION RACIONAL TIPO-PADE DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION NORMAL Y SU APLICACION EN LA COMPUTACION DE MODELOS TOBIT

C. González-Concepción y G. Guirao-Pérez

Dpto. de Economía Aplicada

Universidad de La Laguna

38296-La Laguna. España

ABSTRACT

In this paper, a technique, making use of rational approximants to estimate function with a known power series expansions, is introduced. Our approach is via "a Padé-type Approximation" of the Normal Distribution Function, in order to solve certain problems related with the applicability of different tobit models.

KEY WORDS: Normal Distribution Function, Tobit Models, Optimization Problems, Rational Approximation.

INTRODUCCION

En el presente trabajo exponemos una técnica para aproximar funciones que poseen desarrollos en serie de potencias, mediante funciones racionales. Nuestro interés primario se centra en la aproximación tipo-Padé de la función de distribución normal, con el objetivo de resolver un problema práctico que nos encontramos en la aplicabilidad de los diferentes modelos tobit.

Mauleón, I., en un artículo refinadamente esclarecedor ([1]) para el investigador aplicado de diversos problemas prácticos en el tratamiento econométrico de datos de corte

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

transversal, señala que, 'hay un problema práctico importante para la aplicación de modelos con respuesta truncada que es la disponibilidad de programas informáticos. Excepto para el caso más simple, no existen apenas programas disponibles. No obstante, algunos programas como el TSP (Versión 4.1) incluyen una rutina que optimiza una función de verosimilitud arbitraria suministrada por el usuario. Un problema en este caso es que no se dispone de una expresión numérica exacta para la función de distribución de una normal'.

En este trabajo, deducimos una representación racional tipo-Padé de orden tres en el origen de la función de distribución normal, que es válida para todo valor real y presenta buenas propiedades de estabilidad y convergencia. El plan del trabajo es como sigue: En la sección 2 se introducen y definen los aproximantes de Padé y tipo-Padé, en la sección 3 se obtiene una representación racional tipo-Padé de la función de distribución normal estándar y en la sección 4 se hace referencia a su aplicación en la computación de modelos con variable dependiente limitada.

APROXIMANTES DE PADE Y TIPO-PADE

Los aproximantes de Padé son determinadas funciones racionales polinómicas que se utilizan para aproximar funciones que poseen desarrollos en serie de potencias. Este tipo de aproximación, introducido por Padé en 1892 ([2]), ha experimentado recientemente un gran auge con la computación numérica de funciones debido a sus importantes propiedades de estabilidad.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

Más formalmente, dada ℓ una serie formal de potencias en z=a,

$$\ell(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\ (z-a)^i \qquad (c_i \in \mathbb{R}) \qquad (1)$$

un aproximante de Padé de orden m+n de la función ℓ en el punto a es una función racional, cuyo numerador P_m y denominador Q_n son polinomios de grados m y n respectivamente, tal que su desarrollo en potencias crecientes de (z-a) coincide con el de ℓ hasta la potencia $(z-a)^{m+n}$. Sea

$$[m/n]_\ell\ (z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} \qquad (2)$$

dicha función racional, donde,

$$P_m(z) = \sum_{i=0}^{m} p_i\ (z-a)^i$$

$$Q_n(z) = \sum_{j=0}^{n} q_j\ (z-a)^j$$

entonces,

$$[m/n]_\ell\ (z) = \ell\ (z) + o(\ (z-a)^{m+n+1}\ )\ ,\ x \to a \qquad (3)$$

Los coeficientes de los polinomios P_m y Q_n se calculan resolviendo el sistema lineal que resulta al igualar coeficientes hasta el grado m+n, en la expresión,

$$P_m(z) = Q_n(z)\ \ell\ (z) \qquad (4)$$

Brezinski, C. ([3]), intentando relajar la hipótesis de orden de aproximación en pro de lograr una aproximación

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

computacionalmente más sencilla ha introducido los aproximantes tipo-Padé que son funciones racionales $P_m/ Q_n \equiv (m/n)_f$ cuyo desarrollo en serie coincide con el de f, sólo hasta el término de grado m. Este caso es más general, puesto que puede elegirse arbitrariamente el polinomio Q_n según convenga. Evidentemente, los coeficientes de P_m se calculan resolviendo el sistema lineal que resulta de igualar los primeros m coeficientes de la ecuación polinómica (4).

$$(m/n)_f(z) = f(z) + o((z-a)^{m+1}) \tag{5}$$

Obsérvese que si n es cero el aproximante tipo-Padé coincide con el desarrollo en serie truncado de f.

