Juegos matemáticos en la enseñanza[1]

Miguel de Guzmán Ozámiz

A good mathematical joke is
better and better mathematics
than a dozen mediocre papers
(J.E. Littlewood, A Mathematician´s Miscellany).

Matemáticas y juegos

¿Dónde termina el juego y dónde comienza la matemática seria? Una pregunta capciosa que admite múltiples respuestas. Para muchos de los que ven la matemática desde fuera, ésta, mortalmente aburrida, nada tiene que ver con el juego. En cambio, para los más de entre los matemáticos, la matemática nunca deja totalmente de ser un juego, aunque además de ello pueda ser otras muchas cosas.

El juego bueno, el que no depende de la fuerza o maña físicas, el juego que tiene bien definidas sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático. Las diferentes partes de la matemática tienen sus piezas, los objetos de los que se ocupa, bien determinados en su comportamiento mutuo a través de las definiciones de la teoría. Las reglas válidas de manejo de estas piezas son dadas por sus definiciones y por todos los procedimientos de razonamiento admitidos como válidos en el campo. Cuando la teoría es elemental, estos no son muchos ni muy complicados y se adquieren bien pronto, lo cual no quiere decir que el juego sea trivial. Elemental quiere decir cerca de los elementos iniciales y no necesariamente simple. Existen problemas elementales desproporcionadamente complicados con respecto a su enunciado. Un ejemplo lo constituye el problema de averiguar el mínimo de las figuras en las que una aguja unitaria puede ser invertida en el plano por movimientos continuos. Cuando la teoría no es elemental es generalmente porque las reglas usuales del juego se han desarrollado extraordinariamente en número y en complejidad y es necesario un intenso esfuerzo para hacerse con ellas y emplearlas adecuadamente. Son herramientas muy poderosas que se han ido elaborando, cada vez más sofisticadas, a lo largo de los siglos. Tal es, por ejemplo, la teoría de la medida e integral de Lebesgue en el análisis superior.

---

[1] Este artículo se publico originariamente en las *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas,* que se celebraron en Santa Cruz de Tenerife del 10 al 14 Septiembre 1984 y que supuso la primera colaboración de Miguel con la Sociedad Canaria «Isaac Newton»de Profesores de Matemáticas.

La matemática así concebida es un verdadero juego que presenta el mismo tipo de estímulos y de actividad que se da en el resto de los juegos intelectuales. Uno aprende las reglas, estudia las jugadas fundamentales, experimentando en partidas sencillas, observa a fondo las partidas de los grandes jugadores, sus mejores teoremas, tratando de asimilar sus procedimientos para usarlos en condiciones parecidas, trata finalmente de participar más activamente enfrentándose a los problemas nuevos que surgen constantemente debido a la riqueza del juego, o a los problemas viejos aún abiertos esperando que alguna idea feliz le lleve a ensamblar de modo original y útil herramientas ya existentes o a crear alguna herramienta nueva que conduzca a la solución del problema.

Por esto no es de extrañar en absoluto que muchos de los grandes matemáticos de todos los tiempos hayan sido agudos observadores de los juegos, participando muy activamente en ellos, y que muchas de sus elucubraciones, precisamente por ese entreveramiento peculiar de juego y matemática, que a veces los hace indiscernibles, hayan dado lugar a nuevos campos y modos de pensar en lo que hoy consideramos matemática profundamente seria.

Impacto de los juegos en la historia de la matemática.

La historia antigua no ha sido inclinada a preservar sino los elementos solemnes de la actividad científica, pero uno no puede menos de sospechar que muchas de las profundas cavilaciones de los pitagóricos, por ejemplo alrededor de los números, tuvieron lugar jugando con configuraciones diferentes que formaban con las piedras. El llamado *problema bovino de Arquímedes*, álgebra hecha con procedimientos rudimentarios, tiene un cierto sabor lúdico, así como otras muchas de sus creaciones matemáticas originales. *Euclides* fue, al parecer, no sólo el primer gran pedagogo que supo utilizar, en una obra perdida llamada *Pseudaria* (Libro de Engaños), el gran valor didáctico en matemática de la sorpresa producida por la falacia y la aporía.

En la Edad Media *Leonardo de Pisa* (ca.1170-ca.1250), mejor conocido hoy y entonces como Fibonacci, cultivó una matemática numérica con sabor a juego con la que, gracias a las técnicas aprendidas de los árabes, asombró poderosamente a sus contemporáneos hasta el punto de ser proclamado oficialmente por el emperador Federico II como *Stupor Mundi*.

En la Edad Moderna *Gerónimo Cardano* (1501-1576), el mejor matemático de su tiempo, escribió el *Líber de ludo aleae*, un libro sobre juegos de azar, con el que se anticipó en más de un siglo a Pascal y Fermat en el tratamiento matemático de la probabilidad. En su tiempo, como tomando parte en este espíritu lúdico, los duelos medievales a base de lanza y escudo dieron paso a los duelos intelectuales consistentes en resolver ecuaciones algebraicas cada vez más difíciles, con la participación masiva, y más o menos deportiva, de la población estudiantil, de Cardano mismo y otros contendientes famosos como Tartaglia y Ferrari.

El famoso problema del Caballero de Meré, consistente en saber cómo deben ser las apuestas de dos jugadores que, habiendo de alcanzar n puntos con sus dados, uno ha obtenido p y el otro q puntos en una primera jugada, fue propuesto por Antoine Gobaud, Caballero de Meré (1610-1685) a Pascal (1623-1662). De la correspondencia entre éste y Fermat (1601-1665) a propósito del problema surgió la moderna teoría de la probabilidad.

Leibniz (1646-1716) fue un gran promotor de la actividad lúdica intelectual: "Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de los juegos... Sería deseable que se hiciese un curso entero de juegos, tratados matemáticamente", escribía en una carta en 1715. Y en particular comenta en otra carta en 1716 lo mucho que le agrada el ya entonces popular solitario de la cruz, y lo interesante que le resulta el jugarlo al revés.

En 1735, Euler (1707-1783), oyó hablar del problema de los siete puentes de Königsberg, sobre la posibilidad de organizar un paseo que cruzase todos y cada uno de los puentes una sola vez (camino euleriano). Su solución constituyó el comienzo vigoroso de una nueva rama de la matemática, la teoría de grafos y con ella de la topología general.

También el espíritu matemático de la época de Euler participaba fuertemente del ánimo competitivo de la época de Cardano. *Johann Bernoulli* (1667-1748) lanza el problema de la braquistócrona como un reto a los mejores matemáticos de su tiempo. En este duelo participaron con ardor nada menos que Jakod Bernoulli (creador, precisamente con su solución al problema, del cálculo de variaciones) Leibniz, Newton y Huygens.

Se cuenta que *Hamilton* (1805-1865) sólo recibió dinero directamente por una de sus publicaciones y ésta consistió precisamente en un juego matemático que comercializó con el nombre de *Viaje por el Mundo*. Se trataba de efectuar por todos los vértices de un dodecaedro regular, las ciudades de ese mundo, un viaje que no repitiese visitas a ciudades circulando por los bordes del dodecaedro y volviendo al punto de partida (camino hamiltoniano). Esto ha dado lugar a un problema interesante en teoría de grafos que admiten un camino hamiltoniano.

Los biógrafos de *Gauss* (1777-1855) cuentan que el *Princeps Mathematicorum* era un gran aficionado a jugar a las cartas y que cada día anotaba cuidadosamente las manos que recibía para analizarlas después estadísticamente.

Hilbert (1862-1943) uno de los grandes matemáticos de nuestro tiempo es responsable de un teorema que tiene que ver con los juegos de disección: dos polígonos de la misma área admiten disecciones en el mismo número de triángulos iguales.

John von Neumann (1903-1957), otro de los matemáticos más importantes de nuestro siglo, escribió con Oskar Morgenstern en 1944 un libro titulado *Teoría de Juegos y Conducta Económica*. En él analizan los juegos de estrategia donde aparece en particular el teorema de *minimax*, pieza fundamental para los desarrollos matemáticos sobre el comportamiento económico.

Según cuenta Martin Gardner, Albert Einstein (1879-1955), tenía toda una estantería de su biblioteca particular dedicada a libros sobre juegos matemáticos.

El fundamento matemático de los juegos

Estas muestras del interés de los matemáticos de todos los tiempos por los juegos matemáticos, que se prodrían ciertamente multiplicar, apuntan a un hecho indudable con dos vertientes. Por una parte son muchos los juegos con un contenido matemático profundo y sugerente y por otra parte una gran porción de la matemática de todos los tiempos tiene un sabor lúdico que la asimila extraordinariamente al juego.

El primer aspecto se puede poner bien de manifiesto sin más que ojear un poco el repertorio de juegos más conocidos. *La aritmética* está inmersa en los cuadrados mágicos, cambios de monedas, juegos sobre pesadas, adivinación de números,... *La teoría elemental de números* es la base de muchos juegos de adivinación fundamentados en criterios de divisibilidad, aparece en juegos que implican diferentes sistemas de numeración, en juegos emparentados con el Nim,... *La combinatoria* es el núcleo básico de todos los juegos en los que se pide enumerar las distintas formas de realizar una tarea, muchos de ellos sin resolver aún, como el de averiguar el número de formas distintas de plegar una tira de sellos, el problema del viajante,... *El álgebra* interviene en muchos acertijos sobre edades, medidas, en el famoso juego de los 15, en el problema de las ocho reinas,... *La teoría de grupos*, en particular el grupo de Klein, es una herramienta importante para analizar ciertos juegos con fichas en un tablero en los que se "come al saltar al modo de las damas. *La teoría de grafos* es una de las herramientas que aparece más frecuentemente en el análisis matemático de los juegos. Nació con los puentes de Königsberg, se encuentra en el juego de Hamilton, da la estrategia adecuada para los acertijos de cruces de ríos, como el del pastor, la oveja, la col y el lobo, el de los maridos celosos, y resuelve también muchos otros más modernos como el de los cuatro cubos de la Locura Instantánea... *La teoría de matrices* está íntimamente relacionada también con los grafos y juegos emparentados con ellos. Diversas formas de topología aparecen tanto en juegos de sabor antiguo, como el de las tres granjas y tres pozos, como en juegos más modernos como los relacionados con la banda de Möbius, problemas de coloración, nudos, rompecabezas de alambres y anillas... *La teoría del punto fijo* es básica en algunos acertijos profundos y sorprendentes como el del monje que sube a la montaña, el pañuelo que se arruga y se coloca sobre una réplica suya sin arrugar,... *La geometría* aparece de innumerables formas en falacias, disecciones, transformación de configuraciones con cerillas, poliominós planos y espaciales,... *La probabilidad* es, por supuesto, la base de todos los juegos de azar, de los que precisamente nació. *La lógica* da lugar a un sinfín de acertijos y paradojas muy interesantes que llaman la atención por su profundidad y por la luz que arrojan sobre la estructura misma del pensamiento y del lenguaje.

Matemáticas con sabor a juego

Por otra parte resulta igualmente fácil señalar problemas y resultados profundos de la matemática que rezuman sabor a juego. Citaré unos pocos entresacados de la matemática más o menos contemporánea.

El teorema de Ramsey, en su forma más elemental, afirma que si tenemos 6 puntos sobre una circunferencia, los unimos dos a dos, y coloreamos arbitrariamente de rojo o de verde los segmentos que resultan, entonces, lo hagas como lo hagas, nos encontraremos conque algún triángulo de los formados por estos segmentos tiene los tres lados del mismo color.

El lema de Sperner, importante en la teoría del punto fijo, afirma que si en un triángulo ABC se efectúa una triangulación (Una partición en un número finito de triángulos tales que cada dos de ellos tienen en común un lado, un vértice, o nada) y se nombran los vértices de los triángulos de la triangulación con A, B, C, de modo que en el lado AB no haya más que las letras A ó B, en el AC nada más que A ó C y en BC nada más que B ó C, entonces necesariamente hay un triángulo de la triangulación que se llama ABC.

El teorema de Helly afirma que si en un plano hay un número cualquiera de conjuntos convexos y compactos tales que cada tres tienen un punto en común, entonces todos ellos tienen al menos un punto en común.

El problema de Lebesgue, aún sin resolver, pregunta por el mínimo del área de aquellas figuras capaces de cubrir cualquier conjunto del plano de diámetro menor o igual que 1.

El siguiente *problema de la aguja en un convexo tridimensional* está también aún abierto: ¿Cuál es el cuerpo convexo de volumen mínimo capaz de albergar una aguja de longitud 1 paralela a cada direción dada? Se sospecha, por analogía con el caso bidimensional, que es el tetraedro regular de altura 1, pero no hay demostración de ello.

Consecuencias para la didáctica de la matemática

La matemática es, en gran parte, juego, y el juego puede, en muchas ocasiones, analizarse mediante instrumento matemáticos. Pero, por supuesto, existen diferencias substanciales entre la práctica del juego y la de la matemática. Generalmente las reglas del juego no requieren introducciones largas, complicadas, ni tediosas. En el juego se busca la diversión y la posibilidad de entrar en acción rápidamente. Muchos problemas matemáticos, incluso algunos muy profundos, permiten también una introducción sencilla y una posibilidad de acción con instrumentos bien ingenuos, pero la matemática no es sólo diversión, sino ciencia e instrumento de exploración de su realidad propia mental y externa y así ha de plantearse, no las preguntas que quiere, sino las que su realidad le plantea de modo natural. Por eso muchas de sus cuestiones espontáneas le estimulan a crear instrumentos sutiles cuya adquisición no es tarea liviana. Sin embargo, es claro que, especialmente en la tarea de iniciar a los más jóvenes en la labor matemática, el sabor a juego puede impregnar de tal modo el trabajo, que lo haga mucho más motivado, estimulante, incluso agradable y, para algunos, aún apasionante. De hecho, como veremos, han sido numerosos los intentos de presentar sistemáticamente los principios matemáticos que rigen muchos de los juegos de todas las épocas, a fin de poner más en claro las conexiones entre juegos y matemáticas. Desafortunadamente para el desarrollo científico en nuestro país, la aportación española en este campo ha sido casi nula. Nuestros científicos y nuestros enseñantes se han tomado demasiado en serio su ciencia y su enseñanza y han considerado ligero y casquivano cualquier intento de mezclar placer con deber. Sería deseable que nuestros profesores, con una visión más abierta y más responsable, aprendieran a aprovechar los estímulos y motivaciones que este espíritu de juego puede ser capaz de infundir en sus estudiantes.

Notas sobre la literatura clásica sobre juegos

Los datos que siguen sobre la historia de la literatura sobre recreaciones matemáticas están tomados fundamentalmente del artículo de *Shaaf* en la *Encyclopaedia Britannica* titulado *Number Games and Other Mathematical Recreations*, que contiene una excelente exposición de los juegos más significativos y de las obras más importantes. Pienso que los más seriamente aficionados a los juegos matemáticos agradecerán estas breves notas y que servirán al mismo tiempo para que los más escépticos puedan comprobar al menos con qué tesón ha sido y es cultivado el campo en otros países.

Aunque en la Edad Media y comienzos de la Moderna se dieron algunos intentos esporádicos de formalización y análisis matemático de juegos, con Fibonacci (1202), Robert Recorde (1542) y Geronimo Cardano (1545), el gran primer sistematizador de donde bebieron abundantemente posteriores imitadores fue *Claude-Gaspar Bachet de Méziriac*, quien en 1612 publicó su obra de vanguardia en este campo *Problémes plaisans et delectables qui se font par les nombres*. A él mismo se debe también la publicación en francés de *Diophanti*, traducción de un texto griego sobre teoría de números que ejerció un gran influjo sobre la historia de la matemática, sobre todo a través de Fermat. El libro de recreaciones de Bachet estaba basado sobre todo en propiedades aritméticas y contiene los problemas más clásicos sobre juegos de cartas, relojes, determinación del número de pesas para pesar 1, 2, 3,..., 40 kilos, problemas de cruces,...

En 1624 un jesuita francés, Jean Leurechon, escribió bajo el seudónimo de van Etten, una obra, Recréations Mathématiques, fuertemente basada en la de Bachet, pero que tuvo mucho más éxito que la de éste, alcanzando las 30 ediciones ya en 1700. La obra de *van Etten* , una obra, *Recreátions Mathématiques*, fuertemente basada en la de Bachet, pero que tuvo más exito que la de éste, alcanzando las 30 ediciones ya en 1700. La obra de van Etten fue modelo para sus continuadores *Claude Mydorge* (1630), en Francia, y *Daniel Schwenter*, en Alemania. Este último, profesor de hebreo, lenguas orientales y matemáticas, añadió gran cantidad de material copilado por él mismo. Su obra póstuma apareció en 1636 con el título *Deliciae PhysicoMathematicae oder Mathematische und Philosophische Erquickstunden* y la reedición de ella en 1651-1653 fue por algún tiempo la obra más completa en su género.

Mientras tanto había aparecido en Italia en 1641-1642 la obra en dos volúmenes bajo el complicado título *Apiaria Universae philosophiae Mathematicae, in quibus paradoxa et nova pleraque machinamenta exhiebntur*, escrita por el jesuita Mario Bettini. Fue seguida en 1660 por un tercer volumen Recreationum Mathematicarum Apiaria Novissima...

En Inglaterra *William Leybourn* publica en 1694 un libro a medio camino entre el texto y la recreación, con la intención de "apartar a la juventud de los vicios propios a los que es inclinada". Su título fue *Pleasure with Profit: Consisting of Recreations of Divers Kinds*...

La obra que realmente marca la pauta para los muchos autores que aparecerán en los siglos 18 y 19 fue la de Jacques Ozanam, quien en 1694 publicó

Récréations Mathématiques et Physiques, obra inspirada en las de Bachet, Leurechon, Mydorge y Schwenter, que fue revisada más tarde por el historiador de la matemática *Montucla.*

Al final del siglo 19 aparecen los cuatro volúmenes de *Edouard Lucas*; especialista en teoría de números, titulados *Récréations mathematiques* (1882-1894), que pasa a ser la obra clásica durante algún tiempo. Contemporaneo de Lucas es *Lewis Carroll*, el autor de Alicia, gran aficionado a los puzzles lógicos y juegos matemáticos quien publicó, entre otras cosas, *Pillow Problems y A Tangled Tale* (1885-1895).

En la primera mitad del siglo 20 los nombres más importantes en América son los de los dos *Sam Loyd*, padre e hijo, grandes especialestas en puzzles mecánicos, autores del famosísimo juego de los 15, que en su tiempo causó un furor parecido al del cubo de Rubik en nuestros días. En Alemania se destacan *Hermann Schubert* con sus *Zwölf Gedulspiele* (1907-1909) en tres volúmenes, así como *Wilhelm Ahrens* con sus dos volúmenes *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* (1904-1920). En Inglaterra se destacan *Henry Dudeney* (1917-1967) y sobre todo la gran obra de *W.W. Rouse Ball*, *Mathematical Recreations and Essays* (1892, primera edición), otro de los clásicos, con gran erudición histórica, en cuyas páginas puede apreciarse documentadamente, a través de las numerosas notas, el impacto de los juegos sobre los matemáticos y las matemáticas de todos los tiempos. El geómetra *H.S.M. Coxeter* revisó en 1938 la undécima edición. En Bélgica hay que destacar a *Maurice Kraitchik*, editor de la revista Sphinx y compilador de varios libros entre 1900 y 1942. En Holanda se destaca también *Fred. Schuh*, con su obra *Wonderlijke Problemen*, publicada en 1943.

A partir de los años 50 *Martin Gardner* comenzó a publicar con gran éxito su artículo mensual en las páginas de *Scientific American* y su nombre, gracias a la difusión de esa revista y a las compilaciones sucesivas, ocho hasta el presente, de sus mejores artículos, ha llenado con enorme éxito el campo hasta finales de los años 70. De las obras más recientes hay que destacaar especialmente la de *Berlekamp*, *Conway* y *Guy*, titulada *Winning Ways*, en dos volúmenes, publicada en 1982, que por su amplitud, sistematización y profundidad, alcanzará sin duda un gran éxito entre los aficionados más concienzudos.

Utilización de los juegos en la enseñanza

¿Se pueden utilizar los juegos matemáticos con provecho en la enseñanza? ¿De qué forma? ¿Qué juegos? ¿Qué objetivos pueden conseguirse a través de los juegos?

Los juegos tienen un carácter fundamental de pasatiempo y diversión. Para eso se han hecho y ese es el cometido básico que desempeñan. Por eso es natural que haya mucho receloso de su empleo en la enseñanza. "El alumno, -piensa-, se queda con el pasatiempo que, eso sí, le puede comer el coco totalmente y se olvida de todo lo demás. Para lo que se pretende, es una miserable pérdida de tiempo".