Las definiciones anteriores se refieren a aproximantes en un sólo punto a. Se dispone también de la generalización de aproximantes a más de un punto ([4], [5]).

La elección, tanto del tipo de aproximación como del orden, responde a razones de tipo teórico como, estabilidad, convergencia, tipo de función a aproximar (¿es conocida la función f o sólo los primeros términos de su desarrollo en serie?), etc..., y de tipo numérico como el coste computacional, los errores de redondeo, etc...

En la próxima sección, y como ejemplo metodológico, obtenemos un aproximante tipo-Padé para representar la función de distribución normal estándar.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

REPRESENTACION RACIONAL DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR

La función de distribución normal estándar Φ tiene una representación integral,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

que admite el siguiente desarrollo en serie

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\, n!(2n+1)} x^{2n+1}$$

y cuyo campo de convergencia es todo $\mathbb{R}$.

Por lo tanto, la función Φ puede representarse, para cálculos numéricos, mediante la serie truncada, pero los resultados sólo son aceptables para valores pequeños de x, aún cuando se consideren bastantes términos de la serie. Ello se debe a que el cálculo de las sucesivas potencias de x se deteriora considerablemente.

Estos resultados pueden mejorarse utilizando aproximantes racionales. A modo de ejemplo, vamos a elegir un aproximante tipo-Padé, que hemos utilizado en diversas aplicaciones (véase por ejemplo [6] Y [7]).

En la tabla I pueden verse los valores obtenidos con:

(1) La serie truncada hasta el término de grado 11,

$$\Phi(x) \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{336} + \frac{x^9}{3456} - \frac{x^{11}}{42240} \right)$$

(2) Aproximante tipo-Padé de orden 3 en el origen,

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

$$\Phi\ (x) \simeq R(x) \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+p_4x^4}{q_0+q_1x+q_2x^2+q_3x^3+q_4x^4} \right) \qquad x>0 \qquad (6)$$

$$= \frac{1}{2} \qquad x=0$$

$$= 1 - \Phi\ (-x) \simeq 1 - R(-x) \qquad x<0$$

donde

$p_0 = 0$

$q_3 = 0.05771$

$p_1 = 1 = q_0$

$p_2 = 0.18859 = q_1$

$p_3 = 0.06832 = q_2 - 1/6$

$p_4 = 0.02605 \sqrt{\pi/2} = q_4 \sqrt{\pi/2}$

Así pues hemos elegido, en este ejemplo, el grado del denominador igual al del numerador, m=n=4 (potencia no muy elevada) y los coeficientes p_i y q_i tales que cumplan las siguientes propiedades:

a) Igual comportamiento asintótico ($x \to \infty$) de R y Φ, es decir,

$$p_4 = q_4 \sqrt{\pi/2}.$$

b) Aproximación de orden tres en el origen, es decir,

$$R(x) = \Phi(x) + o(x^4) \Leftrightarrow \begin{array}{l} R(0) = \Phi(0) \\ R'(0) = \Phi'(0) \\ R''(0) = \Phi''(0) \\ R'''(0) = \Phi'''(0) \end{array}$$

c) Aproximación de orden cero en los puntos 0.5, 1, 2 y 3, es decir,

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

$$R(x) = \Phi(x) \quad \text{para} \quad x = 0.5, 1, 2, 3$$

Con lo cual, R(x) resulta ser un aproximante tipo-Padé de orden tres en el origen y de orden cero en los puntos 0.5, 1, 2, 3, ∞ con buenas propiedades de estabilidad y convergencia.

TABLA I

Aproximaciones a la Función de Distribución Normal Estándar

x	(1) Serie Truncada	(2) A. Tipo-Padé
0.2	0.5793	0.5793
0.4	0.6552	0.6554
0.6	0.7243	0.7258
0.8	0.7821	0.7882
1.0	0.8238	0.8413
1.2	0.8438	0.8848
1.4	0.8369	0.9190
1.6	0.7995	0.9449
1.8	0.7314	0.9639
2.0	0.6385	0.9773
3.0	0.6737	0.9987
4.0	- 2.2730	0.9963
5.0	- 179.90	0.9926
10.0	- 818200	0.9905

Es interesante destacar que el error de la aproximación obtenida es por defecto sobre el valor exacto y por tanto es

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

también útil para todas aquellas aplicaciones concretas en las cuales haya que calcular log(1 - Φ (x)) como ocurre, por ejemplo, en la computación de los modelos tobit.