A mi parecer, en cambio, ese mismo elemento de pasatiempo y diversión que el juego tiene esencialmente, debería ser un motivo más para utilizarlo generosamente. ¿Por qué no paliar la mortal seriedad de muchas de nuestras clases con una sonrisa? Si cada día ofreciésemos a nuestros alumnos, junto con el rollo cotidiano, un elemento de diversión, incluso aunque no tuviese nada que ver con el contenido de nuestra enseñanza, el conjunto de nuestra clase y de nuestras mismas relaciones personales con nuestros alumnos variarían favorablemente.

Pero es que además sucede que, por algunas de las razones apuntadas antes, relativas a la semejanza de estructura del juego mismo y de la matemática, avaladas por la historia misma de la matemática y de los juegos, y por otras razones que señalaré a continuación, el juego bien escogido y bien explotado puede ser un elemento auxiliar de gran eficacia para lograr algunos de los objetivos de nuestra enseñanza más eficazmente.

En mi opinión, el objetivo primordial de la enseñanza básica y media no consiste en embutir en la mente del niño un amasijo de información que, pensamos, le va a ser muy necesaria como ciudadano en nuestra sociedad. El objetivo fundamental consiste en ayudarle a desarrollar su mente y sus potencialidades intelectuales, sensitivas, afectivas, físicas, de modo armonioso. Y para ello nuestro instrumento principal debe consistir en el estímulo de su propia acción, colocándole en situaciones que fomenten el ejercicio de aquellas actividades que mejor pueden conducir a la adquisición de las actitudes básicas más características que se pretende transmitir con el cultivo de cada materia.

Por la semejanza de estructura entre el juego y la matemática, es claro que existen muchos tipos de actividad y muchas actitudes fundamentales comunes que pueden ejercitarse escogiendo juegos adecuados tan bien o mejor que escogiendo contenidos matemáticos de apariencia más seria, en muchos casos con claras ventajas de tipo psicológico y motivacional para el juego sobre los contenidos propiamente matemáticos.

Es un hecho frecuente que muchas personas que se declaran incapaces de toda la vida para la matemática, disfrutan intensamente con puzzles y juegos cuya estructura en poco difere de la matemática. Existen en ellas claros bloqueos psicológicos que nublan su mente en cuanto se percatan de que una cuestión que se les propone, mucho más sencilla tal vez que el juego que practican, tiene que ver con el teorema de Pitágoras. Estos bloqueos son causados muy frecuentemente en la niñez, donde a absurdas preguntas iniciales totalmente inmotivadas seguían respuestas aparentemente inconexas que hacían de la matemática una madeja inextricable cada vez más absurda y complicada.

Bien se puede pensar que muchas de estas personas, adecuadamente motivadas desde un principio, tal vez a través de esos mismos elementos lúdicos que están descargados del peso psicológico y de la seriedad temible de la matemática oficial, se mostrarían, ante la ciencia en general y ante la matemática misma en particular, tan inteligentes como corresponde al éxito de su actividad en otros campos diferentes.

Es claro que no todos los juegos que se encuentran en los libros de recreaciones matemáticas se prestan igualmente al aprovechamiento didáctico. Muchos son meras charadas y acertijos ingeniosos. Muchos otros se basan en la confusión intencionada del enunciado al modo de los oráculos sibilinos y dejan al final una impresión de mera tomadura de pelo. En otros casos la solución da la impresión de haber llegado por revelación divina que no cabe fácilmente en un esquema de pensamiento que pueda conducir a un método. Pero, como veremos, hay juegos que, de forma natural, resultan asequibles a una manipulación muy semejante a la que se lleva a cabo en la resolución sistemática de problemas matemáticos y que encierran lecciones profundamente valiosas.

Es mi intención presentar a continuación dos esquemas de posible utilización de los juegos en la enseñanza. El primero consiste en un ensayo de desarrollo heurístico a través de los juegos. Trataré de poner de manifiesto cómo lo que, a mi parecer, constituye la savia de las matemáticas y la manera más efectiva de acercamiento a ellas desde el punto de vista didáctico, la resolución de problemas, puede aprovecharse de la actividad con juegos bien escogidos. El segundo esquema presenta, a través de un listado de temas, actitudes y actividades matemáticas, cómo los juegos pueden utilizarse para motivar, enriquecer e iluminar la ocupación con ellas.

Lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas, matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en el que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha atraído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas apropiadas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas. Muchos de estos elementos pueden adquirirse igualmente en el enfrentamiento con los problemas que constituyen los juegos matemáticos.

Lo que sigue viene a ser, en sus líneas generales, un calco de las directrices fundamentales de la famosa obra de Polya ¿Cómo resolverlo?, ilustradas aquí con algunos juegos que a mí, espigando en la literatura, me han parecido adecuados. El objetivo de este esquema consiste simplemente en tratar de poner bien patente la semejanza de actitudes que se dan en la resolución de un puzzle o un juego y en la de un genuino problema matemático, y cómo, efectivamente, muchos de los hábitos adecuados para la tarea matemática podría no adquirirlos igualmente bien divirtiéndose con ejemplos escogidos de juegos. La elaboración de un curso completo de heurística en esta dirección sería un trabajo bien interesante que requeriría una inmersión a fondo en la abundante literatura existente a fin de analizar los juegos más apropiados para cada aspecto y para comprobar el rendimiento efectivo de esta actividad. Trataré en lo posible aquí de presentar ejemplos bien conocidos a fin de evitar introducciones que nos llevarían mucho tiempo.

A.- Directrices heurísticas basadas en juegos

Como resolverlo

1. ANTES DE HACER TRATARÉ DE ENTENDER. No pienses que es una observación del todo tonta. La experiencia dice que son muchos los que se lanzan a hacer cosas a lo loco, por si alguna da en el blanco por casualidad. ¿Sabes bien de qué va?

¿Cómo funcionan las diferentes partes del juego? Estúdialas una a una: forma del tablero, reglas, funcionamiento de las fichas...

Hazte una o varias figuras si te parece que te va bien.

Juega un poco con las fichas o las partes del juego según las reglas para familiarizarte con su forma de actuar.

2. TRAMARÉ UNA ESTRATEGIA. Busca conexiones con otros elementos que conozcas. Tal vez necesitarás construirte un juego auxiliar más simple que puedas resolver.

Al final de esta etapa deberías construirte un plan de ataque concreto.

Aquí tienes algunas observaciones y preguntas que te pueden ayudar en esta tarea.

Ya me lo sé. ¿Lo has visto antes? ¿Lo has visto en forma parecida al menos?

No me lo sé, pero conozco uno que... ¿Conoces algún juego semejante, relacionado con éste de alguna manera? ¿Sabes algo del otro que pueda ayudarte en éste?

¿Cómo marchaba aquél? Tienes un juego semejante en el que sabes cómo actuar. ¿Puedes usar la misma forma de proceder? ¿Puedes usar la misma idea que conduce allí a la solución? ¿Deberías introducir en éste alguna modificación que lo haga más semejante a aquél?

Empezar por lo fácil hace fácil lo difícil. ¿Puedes resolver al menos parte del juego? ¿Lo puedes hacer en circunstancias especiales, suponiendo por ejemplo que hubieras conseguido superar una etapa inicial? Supón que se te pide un poco menos, ¿puedes entonces?

Supongamos el problema resuelto... ¿Puedes tratar de recorrerlo hacia atrás? ¿Puedes pensar desde aquí en alguna pista?

Si hago esto, entonces queda así... A ver si puedo transformar el juego en otro más sencillo. Introduce tú mismo modificaciones en las reglas, en las condiciones... tratando de sacar alguna luz de estas modificaciones.

Me hago un esquema, me lo pinto en colores, me escribo una ecuación... Procura, por todos los medios a tu alcance tener un buen esquema de los puntos principales en la mente.

Veamos de nuevo... ¿Para qué son así las reglas? ¿Cuál es la mala (o buena) idea detrás de ellas? Fíjate de nuevo en la estructura del juego. Trata de encontrar pistas en la diferente función de las partes.

3. MIRARÉ SI MI ESTRATEGIA ME LLEVA AL FINAL. Trata de poner en práctica tus planes.

Ya tengo una idea. Vamos a ver si marcha. Lleva adelante tu estrategia con decisión. No te arrugues fácilmente. Si tienes varias ideas, pruébalas una a una, por orden. No las mezcles en un principio sin ton ni son.

No nos liemos... Probaré otra cosa. No te emperres demasiado en una sola estrategia. Si te lleva a una situación muy complicada, vuelve al paso segundo y busca otra estrategia. Probablemente hay otro modo más sencillo.

Lo conseguí... ¿Por casualidad? Si te va bien con tu estrategia, estúdiala detenidamente para convencerte de que no es por casualidad.

4. SACARÉ JUGO AL JUEGO. No consideres que ya has terminado del todo cuando lo has resuelto. Míralo a fondo. Aprovecha tu solución para asimilar bien la experiencia.

No sólo sé que va, sino que veo por qué va. Trata de localizar la razón profunda del éxito de tu estrategia.

Con los ojos cerrados. Mira a ver si con la luz que ya tienes encuentras otra estrategia, otra solución más simple.

Ahora veo la astucia de las reglas. Trata de entender, a la luz de tu solución, qué lugar ocupan las condiciones y reglas del juego.

Además con esto gano a aquel otro juego. Mira si otros juegos semejantes funcionan también con el mismo principio que has encontrado.

Me hago otro juego... y lo patento. Constrúyete un juego semejante al que has resuelto modificando sus piezas o sus reglas y mira si tu principio vale aquí también.

A continuación trataré de ilustrar algunas de las observaciones anteriores con juegos concretos.

¿Cómo marchaba aquél?

Un pastor, con una col, una oveja y un lobo (se supone que hasta cierto punto amaestrado) se encuentra a la orilla de un río que quiere atravesar. Hay en su orilla una barca en la que cabe él y una sola de sus pertenencias al tiempo. ¿Cómo se las ingeniará para pasarlas todas? Si deja solas a un lado oveja y col, ésta será liquidada rápidamente por la oveja. Si deja oveja y lobo solos a un lado, el lobo se zampará a la oveja. En cambio al lobo no le atrae nada la col y bien se puede quedar solo con ella. El problema es clásico y fácil de resolver sin grandes esfuerzos sistemáticos. Pero existe una solución sencilla acudiendo, como sucede en muchas ocasiones en que se trata de realizar secuencialmente un conjunto de tareas, a la teoría de grafos.

Apuntamos las posibles situaciones de las pertenencias del pastor en la orilla inicial I sin que le desaparezca nada. Así:

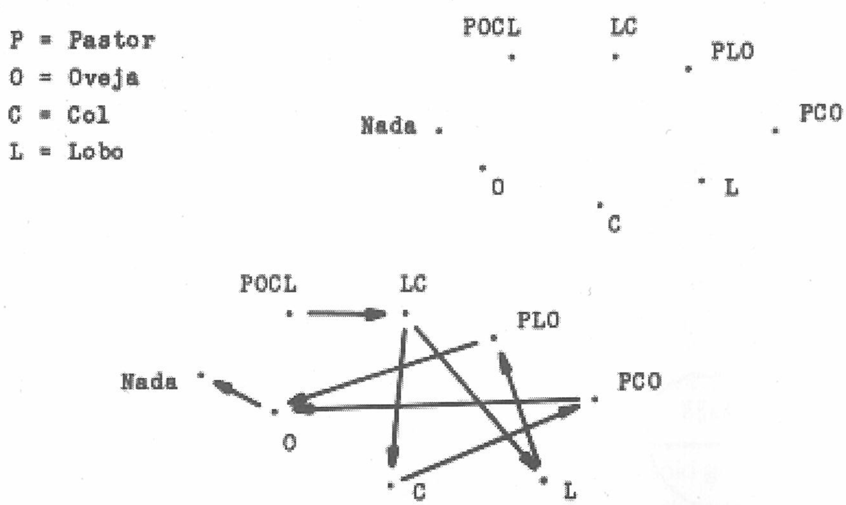


Fig. 1

Señalamos con una flecha los posibles pasos de una situación a otra según la regla del juego, es decir que en la barca sólo pueden cruzar el pastor y una sola de sus pertenencias. Así se obtiene el grafo de la figura.

Nuestro problema ahora consiste en hallar un camino de flechas desde POCL hasta Nada. En el cuadro es evidente que hay solamente dos posibilidades

(1) POCL - LC - L - PLO - O - Nada

(2) POCL - LC - C - PCO - O - Nada

La interpretación de las operaciones que el pastor ha de hacer es clara. Cualquiera que haya visto esta solución y se enfrente ahora con el también clásico problema de los dos maridos celosos, tendrá muy claro cómo debe de proceder. El problema consiste en resolver la dificultad con que se encuentran dos maridos A,B que llegan con sus respectivas esposas a, b a la orilla de un río que quieren cruzar.

Hay una barca en la que sólo caben dos personas al tiempo. El problema sería más fácil, si no fuera porque los dos maridos son tan celosos que no pueden sufrir que la esposa esté ni un momento en compañía de otro hombre sin estar él delante. ¿Cómo podrán arreglárselas?

Escribimos como antes las distintas situaciones posibles y unimos con una flecha aquellas que son alcanzables desde otras según las reglas.

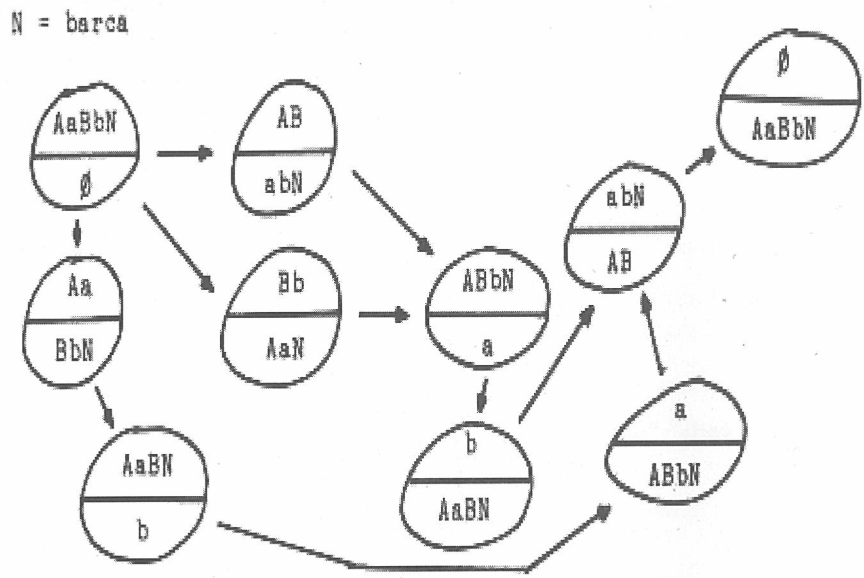


Fig. 2

De esta forma no sólo podemos encontrar una solución, sino que podemos obtenerlas todas y escoger la mejor, si es que hay alguna mejor.

Empezar por lo fácil hace fácil lo difícil

En un tablero de ajedrez se tapan dos cuadros de los extremos de una diagonal. Quedan 62 cuadros. Se tienen 31 fichas de dominó o de papel, cada una capaz de cubrir dos cuadros contiguos. Se pide colocar, si se puede, las fichas de dominó de modo que cubran exactamente los 62 cuadros del tablero.

Si empezamos por colocar fichas al buen tuntún, sin pensar un poco antes, pronto nos encontraremos en un buen lío, porque aquí se puede efectivamente empezar a hacer cosas sin sistema y llegar bastante lejos cubriendo el tablero. Pero nuestros intentos sucesivos van fracasando y aconsejándonos que recapacitemos...

El tablero es grande, hay muchas posibilidades. ¿Y si nos construímos uno más modesto e intentamos allí un problema semejante? Tal vez el tablero 2X2, 3X3, 4X4,... En el tablero 2X2 pronto nos damos cuenta de que lo que se pide es imposible sin partir en dos una ficha. Los dos cuadros que quedan están en una diagonal y no hay forma de cubrirlos con una ficha de dominó. En el tablero 3X3 el juego no tiene sentido, pues si se cubren 2 cuadros, quedan 7 que no pueden ser cubiertos ni con tres fichas ni con cuatro exactamente. En el tablero 4X4 no existe este problema, pero la experiencia del tablero 2X2 nos puede hacer pensar en la imposibilidad aquí también... ¡Sí! En el de 4X4 se quitan dos cuadros de una diagonal, dos cuadros por tanto del mismo color, como sucedía en el de 2X2. Quedan 8 cuadros de un color y 6 del otro. Pero una ficha de dominó bien colocada cubre necesariamente un cuadro blanco y otro negro... Así es imposible cubrir el tablero. Y esto mismo sucede en el caso 8X8, 10X10,.. Además esto va a suceder siempre que quitemos dos cuadros del mismo color.

Este principio de *empezar por lo fácil* es de amplia aplicación. Las dificultades provienen a menudo de la complejidad de la estructura que nos encubre los rasgos básicos. Éstos quedan muy a menudo más claros en un problema semejante más sencillo. Descubierto aquí el principio, éste puede ser aplicado al caso más complicado. La dificultad puede consistir en encontrar un problema más sencillo que el propuesto que, con todo, conserve sus rasgos fundamentales.

Otras veces la solución del problema sencillo es útil, no sólo porque revele un principio que puede ser utilizado para el problema original, sino porque constituye una parte, un escalón en el que nos podemos apoyar para resolver el problema inicial.

En el conocido problema de los 15 se tiene un cuadrado 4x4 en el que se pueden deslizar 15 cuadraditos 1x1 numerados del 1 al 15 utilizando el hueco restante. Se presenta el cuadrado con los números desordenados.

Se pide colocarlos en orden con el hueco en la esquina del SE (ver figura 3).

Al acudir a un problema más sencillo, por ejemplo un cuadrado 2x2 con tres cuadraditos 1x1, se puede uno percatar fácilmente de que el problema propuesto es a veces insoluble y trivial cuando es soluble. Si acudimos al problema semejante de un rectángulo 3x2 con cinco piezas podemos encontrar fácilmente una estrategia para resolver aquí cualquier problema soluble. Resuelto este problema ya tenemos una estrategia para el original de los 15, observando que en tablero de los 15 podemos dejar fijas todas las fichas excepto las de un rectángulo 3x2 o 2x3 en el que colocamos el hueco y con esta flexibilidad resolvemos fácilmente cualquier problema soluble. ¿Sabrías determinar cuáles son los problemas solubles y los insolubles?

Supongamos el problema resuelto.

Se dan las siguientes figuras A y B (ver figura 4)

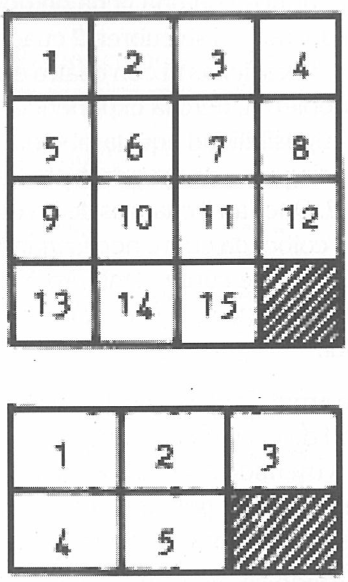


Fig. 3

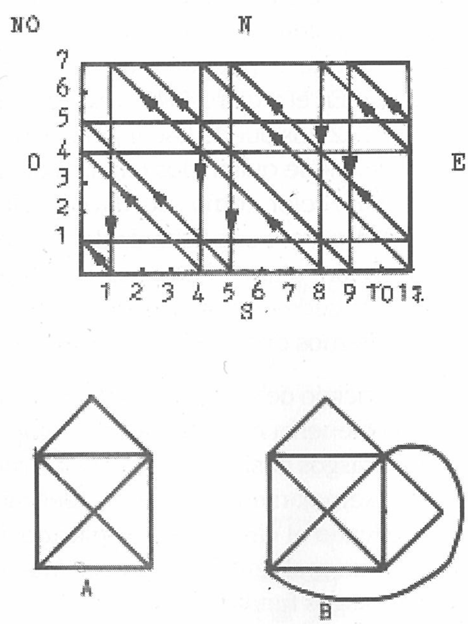


Fig. 4

¿Puedes trazarlas sin levantar el lápiz del papel, sin repetir dos líneas y saliendo y terminando en un mismo vértice?

Las dos figuras se pueden trazar sin levantar el lápiz del papel, pero A parece resistirse más a un camino que termina en el punto de partida. ¿Por qué? Supongamos que en A hubiese tal camino, es decir, supongamos el problema resuelto. Entonces, cada vez que llegamos a un vértice de paso en nuestro camino (no inicial ni final), salimos de él por una línea distinta no recorrida antes. Así cada vértice de paso tiene que tener un número par de arcos que concurren en él. También en el vértice de salida tienen que concurrir un número par de arcos, el arco de salida, el arco de llegada y el número par de arcos correspondientes a los pasos por él. Como A tiene los dos vértices de abajo con tres líneas concurrentes en cada una de ellos, el trazado pedido es imposible.