En la siguiente sección introducimos los modelos tobit y hacemos una referencia sobre la aplicación de este aproximante a la computación de dichos modelos.

APLICACION A LA COMPUTACION DE MODELOS TOBIT

Los modelos tobit son modelos de regresión en los que el rango de variación de la variable dependiente está limitado de alguna forma. Tobin, J., en un trabajo innovador ([8]) formuló por primera vez un modelo de esta clase en el terreno de la economía.

El modelo originariamente propuesto por Tobin y que es actualmente conocido como modelo tobit estándar, se puede definir como:

$$\begin{aligned} y_i^* &= x_i'\beta + u_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots , n \qquad (7) \\ y_i &= y_i^* \qquad \text{si} \quad y_i^* > 0 \\ &= 0 \qquad \text{si} \quad y_i^* \le 0 \end{aligned}$$

donde las $\{u_i\}$ están independiente e idénticamente distribuídas (i.i.d.) según una $N(0,\sigma^2)$. Se supone que se observa $\{x_i\}$ para i=1,2,...,n, pero que $\{y_i\}$ no se observa si $y_i^* \le 0$.

La función de verosimilitud de este modelo viene dada por:

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

$$L = \prod_0 P(y_i^* \le 0) \prod_1 f(y_i) = \tag{8}$$

$$= \prod_0 [1 - \Phi (x_i'\beta/\sigma)] \prod_1 \sigma^{-1} \phi [(y_i - x_i'\beta)/\sigma]$$

donde Φ y ϕ son, respectivamente, las funciones de distribución y densidad de la normal estándar y $\prod_0$ representa el producto de los i para los cuales $y_i^* \le 0$ y $\prod_1$ para los que $y_i^* > 0$.

Este modelo pertenece a lo que se conoce, a veces, como un modelo de regresión censurado. Por el contrario, si no se observa ni y_i ni x_i cuando $y_i^* \le 0$, estamos en el caso de un modelo de regresión truncado. La función de verosimilitud de la versión truncada del modelo tobit se escribe como:

$$L = \prod_1 \Phi (x_i'\beta/\sigma)^{-1} \sigma^{-1} \phi [(y_i - x_i'\beta)/\sigma] \tag{9}$$

A partir de la década de los setenta han aparecido y continúan apareciendo numerosas aplicaciones de estos modelos que se extienden a lo largo de una amplia área dentro de la economía. Al mismo tiempo, se han propuesto muchas generalizaciones de este modelo tobit estándar. En [9], Amemiya, T. hace una revisión de los diferentes modelos tobit propuestos y logra clasificar la mayoría de ellos en cinco tipos comunes de acuerdo con las semejanzas en la función de verosimilitud.

Siguiendo a Amemiya, si caracterizamos la función de verosimilitud de cada tipo de modelo esquemáticamente como en la Tabla II, en la que se supone que todo y_j, j=1,2,3, está distribuído como $N(x_j'\beta_j, \sigma_j^2)$ y P representa una probabilidad o densidad o una combinación de ambas; y donde hay que tomar el producto de toda P a lo largo de las observaciones que pertenecen

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

a una categoría particular determinada por el signo de y_1. Por lo tanto, el tipo 1 (modelo tobit estándar) $P(y_1<0)P(y_1)$ es una notación abreviada de

$$\prod_0 P(y^{\bullet}_{11}<0) \prod_1 f_{11}(y_{11})$$

siendo f_{11} la densidad de $N(x'_{11}\beta_1, \sigma_1^2)$. Esta expresión puede reescribirse como (8) después de eliminar el subíndice innecesario.

TABLA II

tipo 1	$P(y_1<0)\ P(y_1)$
2	$P(y_1<0)\ P(y_1>0,y_2)$
3	$P(y_1<0)\ P(y_1,y_2)$
4	$P(y_1<0,y_3)\ P(y_1,y_2)$
5	$P(y_1<0,y_3)\ P(y_1>0,y_2)$

Análogamente, si consideramos el modelo tobit tipo 2, que se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y^{\bullet}_{11} &= x'_{11}\beta_1 + u_{11} & y^{\bullet}_{21} &= x'_{21}\beta_2 + u_{21} & & \\ y_{21} &= y^{\bullet}_{21} & \text{si} \quad & y^{\bullet}_{11} > 0 & & \\ &= 0 & \text{si} \quad & y^{\bullet}_{11} \leq 0, & & i=1,2,\ldots,n \end{aligned} \tag{10}$$

siendo $\{ u_{11}, u_{21} \}$ extracciones i.i.d. de una distribución normal

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

bivariante con media cero, varianzas σ_1^2 y σ_2^2 y covarianza σ_{12}.