Me hago un esquema, me lo pinto en colores, me escribo una ecuación....

Una forma adecuada de representación de un juego puede dar un método para resolverlo y para resolver al tiempo muchos otros semejantes.

De entre los problemas clásicos de Bachet, tal vez los más conocidos son los relativos a medidas. Consideremos el siguiente: Se tienen junto a una fuente una medida de 7 litros y otra de 11. Pero nosotros necesitamos medir exactamente dos litros.

¿Cómo?

Existe una representación gráfica muy útil en los problemas de este tipo (ver figura 4).

Las coordenadas horizontales indican la situación del recipiente de 11 litros. Las verticales la situación del de 7 litros. Las flechas horizontales hacia el E indican que se va llenando el recipiente de 11 litros, las oblicuas hacia el NO indican que del de 11 litros se va trasvasando al de 7 litros. Las flechas verticales hacia el S indican que el de 7 se vacía de lo que contiene.

La sucesión de operaciones queda bien clara por el diagrama siguiendo las flechas desde la esquina SE hasta el momento en que llegamos al otro punto gordo de la figura (el de 11 conteniendo 2 litros):

Se llena el de 11 (punto gordo de salida) y se pasa todo lo que se puede al de 7 (línea NO). Se vacía el de 7 (linea hacia S). Se echan los 4 que hay en el de 11 en el de 7 (línea NO). Se llena el de 11 (línea hacia E). Se trasvasa del de 11 al de 7, que contenía 4 (línea NO), quedando 8 en el de 11...

Ya hemos visto también cómo los problemas clásicos sobre cruces pueden tratarse con una gráfica adecuada. También los problemas sobre pesas admiten un tratamiento semejante.

Veamos de nuevo... ¿Para qué son las reglas así? ¿Cuál es la mala o buena idea detrás de ellas?

Escribe, sin que yo lo vea, un número de tres cibras abc. Repítelas y forma el número de 6 cifras abcabc. Divídelo por 7. Divide el resultado por abc. Divide el resultado por 11. Lo que te resulta es 13.

Si alguien te hace el jueguecito y no lo conoces, te deja un poco perplejo. Para salir de tu sorpresa, sigue la receta de arriba. El número abcabc se puede dividir por 7, por 11, por 13, es decir por 7x11x13=1001. Además abcabc es divisible por abc...¿Quién es abcabc? ¿Qué tiene que ver con el número 1001?... Fácil: abcabc=abcx1001+abc= abcx1001. Ahora sí que está clara la cosa. ¿Podrías inventar un juego parecido con el mismo principio?

Muchos de los puzzles de alambres y cuerdas llevan en su misma estructura la pista adecuada para dar con la solución. Por ejemplo el siguiente de las guindas:

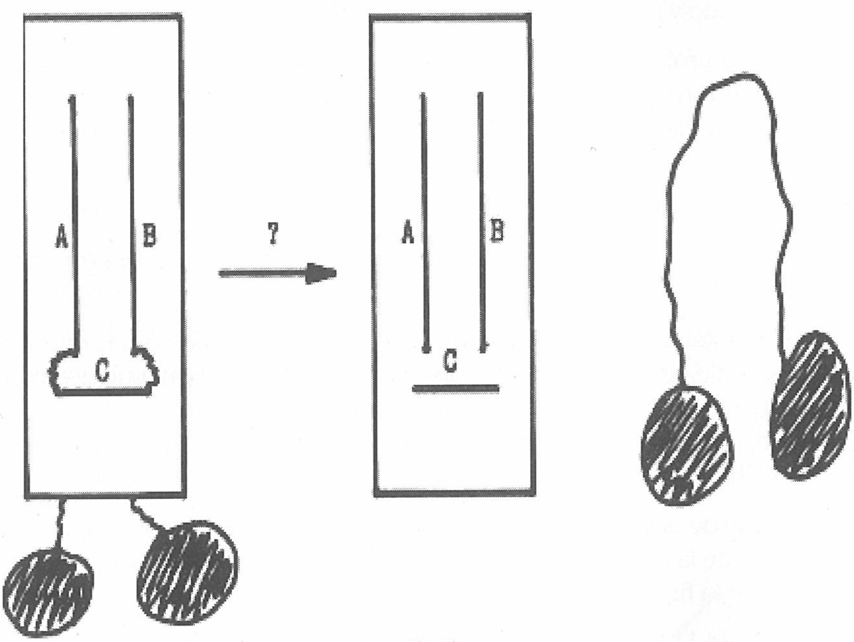


Fig. 5

Las dos cuerdas están unidas por una cuerda. El rectángulo es de papel con los tres cortes indicados A, B, C. Las guindas son muy grandes para pasar por C sin romper el papel. ¿Cómo separar las guindas del papel?

No sólo sé que va, sino que veo por qué va.

El juego de Nim consiste en lo siguiente. Se ponen tres montones de piedrecillas, uno con 3, otro con 4, otro con 5. Juegan dos jugadores A y B. El primero en jugar, A, puede quitar tantas piedras como quiera (siempre una o más) de uno sólo de los tres montones. Luego juega B del mismo modo. Gana quien se lleve la última piedra.

Tal vez te haya contado alguien la estrategia infalible que tiene A. Se ponen en sistema binario los números de piedras de cada montón. Al empezar éstos son

3........................... 1

4........................... 100

5........................... 101

La estrategia consiste en quitar las piedras que haga falta del montón adecuado para que los unos de cada columna de los números en sistema binario sumen un número par. Así, aquí se pueden quitar dos piedras del montón de 3 y queda

1........................... 1

4........................... 100

5........................... 101

El primer jugador gana necesariamente siguiendo esta misma estrategia cada vez que le toque jugar.

¿Te has parado a pensar alguna vez por qué marcha? ¿Por qué A puede llevar a cabo su estrategia haga B lo que haga? ¿Y si los montones tienen números de piedras diferentes a 3, 4, 5?

Si lo averiguas no te será difícil tal vez dar con la estrategia del juego de Moore, que es como el de Nim, pero pudiendo quitar las piedras que se quiera (siempre una o más) de uno o dos montones en cada turno.

Con los ojos cerrados. Consideremos ahora el juego siguiente con un montón de 40 piedras. Los jugadores A puede quitar 1, 2, 3, 4, ó 5 piedras a su antojo. Luego B puede quitar así mismo 1, 2, 3, 4, ó 5 piedras. Ahora le toca a A. Gana quien se lleve la última.

La estrategia de A consiste en dejar, siempre que no se pueda llevar todas la piedras que quedan, un número de piedras que sea multiplo de 6. Es claro que así B no puede ganar, y como gana alguien seguro, tiene que ser A quien gane. Una vez que A conoce la estrategia, no le hace falta hacer cuentas más que la primera vez que juega, en que quita 4 piedras, dejando 36. A partir de entonces su táctica es sencilla: si B quita m, A quita 6-m.

Y además, con esto gano a aquel otro juego...

En un tablero de ajedrez se señalan dos cuadros A y B. ¿Es posible pasearse con una torre por todo el tablero comenzando en A y terminando en B? Recordemos que la torre se mueve horizontal y verticalmente, nunca en oblicuo.

Por supuesto que uno piensa enseguida en jugar a lo mismo en un tablero más pequeño, como en el juego del ajedrez recortado que hemos visto antes y así resulta fácilmente que a veces, por ejemplo en un tablero 2X2 con A y B en dos esquina diagonalmente opuestas el paseo propuesto es imposible. Asimismo, quien conozca el uso que en el otro juego hemos hecho de los colores, puede pensar rápidamente en aplicar el mismo principio aquí. Si A y B son del mismo color, blanco por ejemplo, el paseo es imposible en el tablero 8X8. En efecto la torre va recorriendo sucesivamente blanco, negro, blanco, negro,... Así si el paseo terminase en blanco, el número de cuadros sería impar. En cambio será imposible el paseo en un tablero con un número impar de cuadros si A y B son de distinto color y también si son del mismo color si es que este color es el más escaso en el tablero. ¿Podrías dar con un teorema general y una estrategia para hacer el paseo siempre que se pueda?.

B. Directrices temáticas para el uso de los Juegos

Me ha parecido de interés elaborar un segundo esquema de utilización de juegos que, pienso, puede parecer a muchos más directamente aprovechable. En él trataré de señalar mediante ejemplos concretos cómo diversos temas y actitudes que nos ocupan en nuestra enseñanza a todos los niveles pueden ser motivados, ilustrados y enriquecidos mediante el uso de juegos. La disposición de este esquema será presentada alrededor de unas cuantas actitudes y núcleos temáticos propios de la actividad matemática. El campo es enormemente rico. Pienso que sería muy útil una experimentación sistemática y de equipo con estos y otros elementos para averiguar el valor efectivo de estas ideas a fin de comunicar los temas y actitudes deseadas.

Bajo cada epígrafe concreto menciono algunos juegos que, en mi opinión, pueden ayudar adecuadamente a mejor ponerlo de relieve. Ante la imposibilidad de exponer aquí el juego por extenso, he optado por indicar algún lugar, lo más asequible posible, en la literatura actual donde se puede acudir para obtener información detallada. La mayor parte de las referencias que doy se encuentran en los libros de Martin Gardner. Éste ha publicado hasta el presente ocho antologías de las mejores de sus contribuciones en *Scientific American*. Estas antologías serán citadas de la forma Gardner 1, Gardner 6, etc. Y en la bibliografía presentada en la tercera parte de mi trabajo se puede ver el título y referencia exacta. De las antologías de Gardner han sido traducidas al castellano, en Alianza Editorial, 3, 4, 7, 8, y también han sido publicados en castellano por Labor los dos libros suyos "Inspiración. ¡Ajá! Paradojas". Las otras referencias que daré, serán indicadas por completo en el lugar en que aparecen, o se pueden localizar fácilmente en la bibliografía que presento en la tercera parte.

1. Sorpresas matemáticas

"Por la admiración comenzó el hombre a filosofar", dijo Aristóteles, y la admiración y la sorpresa y la curiosidad siguen contándose entre los elementos motivadores más fuertes de nuestra actividad intelectual. Cualquiera de nosotros que explore un poco en el origen de nuestro interés por las matemáticas encontrará sin duda instantes de sorpresa y admiración ante ciertos hechos matemáticos que nos han llamado poderosamente la atención. Los hay a todos los niveles, elementales, menos elementales, simples, más sofisticados,... En la enseñanza la motivación es el motor esencial. ¿Por qué no apoyarnos en los elementos más adecuados para ponerlo en marcha con energía? Incluso cuando se trata de hechos que no pueden ser explicados plenamente, éstos pueden presentar aspectos de misterio que motiva fuertemente el interés por saber más para desvelarlo plenamente.

Dentro de lo que constituye el contenido matemático propiamente dicho, existen multitud de hechos con carácter de sorpresa. He aquí algunos.

1.1. Las tres mediatrices de los lados de un triángulo concurren; las tres alturas también; las tres bisectrices también.

1.2. Teorema de Desargues; teorema del hexagrama místico de Pascal (Guzman, Mirar y Ver, Cap.7).

1.3. Teorema de Steiner: Se dan dos círculos E, I, uno, I, interior al otro, E. Se traza un círculo C_1, tangente a los dos, luego otro C_2, tangente a C_1, E, I, luego otro C_3, tangente a C_2, E, I, y así hasta C_n, tangente a C_{n-1}, E, I. Supongamos que al hacerlo resulta además que C_n es tangente a C_1*, obtenemos asimismo una cadena $C_1^*, C_2^*, ..., C_n^*$ tangente a C_1^*. (La demostración resulta fácil mediante una inversión que transforme E, I, en círculos concéntricos).

1.4. Teorema de Poncelet: Se dan dos círculos E, I, con I interior a E. Se traza una secante S_0S_1 en E que sea tagente a I, luego otra distinta S_1S_2 asímismo tangente a I,... hasta obtener $S_{n-1}S_n$. Supongamos que Sn coincide son S_0. Entonces si repetimos la operación con otro S_0^* inicial, obtenemos una cadena de secantes $S_0^*S_1^*, S_1^*S_2^*, ..., S_{n-1}^*S_n^*$, y resulta también que S_n^* coincide con S_0*. (A pesar de la semejanza con el teorema de Steiner, el modo de demostración es distinto. Éste es un hecho importante en la historia de la geometría algebraica) (Schoenberg I.J., Mathematical Time Exposures, The Mathematical Association of America, Washington D.C., 1982; Cap.14).

1.5. Si tres círculos del plano son tangentes dos a dos, existe un cuarto círculo tangente a los tres (fácil por inversión).

1.6. El collar de las seis perlas. Se tienen tres esferas tangentes dos a dos exteriormente. Se comienza a ponerles un collar de perlas eféricas de distinto tamaño en general del siguiente modo. Primero se traza una esfera cualquiera E_1 tangente exteriormente a las tres (hay muchas). Luego trazamos otra E_2 tangente exteriormente a las tres y a E_1(sólo hay una). Continuamos con otra E_3 tangente a las tres y a E_2. Etc... Entonces, sea cual sea E_1, siempre este collar se cierra con E_6 tangente a E_1 (demostración fácil por inversión).

1.7. Hay infinitos números primos.

1.8. Proceso diagonal de Cantor. El conjunto de palabras infinitas de dos letras no es numerable. El conjunto de los números reales no es numerable.

1.9. Es posible hacer una partición de un cuadrado en cuadrados desiguales más pequeños, (Gardner 2, Cap. 17). En cambio, es imposible hacer una partición de un cubo en un número finito de cubos desiguales más pequeños, (Gardner 6, Cap. 21).

2. Cuentos con cuentas

Existen constelaciones de hechos matemáticos que se prestan para hacer de ellos una novela bien interesante. Me pregunto si el tiempo malgastado en muchos de nuestros rollos magistrales en los que tanto abundamos los profesores de matemáticas de todos los niveles no podría invertirse con gran provecho en contar pausadamente alguna de estas historias apasionantes del pensamiento humano. He aquí algunos temas:

2.1. El ábaco (Gardner 4, Cap.18).

2.2. Sección áurea, sucesión de Fibonacci, etc...(Gardner 4, Cap. 13);(Gardner 2, Cap.8).

2.3. Triangulo de Pascal (Gardner 7, Cap.15).

2.4. El número Pi (Gardner 3, Cap. 8).

2.5. El teorema de los cuatro colores (Guzmán, Cuentos con cuentas; Gardner 3, Cap.10).

2.6. Propiedades de la elipse (Guzmán, Cuentos con cuentas).

2.7. Hélice (Gardner 6, Cap.1).

2.8. Grafos (Gardner 6, Cap. 10; Ore, O. Graphs and their Uses, NML the Mathematical Association of America, Washington D.C., 1963).

2.9. Cicloide (Gardner 6, Cap. 13).

2.10. Propiedades del retículo de enteros (Guzmán, Mirar y ver, Cap.1).

2.11. Convexos, teorema de Helly, Minkowski,...(Guzmán, Mirar y ver, Cap 3,4,5).

2.12. Teorema del punto fijo y aplicaciones (Guzmán, Mirar y ver, Cap. 8, 9).

2.13. Banda de Möbius (Gardner 8, Cap. 8; Gardner 1, Cap 7).

3. Sistemas de numeración

Existen muchos juegos cuya base o cuya estrategia se encuentra en una adecuada utilización de diferentes sistemas de numeración.

3.1. Nim (Guzman, Cuentos con cuentas)

3.2. Averiguar un número mediante tarjetas basadas en el sistema binario (Gardner 3, Cap. 1; Guzmán, Nuestra escuela, Octubre 1984).

3.3. Las torres de Hanoi y el juego icosiano (Gardner 1, Cap. 6).

3.4. Uso del sistema ternario en juegos (Gardner 6, Cap. 11).

4. Criterios de divisibilidad

Los libros clásicos de Rouse Ball, Dudeney, Schuh, Kraitchik,... contienen muchos juegos basados en diferentes propiedades aritméticas.

4.1. Escribe un número cualquiera. Multiplícalo por 9. Tacha una cifra cualquiera distinta de 0. Dime lo que suman las restantes y yo te diré qué cifra es la tachada.

(Fácil: criterio de divisibilidad por 9).

4.2. El computador me ha escrito 15! por extenso, pero hay una cifra que no puedo leer. ¿Puedes decirme cómo averiguar rápidamente cuál es?. (Fácil: divisibilidad por 9 y por 11).

4.3. Averigua una estrategia para el siguiente juego. Dos jugadores A y B con un montón de piedrecillas. Juega A quitando 1 y 6. Juega B quitando de las que quedan entre 1 y 6,... Gana quien se lleva la última. (Otro juego: gana quien no se lleva la última)(La estrategia para el primer juego es dejar un número de piedras múltiplo de 7).

4.4. Escribe un número de tres cifras abc. Repítelas para formar uno de 6 abcabc. Divide por 7, divide lo que queda por abc, divide por 11. Te resulta 13.

5. Inducción

5.1. Torres de Hanoi. ¿Cuál es el número mínimo de movimientos? (Gardner 1, Cap.6).

5.2. Teorema de Euler C+V=A+2 (Guzmán, Cuentos con Cuentas).

5.3. Los puentes de Köngsberg (Guzmán, Mirar y Ver; Guzman, Cuentos con Cuentas).

5.4. Lema de Sperner (Guzmán, Mirar y Ver, Cap.7).

5.5. Falsa inducción: Rana Saltarina (Guzmán, Cuentos con Cuentas).

6. Contar sin contar

Una gran porción de la matemática se reduce a encontrar trucos para obtener información cuantitativa de una situación dada de la forma más sencilla posible.

Hay unos cuantos de ellos que, a pesar de su aparente trivialidad conducen a resultados verdaderamente profundos.

6.1. Principio de Dirichlet: Un palomar tiene 16 agujeros. Una bandada de 17 palomas se cuela en él. ¿Puedes sacar alguna conclusión interesante?

6.2. En cualquier momento dado hay en Madrid más de 20 personas con exactamente el mismo número de pelos en su cabellera (Hazte un palomar con 150.000 agujeros, número de pelos que como mucho soporta un mortal en su cabeza, y vete metiendo a cada madrileño en el agujero correspondiente a su número de pelos).

6.3. Teorema de Ramsey (versión sencilla): Se señalan 6 puntos sobre una circunferencia. Se trazan todos los segmentos que unen cada par de ellos. Se colorean de rojo o verde. Entonces, lo hagas como lo hagas, te encontrarás conque algún triángulo de los formados por estos segmentos tiene los tres lados del mismo color (Guzman, Contar, Nuestra Escuela, octrubre 1984).

6.4. Juegos de cartas con un principio aritmético (Guzmán, Contar, Nuestra Escuela, Octubre 1984; Gardner 1, Cap. 10).

6.5. Un truco topológico. Pinta un circuito cerrado con cruces todo lo complicado que quieras, como éste, sin que yo lo vea. Que no haya cruces triples, cuádruples,...

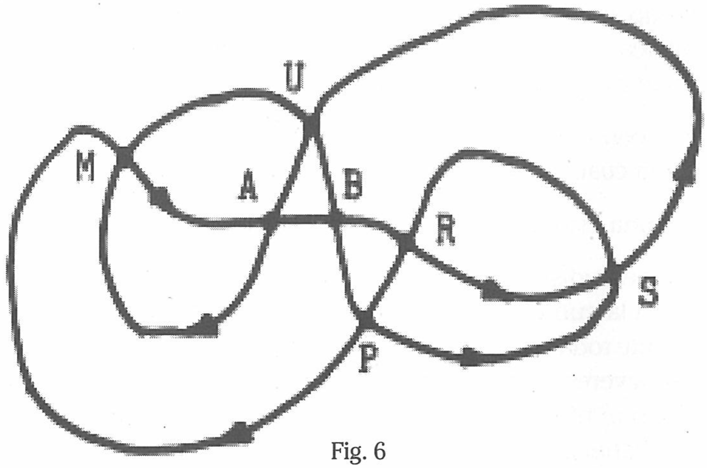


Fig. 6

Pon a cada punto de cruce una letra a tu antojo. Ahora recorre el circuito y vas diciéndome las letras. Cuando tú quieras cambias una vez las letras sucesivas para engañarme. Por ejemplo, en el de arriba me dices.

MA**RB**SUAMUBPSRP

y te adivino cuál es el cambiazo que me has dado (Me basta escribir las otras a medida que me las das una ariba y otra abajo de una raya, así

M R S A U P R

A B U M B S P

al observar que cada una está una vez arriba y otra abajo excepto las cambiadas R y B. Has cambiado B por R) (Gardner 3, Cap. 9).