La función de verosimilitud de dicho modelo viene dada por

$$L = \prod_0 P(y_{11}^* \leq 0) \prod_1 f(y_{21} | y_{11}^* > 0)\, P(y_{11}^* > 0) \tag{11}$$
$$= \prod_0 P(y_{11}^* \leq 0) \prod_1 \int_0^\infty f(y_{11}^*, y_{21})\, dy_{11}^*$$

representando f(.,.) la densidad conjunta de y_{11}^* e y_{21}^*. Dicha densidad conjunta puede escribirse como el producto de una densidad condicional y una densidad marginal, es decir,

$$f(y_{11}^*, y_{21}) = f(y_{11}^* | y_{21})\; f(y_{21})$$

y determinar una forma específica para $f(y_{11}^* | y_{21})$ a partir del bien conocido hecho de que la distribución condicional de y_{11}^* dada por $y_{21}^* = y_{21}$ es normal con media $x_1'\beta_1 + \sigma_{12}\sigma_2^{-2}(y_{21} - x_{21}'\beta_2)$ y varianza $\sigma_1^2 - \sigma_{12}^2\sigma_2^{-2}$. Por lo tanto, (11) puede reescribirse como

$$L = \prod_0 [1-\Phi(x_{11}\beta_1\sigma_1^{-1})] \prod_1 \Phi \Big\{ [x_{11}'\beta_1\sigma_1^{-1} + \sigma_{12}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-2}(y_{21} - x_{21}'\beta_2)].$$
$$.[1-\sigma_{12}^2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}]^{-1/2} \Big\} \sigma_2^{-1}\phi\, [\sigma_2^{-1}(y_{21} - x_{21}'\beta_2)].$$

En conclusión, como se desprende de la Tabla II y del análisis más detallado que hemos expuesto de los tipos 1 y 2 de modelos tobit, los métodos de máxima verosimilitud conducen en estos modelos a problemas de optimización no lineal que hay que resolver generalmente mediante procedimientos numéricos iterativos. Y tanto si se utilizan métodos directos, que buscan el óptimo evaluando sólo la función a maximizar, como si se utilizan métodos de gradiante, que evalúan no sólo la función a maximizar

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

sino también el gradiente, y en algunos casos el hessiano, se necesita disponer de una expresión numérica finita para la función de distribución de la normal estándar.

En trabajos prácticos en los que era necesario la computación de alguno de los modelos descritos en la sección 3, hemos utilizado subrutinas de optimización de la librería NAG y allí donde fue preciso una expresión finita para la función de distribución de la normal estándar, hemos aplicado con éxito numérico las ideas de la sección 2, y en concreto la aproximación (6).

BIBLIOGRAFIA

[1] I. MAULEON: Problemas prácticos en el tratamiento econométrico de datos cross-action. Investigaciones económicas XI, 41-94 (1987).[2] PADE, H.: Sur la représentation approché d'une fonction par des fractions rationnelles, Ann. Ec. Norm. Sup. 9 (1892).

[3] C. BREZINSKI: "Padé-type Approximations and General Orthogonal Polynomials". Birkhaüser, 1980.

[4] A. DRAUX: "Polynomes Orthogonaux Formels. Applications". Springer Lecture Notes in Mathematics, 974 (1983).

[5] P. GONZALEZ-VERA: "Sobre Aproximantes tipo Padé en dos puntos". Tesis Doctoral. Facultad de Matemáticas. Universidad de La Laguna (1985).

[6] C. GONZALEZ-CONCEPCION y G. GUIRAO-PEREZ: Comparación de estimadores en Modelos de Regresión Truncados. Documento de Trabajo, No.3. Facultad de C.C.E.E., Universidad de La Laguna (1988).

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

[7] C. GONZALEZ-CONCEPCION y G. GUIRAO-PEREZ: Simulación del comportamiento del estimador de Máxima Verosimilitud en Modelos de Regresión Censurados Heteroscedásticos. II Jornadas de Modelización Económica. Barcelona, 63-75 (1987).

[8] J. TOBIN: Estimation of Relationships for limited dependent variables. Econometrica 26, 24-36 (1958).

[9] T. AMEMIYA: Tobit Models: A survey. Journal of Econometrics, 24, 3-61 (1984).

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017