6.6. La historia del pequeño Gauss. El maestro manda a su clase hallar la suma de los 100 primeros números. Quería tranquilidad para un rato largo. Gauss escribe inmediatamente algo así

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
S = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots\ldots\ldots\ldots + & 98 & + & 99 & + & 100 \\
S = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \ldots\ldots\ldots\ldots + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S= & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \ldots\ldots\ldots\ldots + & 101 & + & 101 & + & 101
\end{array}
$$

$$2S = 100x101 = 10100 \ ; \ S = 5050$$

7. Deducción lógica

El esqueleto de las matemáticas está compuesto por unos cuantos axiomas que se manipulan mediante el mecanismo raciocinante del hombre. Está bien que se sepa y que se ejerciten nuestros alumnos en la deducción, pero tratando al mismo tiempo de estimular los otros muchos aspectos de la matemática, intuición espacial, intuición numérica, imaginación, fantasía, actividad aventurera,...

7.1. ¿Podrías construirte un cuadrado mágico 2X2? ¿Uno 3X3? Busca estrategias para construir cuadrados mágicos (Garner 1, Cap. 2; Rouse Ball, Cap. 7).

7.2. Diseña una estrategia para jugar bien al Tres en Raya.

7.3. Un monje budista sale de su templo a las 5´30 de la mañana por una vereda hacia la cumbre de una montaña, donde llega por la tarde. Allí se queda durante toda la noche y a las 5´30 del día siguiente inicia el descenso por la misma vereda. Trata de demostrar que en el descenso ha estado en algún mismo punto del camino exactamente a la misma hora que el día anterior (Gardner 3, Cap. 20, Prob.4).

7.4. Toma dos alambres de la misma longitud, rectos. Uno lo pliegas como y cuantas veces quieras. Lo colocas luego doblado sobre el otro de modo que no sobresalga. Entonces, lo hagas como lo hagas hay un punto del alambre doblado que está donde estaba antes de empezar a plegar (Usa el teorema de Bolzano que dice esencialmente que si quieres cruzar un río y no tienes ni puente ni barca, tendrás que mojarte).

8. Elemental, querido Watson

He aquí algunos problemitas elementales que pueden servir para ejercitar el arte de resolver problemas de acuerdo con las normas heurísticas dadas anteriormente.

8.1. Sin trigonometría, sólo con geometría elemental, demostrar que en la figura 7, se tiene C=A+B

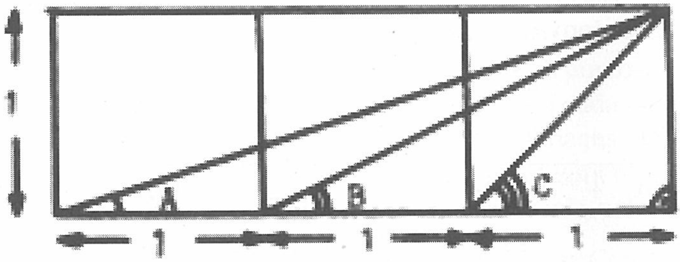


Fig. 7

Solución: Observa con atención la figura 8.

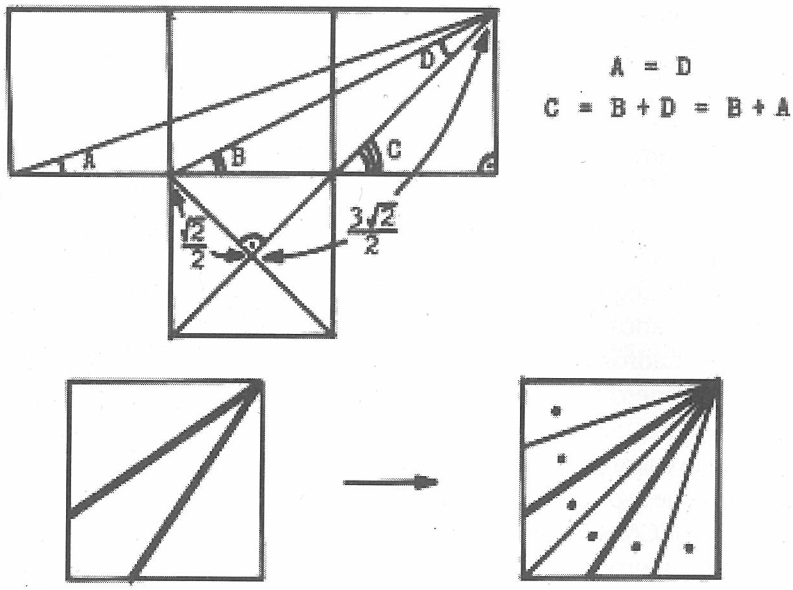


Fig. 8

8.2 Las dos rectas señaladas en la parte inferior de la figura 8 cortan al cuadrado en tres partes de igual área. ¿Cómo cortan a los lados? Sin hacer cuentas.

Basta observar la figura auxiliar siguiente con los segmentos adicionales que se han trazado dividiendo las áreas señaladas en dos partes iguales. Con ello es claro que las rectas originales van a parar a 1/3 del vértice opuesto.

8.3. En el interior de un círculo se da un millón de puntos. Demostrar que existe una recta que deja 500 000 puntos a cada lado. (Gardner 7, Cap, Prob.8).

8.4. Teoremas geométricos obtenidos cortando y doblando papel (Gardner 3, Cap.5; Donovan J., Matemáticas más fáciles con manualidades de papel, Distein, Madrid, 1975).

8.5. Tres círculos del mismo radio R pasan por un punto. Demostrar que los otros tres puntos de intersección de los círculos determinan otro círculo del mismo radio R.

(Polya, Mathematical Discovery, Wiley, New York, 1962).

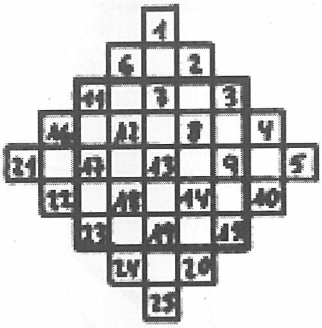
9. Simetría

La utilización de la simetría es técnica muy frecuente en matemáticas... y en juegos.

He aquí algunos ejemplos.

9.1. En el juego de Hex se puede demostrar que el segundo jugador no puede tener una estrategia para ganar (Gardner 1, Cap. 8).

9.2. Consideramos el siguiente juego para dos jugadores A y B, en el tablero de ajedrez con 32 rectángulos de papel, cada uno capaz de cubrir dos cuadros del tablero. Juega A colocando un rectángulo donde quiera, cubriendo dos cuadrados. Luego juega B cubriendo otros dos cuadros no cubiertos. Luego A... Pierde el primero que no pueda colocar un rectángulo que cubra dos cuadros. ¿Sabrías dar con una estrategia para alguno de los dos jugadores que le permita ganar siempre? (Fácil: simetría) ¿Cómo cambian las cosas si juegan en un tablero 8X7,..?



11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

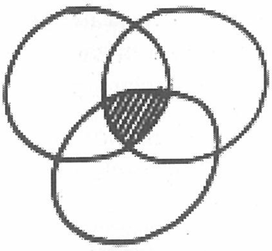


Fig. 9

9.3. Para construir cuadrados mágicos impares hay una técnica muy sencilla y fácilmente memorizable. Se amplía el cuadro, p.e. 5X5, como se indica en la figura 9, con las pirámides que he señalado.

A continuación se colocan los números oblicuamente, como lo he hecho arriba. Luego la pirámide superior se desliza hasta abajo del cuadro donde encaja perfectamente. Análogamente se procede con las otras pirámides. Así se obtiene un cuadro mágico 5X5.

¿Sabrias demostrar por qué sale siempre bien? (Estudia la simetría de la disposición inicial y a dónde va a parar cada número después).

9.4. Observa el diagrama tercero del a figura 9.

Los tres círculos tienen el mismo radio y cada uno pasa por el centro de los otros dos.

¿Podrías determinar si la zona rayada mide más o menos que 1/4 del área del círculo?

Sin cálculos. (Gardner 4, Cap. 15, Prob. 4).

9.5. En un billar ¿cómo llegar con una bola a otra sin efectos después de dos reflexiones sobre dos bandas? (Se halla el simétrico del punto de destino con respecto a la última banda, luego el simétrico de este punto con respecto a la primera banda que hay que tocar y este punto se une con el de partida, determinando así el comienzo de la trayectoria).

9.6. El problema de la araña y la mosca. Una araña en el interior de un vaso cilíndrico quiere llegar lo más rápidamente posible a una apetitosa mosca que está en el interior del vaso. ¿Le puedes indicar el recorrido que debe seguir? (Desenrrolla el cilindro y lo tendrás casi resuelto). ¿ Y si sustituimos el vaso cilíndrico por una caja de zapatos? ¿Cómo resuelves ahora el mismo problema?

9.7. ¿Cómo construir el triángulo de perímetro mínimo inscrito en un triangulo dado con un vértice en cada lado de él? (Guzman, Mirar y ver, Cap. 7).

10. Hazte un dibujo

Un dibujo, un esquema, algún tipo de representación adecuada, pueden ayudar extraordinariamente a aclarar las cosas, permitiendo ver mejor los rasgos esenciales, tener los datos pertinentes a mano, etc... Por eso es natural que los grafos sean un instrumento utilísimo en tantos juegos y problemas, tanto de la matemática como de la vida real. Ya hemos visto el uso de algunos en la sección heurística. He aquí alguno más.

10.1. Las veintiocho fichas de dominó se pueden colocar en hilera de acuerdo con las reglas del juego... ¡Faltaría más! ¿Puedes hacerlo si quitas las 7 fichas que tienen seis puntos? (Gardner 4, Cap. 12).

10.2. Solucción del puzzle de los 4 cubos de colores "Locura Instantánea" (Berlekamp y otros, Winning Ways vol. 2., p. 784).

10.3. Diversos juegos con grafos. (Gardner 6, Cap. 10; Ore, 0., Graphs ..their Uses, The Mathematical Association of America, Washington D.C. 1963).

11. Utilización de colores

11.1. Ajedrez recortado (ya citado antes) (Guzmán, Cuentos con cuentas).

11.2. Paseos con las torres comenzando en un cierto cuadro y terminando en otro prefijado. (Ver esquema heurístico).

11.3. Imposibilidad de un paseo hamiltoniano por los vértices del rombo dodecaedro.

(Se colorean los vértices de la malla plana equivalente a la malla de vértices del rombododecaedro).

11.4. Paseo del caballo por el tablero de ajedrez, un problema famoso que ocupó, entre otros a Euler. (Gardner 8, Cap. 13).

11.5. Un cubo de madera 3x3 está dividido en 27 cubitos 1x1 de la forma natural. Una termita desea penetrar hasta el cubito central después de horadar todos los demás cubitos desde el exterior, comenzando por el centro de alguna cara exterior de un cubito y moviéndose paralelamente a los ejes del cubo grande, pasando siempre de un cubito a otro a través del centro de una cara común. ¿Lo podrá hacer? ¿Cómo? (Gardner 3, Cap.12, Prob 9).

11.6. En el tablero de la figura 10 juegan D y P. El jugador D juega con un duro que sale de D y el jugador P con una peseta que sale de P. Los jugadores se mueven alternativamente por las rutas señaladas, empezando C. El jugador D trata de cazar a P y gana si lo consigue en 6 o menos turnos. Si no lo ha conseguido después de 6 turnos, pierde. (Gardner 6, Cap. 19, Prob. 3).

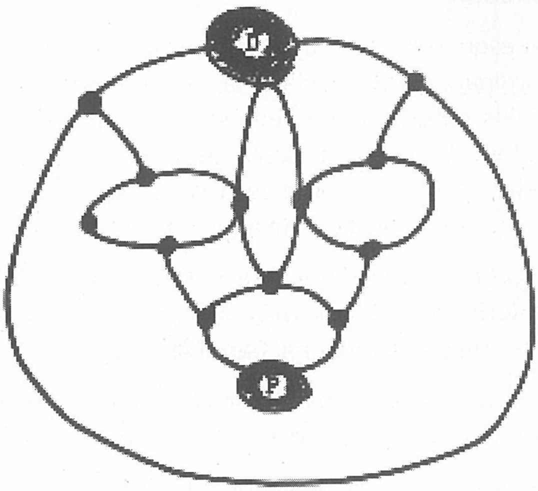


Fig. 10

12. Comenzar por lo fácil ayuda a resolver lo difícil

Este es un principio importante en heurística que ya hemos tratado antes y que fácilmente se olvida. Además de los ejemplos que vimos en el primer esquema, mencionaré aquí rápidamente algunos más.

12.1. Puentes de Königsberg (Guzmán, Cuentos con cuentas).

12.2. Rana Saltarina (Guzmán, Cuentos con cuentas).

12.3. El ejemplo de 10.1. sobre el dominó es también utilizable en este contexto.

Comienza con un dominó con fichas que sólo tengan, por ejemplo 0, 1, 2, 3 puntos en sus caras.

13. Piensa al revés. Supongamos el problema resuelto

Otro principio heurístico del que ya hemos visto antes algún ejemplo.

13.1. El reparto de cartas interrumpido (Gardner 8, Cap. 14. Prob. 1).

13.2. ¿Qué situación es más verosímil después de repartir las cartas en el bridge: que entre tú y tu compañero tengais todos los tréboles o que entre tú y él no tengais ninguno? (Gardner 8, Cap. 9, Prob. 25).

14. Solitarios matemáticos

Existen muchos solitarios con un claro contenido matemático. Periódicamente, como cometas, salen de nuevo a la popularidad viejos solitarios inventados hace siglos. De vez en cuando, como en nuestros días el cubo de Rubik, alguno acapara totalmente la atención, los matemáticos escriben unos cuantos artículos sobre él y sus variaciones y luego vuelve a dormirse en una discreta penumbra. Los solitarios tienen aplicaciones pedagógicas, por supuesto, pero también las tienen psicoterapéuticas y no está mal que los profesores de matemáticas nos aprovechemos de unas y otras tanto para nosotros mismos como para nuestros alumnos. He aquí unos cuantos solitarios curiosos. Prácticamente todos los solitarios tradicionales tratables matemáticamente y otros muchos de reciente invención son discutidos en: Berlekamp y otros, Winning Ways.

14.1. Tangram. Probablemente el más antiguo de este tipo de solitarios (Gardner 2, Cap.18; Tangram, Labor, Barcelona, 1981).

14.2. El solitario de la Bastilla. Enormemente popular desde el siglo 17 (Guzmán, Cuentos con cuentas).

14.3. El Juego de los 15, de Sam Loyd, que hizo furor a principios de nuestro siglo y que ya hemos estudiado en parte antes (Gardner 6, Cap. 7 junto con otros puzzles famosos).

14.4. Locura Instantánea (Gardner 3, Cap. 16; Gardner 8, Cap. 15; Berlecamp y otros, Winnig Ways, vol. 2, p. 784).

14.5. Soma, el solitario famoso de Piet Hein (Gardner 2, Cap.6).

14.6. Poliomino (Gardner 1, Cap. 13; Garner 3, Cap. 13; Berlekamp y otros, Winning Ways, Cap.24).

14.7. El cubo de Rubik tiene mucha matemática en sus aristas, pero no se presta mucho a un tratamiento elemental. Una solución asequible en tres páginas bien claras puede verse en : Berlekamp y otros, Winning Ways, vol. 2, p. 764-766).

14.8. El juego de la vida, adecuado para explotar el comportamiento de autómatas autorreproductores (Berlekamp y otros, Winning Ways, Cap. 25).

15. Partidos matemáticos

A lo largo de lo ya expuesto hemos tenido ocasión de ver algunos juegos interesantes para dos jugadores, como el Nim, el Hex,... Los juegos tradicionales con sabor matemático abundan y se van creando muchos nuevos de gran interés, basados en principios nuevos. Pienso que el tratamiento más completo de juegos matemáticos se puede encontrar en la reciente obra de Berlekamp, Conway y Guy, Winning Ways, que ya he citado varias veces. He entresacado aquí algunos de ellos, indicando también alguna otra referencia más asequible.

15.1. Tres en Raya (Gardner 1, Cap. 4).

15.2. Nim y variaciones (Guzmán, Cuentos con cuentas; Gardner 1, Cap. 15).

15.3. Ceros y cruces, el clásico juego sobre una cuadrícula completando cuadros (Berlekamp y otros, Winning Ways, Cap. 16).

15.4. Go, un antiguo juego oriental de reglas muy sencillas y de gran riqueza estratégica. Durante algún tiempo fue asignatura obligatoria en las academias de preparación militar en Japón. (Berlekamp y otros, Cap. 19). Es interesante saber que, como en el ajedrez, no se conoce estrategia completa.

15.5. Otelo, también llamado Reversi, otro juego de reglas muy sencillas sin estrategia matemática conocida. (Gardner 3, Cap. 6).

15.6. Juegos topológicos: Gale, Bridgit...(Gardner 3, Cap. 19; Gardner1, Cap. 7).

15.7. Hex (Gardner 1, Cap.8).

15.8. El juego militar, un clásico juego de acorralamiento parecido al de los gatos y el ratón sobre un tablero como el de la figura 11 (Gardner 6, Cap. 5, donde se pueden encontrar otros juegos de tablero con estrategia.

16. Analogías escondidas

Como sucede en matemáticas, existen a veces analogías insospechadas en los juegos que uno se puede proponer, a veces incluso isomorfismos de estructura que permiten analizar varios de un golpe. Ya hemos visto cómo

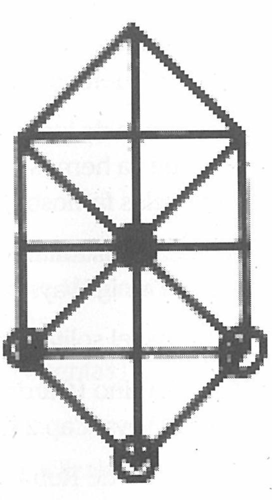


Fig. 11

algunos juegos y puzzles se convierten, mediante un esquema, en un problema equivalente de teoría de grafos. He aquí algún ejemplo más de juegos isomorfos.

16.1. El juego de Moser y el Tres en raya (Gardner 7, Cap. 16).

16.2. Juego de cartas equivalente al cuadrado mágico 3x3 (Gardner 7, Cap. 16).

16.3. El juego icosiano y las torres de Hanoi (Gardner 1, Cap. 6).

16.4. Problemas de medidas y de reflexión en un billar (Gardner 6, Cap 4).

17. Falacias

Las falacias tienen un gran valor pedagógico. Euclides escribió un libro de falacias y aporías, los Pseudaria, que probablemente utilizó con gran provecho en su enseñanza.

Los clásicos en recreaciones matemáticas suelen tener una sección dedicada a falacias.

Especialmente recomendables son las secciones de los capítulos 2 y 3 de Rouse Ball, dedicadas a falacias aritméticas y geométricas.

17.1. Diversas falacias aritméticas, topológicas,... (Gardner 1. Cap. 14)

17.2. La siguiente falacia es muy antigua (Torricelli?) y viene a demostrar que el principio de Cavalieri (mal interpretado) es falso. Consideramos los dos triángulos de la figura, ABC y ABD, con BC=BD. Para cada de AB es claro que MN=MP. Así por el principio de Cavalieri, el área de ABC es igual al de ABD.

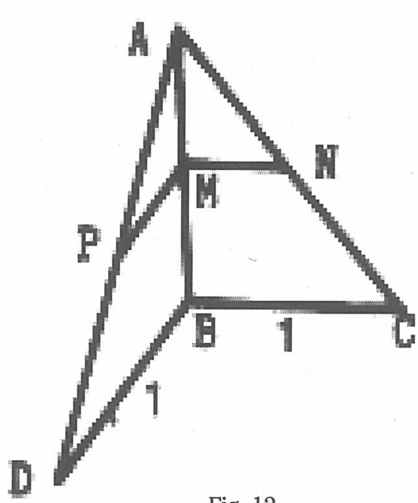


Fig. 12

18. Feliz idea

En la resolución de juegos y acertijos, como en la resolución de problemas, a veces es preciso que surja en nuestra mente lo que llamamos una feliz idea. Un concepto nada fácil de definir. Para el experto es un método de trabajo lo que para el novicio resulta una feliz idea, una especie de revelación divina que surge como un relámpago en la oscuridad y nos deja ver claro el camino a seguir. El examen de muchas felices ideas puede abrir en nuestro espíritu cauces que hagan surgir chispas semejantes en circunstancias parecidas. Por eso no es nada despreciable esta labor preparatoria. Con este espíritu está escrito el estimulante y agradable libro de Martin Gardner "Inspiración, ¡Ajá! ", que constituye toda una antología de felices ideas en diferentes campos.

Miguel de Guzmán Ozámiz. Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid.