NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 70, abril de 2009, páginas 7–34

El seudónimo de Dios[1]

José Luis Fernández Pérez[2]

A María José, con amor y… fortuna.

Excelentísimo y Magnífico Rector de la Universidad de La Laguna.
Excelentísimos e ilustrísimos señores.
Compañeros, alumnos, amigos.

> *Cuantos recibieron aquí honores semejantes a los que os dignáis tributarme en esta solemnidad, habrán de fijo sentido menos turbación que yo, ante el deber de disertar sobre un tema [...] digno de vosotros*[3] *y de esta ilustre casa. Ordenan la cortesía y la costumbre que al ingresar en ésta, […] se hagan pruebas de aptitudes críticas y de sólidos conocimientos en las varias materias del Arte*[4].

Pero uno debe asumir humildemente las querencias y limitaciones, que los años no han hecho sino acrecentar, asumir que es algo dado a la chacota[5], al román paladino y a la charla de café, y que, incluso en ocasión como ésta, de liturgia centenaria, no debe aspirar más que a mantener una distendida y amable conversación en la que compartir con ustedes, con modesta voluntad de desvelar someramente, si acaso, la fascinación por el *arte* que cultiva: las *Matemáticas*.

Creo y espero que esa fascinación sin descuento por la estética argumental y la capacidad de codificación de las Matemáticas pueda quedar cabalmente ilustrada con una charla sobre el azar, al gusto matemático y aderezado con unas gotas de infinito. Ese azar que lleva confabulando[6] y conspirando sin descanso desde tiempo inmemorial para que todos nosotros, ustedes y yo, y, créanlo, hasta nuestro dilecto Rector, nos encontremos aquí y ahora en esta, para mí, abrumadoramente gozosa ocasión.

¿Cómo es que alguien decide, es un decir, dedicarse a las matemáticas? En septiembre de hace unos cinco mil años, me acercaba entre ilusionado y amedrentado, como un K cualquiera, por los pasillos del antiguo edificio central de la Universidad de La Laguna, que se me antojaba Castillo, hacia la ventanilla pertinente cargado de certificados, de pólizas y timbres, de aquellos mágicos arcanos que eran los Papeles de Pagos al Estado y de impresos de variada índole que con esmero casi había completado; una solitaria y humilde casilla restaba por rellenar: la correspondiente a la carrera elegida. No, no había decidido aún (o al menos así me esforzaba en convencerme en ingenua autosugestión) si me matricularía en Derecho, para ser abogado, o en Matemáticas, para ser, ¡puf!, ¿qué?, ¿matemático? Por

[1] Discurso de José Luis Fernández Pérez en el acto de investidura como doctor honoris causa por la Universidad de La Laguna, celebrado el 11 de febrero de 2009. NÚMEROS agradece al autor que haya permitido de inmediato la reproducción de su texto, así como al Servicio de Publicaciones de dicha universidad.
[2] Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma de Madrid (joseluis.fernandez@uam.es).
[3] Ustedes.
[4] Así da comienzo el discurso de ingreso de don Benito Pérez Galdós en la Real Academia Española.
[5] Como gustaba confesar Guillermo Cabrera Infante: –¿Puedes hablar en serio?–No de cosas tan serias. I'm sorry. He nacido para el chiste y la chacota.
[6] En su artículo La confabulación del azar, Juan Goytisolo se maravillaba ante la concatenación de eventos azarosos de los que él y su Obra (sí, con mayúsculas) eran fruto, en particular, de aquella carta que milagrosamente llegó húmeda y casi ilegible tras cruzar el Atlántico para concertar el matrimonio de su abuela cubana con su abuelo peninsular, o viceversa.

aquel entonces había desaparecido el llamado selectivo de ciencias, y no se había instaurado aún la perversa selectividad[7], de manera que, casi, se podía elegir la carrera que se deseara.

Desde luego uno sabía, más o menos, a qué se dedica un abogado y cuál es su función social, y si le quedaban dudas podía consultar con Perry Mason. Pero, ¿un matemático? Ni idea. No les mantendré más tiempo sometidos a este angustioso suspense que sé que les está mortificando hasta la desazón; sí, marqué "la cruz de las matemáticas"[8], y no, ninguna zarza ardiente en aquellos pasillos desveló en aquel momento arrebatadora vocación alguna.

Grand Hotel Quisisana, Santa Cruz, Tenerife.

¿Qué inclina a uno a dedicarse a las matemáticas? El profesor Bermejo, que en el *Quisisana* de los escolapios se esmeraba en inculcarnos las requeridas destrezas en Álgebra, Geometría y Cálculo, nos retaba continuamente con ejercicios y problemas que puntuaba directamente sobre la pizarra con ristras de más y menos; eficiente evaluación continua donde las haya. Me preparaba concienzudamente, me entrenaba con denuedo, disfrutaba traduciendo a ecuaciones problemas de paseantes impenitentes, de trenes destinados a cruzarse a horas intempestivas o de cuadrillas de albañiles menesterosos[9], y contrastando cómo las soluciones obtenidas encajaban perfectamente con lo exigido en el enunciado. Se me daba bien, claro, aún cuando mi habilidad con la manipulación numérica concreta rayase, y raye, con la *discalculia*.

Ese encaje perfecto, esa seguridad deductiva de axiomas innegables, resultaba, resulta, reconfortante. Ernesto Sábato, justificaba su dedicación primera a *las ciencias físico-matemáticas* en que *...buscaba en el orden platónico el orden que no encontraba en mi interior...* O en el exterior, añado. Un mundo ideal, paralelo, perfectamente seguro, irrefutable, indiscutible, inopinable.[10]

[7] Universalmente perversa. Comentario de pasada en un curioso libro: The battle for wine and love or How I saved the World from Parkerization, de Alice Feiring: The idea of buying a wine –so sensitive a product– because it had 98 Parker points seemed silly, like going into a profession because the numbers on an aptitude test say you should.
[8] Vaya título para una serie de quinceañeros.
[9] En su *Compendio de Matemáticas puras y mixtas para instrucción de la juventud* de 1794, Francisco Verdejo propone: *Se sabe que 8 hombres en 6 días hacen 200 varas de excavación, se pregunta ¿12 hombres en 5 días cuánta excavación harán en los mismos términos?* Por cierto, más adelante, tras explicar una regla de aritmética comercial, confiesa: *Esta regla tan famosa como inútil llaman regla del día fixo,* franqueza derogatoria harto curiosa pues ese concepto de *día fixo* no es otro que la llamada *duración de Macaulay*, que es pieza esencial hoy en día en la gestión de las carteras con las que las compañías de seguros de vida invierten las primas para cubrir los compromisos asumidos en las pólizas.
[10] Tras un seminario técnico de Matemáticas, las preguntas no discuten lo apropiado del tema o su posible interés, ni el enfoque ni las premisas del análisis, sino que suelen requerir alguna precisión sobre el argumento o si es posible alguna determinada generalización o si se puede relajar alguna hipótesis. Imaginen pues el choque cultural que supuso para uno descubrir la figura del "discussant" habitual en las presentaciones en Economía.

Así que aún cuando hubo algún elemento de azar en mi acercamiento a las Matemáticas, mi decisión estaba dirigida, en plan diseño inteligente, como dicen algunos, por la conciencia de cierta habilidad, por la atracción de una selecta apreciación estética, y por un ansia de reconfortante seguridad. Y quizás por cierta predestinación; y si no vean con qué se entretenía mi abuelo en sus ratos de asueto en las hojas de lo que ahora llamaríamos control de calidad de la fábrica de armas de Trubia.

De aquél espléndido y eficiente semestre[11] lagunero[12] recuerdo con nostalgia un momento de *confirmación* gestionando infinitos. Nos habían explicado por qué cualesquiera bases de cualquier espacio vectorial de dimensión finita tienen todas el mismo número de elementos. De pasada se mencionaba que lo mismo ocurría aunque la dimensión fuera infinita. Aquello había que averiguarlo y entenderlo. Pregunté, me atendieron pacientemente, y arropado con el *Course d'Analyse* de Laurent Schwarz y el *Naive Set Theory* de Paul Halmos disfruté con la elegancia de la argumentación y redacté a mi gusto y con esmero unas notas, que aún conservo, detallando la demostración.

INFINITO PRESTIDIGITADOR

La Matemática es ciencia extrema –no lo duden– pues trata de objetos abstractos virtuales que no existen en la vil, mundana y cenagosa realidad, sino que pertenecen al ámbito más elevado, puro e inmaculado de las ideas. No les extrañe que casi dogmáticamente, y a estas alturas de la historia del conocimiento, los matemáticos, en general, se consideren[13], o se comporten como si se considerasen, epistemológicamente platónicos.

A mí no deja de maravillarme[14] cómo es que compartimos nociones tan sumamente abstractas como la de *esfera perfecta*; y es noción aprendida, porque por mucha voluntad y perseverancia con la que la Naturaleza se esfuerce en crearlas, ¡ay!, no logra más que burdas imitaciones.

Claro es que compartimos nociones abstractas varias, pero no son precisas, de límites nítidos como los abstractos matemáticos y si no les parece que sea así, abramos un debate y arremanguémonos dispuestos a discutir sobre la noción de nación.

Nada más abstracto que el infinito. Me refiero al infinito fetén, el infinito actual. ¡Cuán cómodos estamos los matemáticos manejando a discreción el infinito y el proceso de inducción![16] Pero, ¿quién lo ha visto, quién lo ve?, y lo que es más importante en lo que sigue, ¿quién ha *completado* la tarea de numerar infinitos boliches uno tras otro? [17]

---

[11] Semestre tan sólo gracias a que el mesiánico ministro de Educación de Carrero Blanco (y antes rector de la Universidad Autónoma de Madrid) Julio Rodríguez había alumbrado su efímero calendario académico.

[12] En que disfruté de las enseñanzas de extraordinarios profesores, entusiastas y capaces de motivar e ilusionar, como José Méndez, Antonio Martinón, José Montesinos. Pensaba al final del curso en continuar la carrera en la península. Una casual conversación de pasillo con Martinón me inclinó por la Universidad de Zaragoza. ¡Ay!, el azar.

[13] Para muestra: *The Emperor's New Mind*, de Roger Penrose.

[14] ¡Cándido que es uno!

[15] Incluso circular, querido Larry Zalcman[†].

[†] Véase la nota a pie de página número 15.

[17] Cierto, quizás hayamos sentido el aleteo del infinito, de la mano acaso de la angustia de la nada o del vértigo del vacío, su antagónico compañero, pero ese es otro infinito.

La cosa viene de largo. Dejemos a un lado al patético Aquiles, el de los pies ligeros, en su infructuosa y eterna persecución de la tortuga en aquella carrera amañada por Zenón y lean cómo San Agustín se anticipaba a Giuseppe Peano y con casi nada construye los números naturales camino del infinito:

1. *Porque el que dice: sé que estoy vivo, dice que sabe una única cosa.*
2. *Pero si ahora dice: sé que sé que estoy vivo, ahora ya sabe dos.*
3. **4. 5…** *Pero saber estas dos ya es en sí una tercera cosa que sabe. Y una cuarta, y luego una quinta, y así sucesivamente.*

∞. *Pero como no se puede comprender una adición innumerable de cosas, ni decir una cosa innumerables veces, lo englobamos en un único concepto y decimos que se trata de un número infinito.*

O recuerden a David Hilbert, santo patrón de los técnicos de turismo, capaz de alojar en el abarrotado hotel infinito que dirige a un número infinito de turistas que acaban de descender del pertinente autobús infinito y se agolpan en el mostrador de la recepción. Sin arredrarse, con enérgica autoridad, pero suma corrección:

> *¡Atención!, señores clientes, apelo a su solidaridad y les ruego, por favor, que abandonen la habitación que ahora ocupan, no olviden llevar consigo todas sus pertenencias, y pasen a la habitación que ostenta el número doble de la que ahora ocupan: los de la 1 a la 2, los de la 2 a la 4, los de la 3 a la 6, etc.*

acomodando así a todos los huéspedes originales (en las habitaciones pares), disponiendo al tiempo de infinitas habitaciones libres (las impares) para los recién llegados.

El infinito matemático se presta a verdaderas exhibiciones de prestidigitación como ésta de la que da cuenta Zenón, que fue fruto de una agotadora, interminable y recurrente conversación con su amigo, el extenuado Sísifo[18], y que debiera ser al menos tan conocida como la de la carrera.[19]

> *En una bucólica tarde de estío, Aquiles –el de los pies ligeros– y la tortuga compartían a la sombra de un sicómoro una modesta colación de olivas de Kalámata, pan reseco y vino de retsina del Ática que Aquiles se había traído en un pellejo. Como marcaba el canon de cortesía, la conversación revoloteó cual perdiz mareada sobre asuntos sin importancia antes de abordar el negocio de la cita, que no era sino un experimento mental, un reto que la tortuga le iba a proponer a Aquiles. No se habían olvidado de traer cada uno, como habían acordado por móvil*[20]*, sus zurrones eleáticos*[21]*. En el zurrón de Aquiles había infinitos boliches numerados de 1 en adelante*[22]*, mientras que el zurrón de la tortuga estaba completamente vacío, y era, como cualquier zurrón eleático, capaz para infinitos boliches. El ejercicio consistía en repetir el siguiente doble trasiego: Aquiles saca dos boliches de su zurrón y los pone en el zurrón de la tortuga y luego la tortuga saca un boliche del suyo y lo pone en el de Aquiles. Cada repetición de este trasiego incrementa en uno el número de boliches del zurrón de la tortuga. Aquiles, el de los pies ligeros, siempre tan competitivo e impaciente, dispuso que los sucesivos trasiegos se ejecutaran a ritmo eleático*[23]*; la tortuga no objetó. Tras un minuto de trasiegos a ese ritmo, ¡voilà!, el zurrón de la tortuga estaba, ¡tachán!… vacío. Aquiles no daba crédito, y con gesto interrogativo miró a la tor-*

[18] A Zenón, ¿a quién no?, conversar con mitos le aliviaba el alma y le tranquilizaba las ansias del espíritu.
[19] Y de la que tuve noticia a través de *Math Chat,* de Frank Morgan.
[20] En la Grecia Clásica: *esclavo mensajero.*
[21] Zurrones filosóficos fabricados en Elea.
[22] ¡Ya entramos en modo matemático!
[23] El primer trasiego dura medio minuto, el segundo un cuarto de minuto, el tercero un octavo, así que en un minuto se completan infinitos trasiegos.

> *tuga; la inicial perplejidad devino en mosqueo en cuanto se percató de la sonrisita socarrona de la tortuga.*

¿Qué había pasado? En el primer trasiego, el pulcro y metódico Aquiles le pasó los boliches 1 y 2, en el segundo el 3 y el 4, luego el 5 y el 6, y así sucesivamente. La tortuga, por su parte, le devolvió el 1 en el primer trasiego, el 2 en el segundo, el 3 en el tercero, y así sucesivamente. Asombroso, o al menos contra intuitivo[24]: el número de boliches en el zurrón de la tortuga se fue llenado hasta…quedar vacío.[25]

> *Aquiles, dolido, pasó la noche en vela reflexionando. La clave –se dijo– es que la tortuga va eligiendo qué bola me devuelve. A la tarde siguiente, bajo el sicómoro, Aquiles exigió repetir el juego, pero ahora la tortuga elegiría la bola a devolver con los ojos vendados, al azar. Repitieron la experiencia y, al final del vertiginoso minuto, el zurrón de la tortuga estaba ¿…?, otra vez vacío. Aquiles arqueó una ceja, ajustó sus sandalias y se marchó corriendo con los puños en el pecho, la frente alta apuntando al cielo, no sin antes despedirse con un gesto de la mano incapaz de articular palabra con un nudo en la garganta.*

Aquiles se hubiera adherido con entusiasmo a la admonición sin miramientos del de Hipona, desleal –visto su alarde recursivo anterior– contra los matemáticos:

> *El buen cristiano deberá guardarse de los matemáticos y de todos aquellos que practican la predicción sacrílega, particularmente cuando proclaman la verdad. Porque* ***late el peligro de que esta gente, aliada como está con el diablo, pueda cegar las almas de los hombres y atraparlos en las redes del infierno.***

Y advertidos quedan de los riesgos a que se exponen con el discurrir de estas páginas en las que, compinchados, intrigarán a sus anchas el azar, tahúr trilero que juega al despiste, y el infinito, ese tragaldabas pantagruélico.

EL AZAR

El azar es dominio de los dioses, manifestación de su libre albedrío, de esa manía que se arrogan de juguetear con los destinos de los seres humanos.[26] Azar es lo que no logramos explicar, aquello que sucede porque sí, como sin causa, o por compleja concatenación de causas tan remotas que no alcanzamos a comprender con precisión, ni siquiera a interpretar o describir. Azar es un cajón de sastre epistemológico, esa opción de último recurso que aparece en cualquier clasificación: “ninguna de las (explicaciones) anteriores”.

El azar nos domina y nos controla, es *el seudónimo que usa Dios cuando no quiere firmar*[27]:

> *Se sintió como si le hubiesen quitado la tapadera que cubre la vida, permitiéndole ver su mecanismo. Flitcraft cae en la cuenta de que el mundo no es un sitio tan racional y ordenado como él creía, de que ha estado equivocado desde el principio y de que jamás ha entendido ni palabra de lo que ocurría en él.* ***Es el azar quien gobierna el mundo****. Lo aleatorio nos acecha todos los días de nuestra vida; una vida de la que se nos puede privar en cualquier momento, sin razón aparente.*

[24] La intuición se educa, como el gusto.
[25] Si la tortuga hubiera devuelto el 2 en el primero, el 4 en el segundo, etc, el zurrón de la tortuga se hubiera quedado al final con los boliches impares.
[26] *Tu lo llamas azar, yo lo llamo destino*; en *El hombre que pudo reinar* (John Huston, versión cine).
[27] Que diría, dice, Antonio Lobo Antunes.

de *La noche del oráculo* de Paul Auster[28]. Azar es aquel anillo que en la película *Match Point* de Woody Allen se regodea voluptuosamente, en un giro casi sin fin, a cámara lenta, antes de marcar sin remedio las vidas futuras de los protagonistas de la historia, sin que ellos lo sepan, aunque sí el espectador que todo lo ve como un semidiós. O esas dos tramas, dos vidas paralelas, de Helen que emergen de la dicotomía de cruzar o no unas caprichosas *Sliding doors* de un vagón de metro de Londres.

Atreverse siquiera a investigar las leyes que acaso pudieran regir el azar es desafiar a los dioses, invadir sus dominios.[29] Así lo entendía el inquisidor de *El puente de San Luis Rey* de Thornton Wilder quien, sicario implacable de la divinidad afrentada, persigue y logra que se condene a la hoguera a Fray Junípero, quien se mortificaba intentado descubrir qué designios (divinos) habían hecho converger sobre el puente las *líneas de vidas* de seis personas (justo esas seis) para fallecer cuando éste se derrumbó: *Acaso un azar, acaso un designio.*

… CON OJOS MATEMÁTICOS

Los matemáticos tardan en atreverse con el azar.[30] Las Matemáticas buscan, como en letanía, pautas, simetrías, patrones, regularidades y las van encontrando en la forma (la geometría), el número (el álgebra), el tiempo y el cambio (el análisis). Pero el azar, ¿dónde están sus regularidades?, ¿no es justamente el azar lo que ocurre irregularmente, lo que no sigue pautas, ni obedece leyes?

Las leyes del azar están en la repetición. Sin preocuparnos por las causas, conocemos fenómenos en los que no podemos predecir el resultado; pero sí *sabemos* que si se repitieran muchas veces, muchísimas veces –infinitas veces, todas las veces–, tenderían a tener frecuencias estables. No es algo que observemos, ni que podamos observar, es pura, ¡hum!, intuición[31]. Una intuición abstracta compartida que tanto asombraba a Jacob Bernoulli:

> *Incluso el más estúpido de los hombres, por algún tipo de instinto natural, por sí mismo y sin instrucción alguna (lo que es realmente asombroso), está convencido de que, cuantas más observaciones se hagan, menor es el peligro de mantenerse alejado del objetivo.*[32]

Y así es, ¿o no? Si lanzamos una moneda, digamos que 100 veces, todos esperamos, instruidos o no, que aproximadamente en un 50% de los lanzamientos debe salir cara. Y nos sorprenderíamos hasta el mosqueo[33] si aparecieran un 75% de caras. Y que si la lanzáramos, pongamos por caso, 10000 veces, nos sorprendería aún más que saliera más de un 60% de caras (o menos de un 40%). Estamos de acuerdo, ¿verdad? y ese acuerdo es de lo más sorprendente, porque se trata una valiente, casi heroica, extrapolación, porque ¿quién ha lanzando una moneda 10000 veces para anotar minuciosamente los sucesivos resultados? Espero que no muchos.[34]

Pero ¿cuál es la causa de esta estabilidad?, ¿cómo es que los lanzamientos de la moneda se auto organizan y en la repetición se muestran regulares compensándose? Mágico. Imaginen que 10000

[28] Gracias, Pablo Fernández, por compartir tanto.
[29] Mi historia favorita de la Teoría de la Probabilidad, con óptica más akusmática (abundo en la nota 27) que matemática, se titula justamente así: *Against the Gods*, de Peter L. Bernstein.
[30] No creo yo que fuera por no molestar a los dioses, asunto que, muy al contrario, alguno contemplaría como un incentivo a pesar de los riesgos.
[31] –Platónico estáis– Es que no como.
[32] En su *Ars Conjectandi, Usum & Applicationem Praecedentis Doctrinae in Civilibus, Moralibus & Oeconomicis*.
[33] Racional, ¡oiga!
[34] Por el bien de la productividad del país.

personas distintas, en sendos lugares distintos y distantes, lanzan a la vez una moneda: ¿qué asombroso fino y mágico mecanismo de comunicación hace que las monedas *se pongan de acuerdo* y que se obtenga muy aproximadamente un 50% de caras?

En Matemáticas no se aspira a destejer este arco iris, se postula que esa regularidad, esa frecuencia potencial, esa *probabilidad*, está ahí, y sobre ese supuesto se construye y se llega lejos, muy lejos.

La Ley de los Grandes Números a la que se refiere Bernoulli es, no solo una intuición o un hecho empírico, sino fundamentalmente un teorema derivado de los axiomas adecuados y que en vernáculo reza así: tenemos un experimento aleatorio que tiene dos posibles resultados alternativos, F y C, que tienen probabilidades respectivas p y, claro, $1-p$. Repetimos el experimento aleatorio de manera regular e independiente y registramos el promedio de veces en que se obtiene el resultado F. Pues bien, cuando el número de repeticiones tiende a infinito la probabilidad de que ese promedio se desvíe de p, con un margen de error cualquiera pero prefijado, tiende a cero.

En cualquier caso, la matematización del azar en Teoría de la Probabilidad es una recién llegada a la milenaria historia de las Matemáticas. Cuando Pascal[35] pergeñaba sus resultados de polaridad de cónicas, Fermat su teorema sobre primos como suma de cuadrados, Euler la teoría de particiones o Newton sus *Principia Mathematica*, sus incursiones respectivas en la Teoría de la Probabilidad sólo alcanzaban a determinar la forma equitativa de repartir lo apostado en un interrumpido juego de dados; a describir las frecuencias de los posibles resultados de la lotería genovesa; o a comparar, para el inefable Samuel Pepys, la probabilidad de obtener 3 seises cuando se lanzan 18 dados con la de obtener 2 seises con 12 dados. Simple combinatoria, conteo de casos, pero ya primeros avances domesticando el azar que permiten tomar decisiones: la consulta de Pepys iba encaminada a seleccionar entre las dos apuestas alternativas, para, es fácil suponer, tener ventaja para desplumar a incautos menos informados.

Abraham de Moivre[36] y el Marqués de Laplace[37] elevaron la teoría dando entrada al infinito, incorporando métodos analíticos de amplio espectro y convocando, por ejemplo, al teorema central del límite[38].

Pero no debemos desviarnos de nuestra línea argumental adentrándonos en la apasionante historia del desarrollo de la Teoría de la Probabilidad, aunque no nos resistimos a aportar algunas pruebas sobre su lento advenimiento como que la axiomática de la teoría hubo de esperar hasta los años 30 del siglo pasado de la mano de Kolmogorov, como que el nombre de la noción central de variable aleatoria se fraguó en los años 40, o que la primera medalla Fields por trabajos en Probabilidad se demorara sesenta años en llegar: desde 1936, en que se conceden las primeras, hasta el año 2006, en que en el Congreso Internacional de Matemáticos de Madrid la recibiera el francés Wendelin Werner.

El cálculo de probabilidades nos provee de herramientas para estudiar eventos complejos en los que se combinan varios eventos básicos. Cuentan las crónicas que figuras intelectuales de la talla de Leibniz y D'Alembert bien se liaban con el primer cálculo básico:[39] probabilidades de los *tres* posibles resultados al lanzar dos monedas; ambos, argumentando literariamente, le asignaban probabilidad de

---

[35] Cuyos esfuerzos en busca de una máquina de movimiento perpetuo se aprovecharon para perfeccionar las primeras ruletas.

[36] Con su pionera *The doctrine of chances.* Por cierto, cuenta la tradición que De Moivre complementaba los escasos ingresos que le reportaban sus responsabilidades docentes con actividades de consultoría a empedernidos jugadores. Una oportunidad de pluriempleo que igual a Newton le hubiera interesado considerado.

[37] Con su majestuosa *Théorie analytique des probabilités.*

[38] O teorema del límite central, que para todo hay Blefuscudianos y Lilliputienses.

[39] El 2+2 son 4 de la probabilidad.

un tercio a cada uno de esos resultados. Hubieran hecho bien en consultar a los expertos jugadores del *juego de las caras* de la Semana Santa de la manchega Calzada de Calatrava[40]. En el juego de las caras, con una elaborada escenificación, se lanzan dos monedas de cobre de diez céntimos de la época de Alfonso XIII, bien gastadas ya por el uso, y se apuesta a que van a salir dos caras o que van a salir dos cruces; si sale cara y cruz nadie gana y se repite el lanzamiento. Se elimina esta tercera posibilidad porque, *como todo el mundo sabe*, cara y cruz salen más veces que dos caras o dos cruces. Basta con eso, no hace falta saber cuánto más. En la metodología de simulación Montecarlo que John von Neumann[41] y Stanislaw Ulam desarrollaron para su uso inicial en los cálculos del proyecto Manhattan[42] de la primera bomba atómica, a este procedimiento se le conoce como método de aceptación y rechazo. ¡Bien por los calzadeños!

Sorprende que en el juego de las caras no se lancen las dos monedas *sucesivamente*, y que las apuestas no sean por cara y cruz y por cruz y cara, habida cuenta de que las dimensiones de la nariz de Alfonso XIII pudieran favorecer ligeramente las dos caras sobre las dos cruces. Este juego alternativo al original da pie a un método de simulación de una moneda perfecta, con exactamente un 50% de probabilidad de cara (y 50% de cruz) con cualquier objeto que pueda caer sólo de dos formas, digamos A y B; una taba, por ejemplo. La receta: láncese la taba dos veces en sucesión; si sale A y luego B, declaramos cara; si sale B y luego A, declaramos cruz; mientras que si sale A y luego A o B y luego B… no vale y repetimos. Con esta receta, las caras y las cruces virtuales aparecerán con igual frecuencia.

La Ley de los Grandes Números dice pues que, a la larga, la oscilación aleatoria se ha de ir compensando para estabilizarse en su promedio, en su frecuencia virtual y potencial, en su probabilidad. ¿Claro? Pero, ¡cuidado, atención!, la confabulación del azar con el infinito conduce inicuamente a interpretaciones equívocas. Lean, como primera muestra, este afamado intercambio de opiniones entre los tres mosqueteros en una bucólica tarde veraniega.[43]

> ***Athos:*** *¡Pardiez!*[44] *Diez veces he lanzado este Luis de oro y, salvo en el tercer lanzamiento, en todos ha salido la cara del Rey. En el siguiente, para compensar, ha de salir escudo. Así lo dicta la Ley de los Grandes Números: en media han de salir tantas caras como escudos.*
> ***Porthos:*** *¡Voto a bríos! ¡Vive Dios*[45] *que sois mentecato! ¿Acaso creéis que la moneda tiene memoria y recuerda lo que ha ido saliendo en los lanzamientos anteriores? No hay ninguna fuerza que obligue a la moneda: la Ley de los Grandes Números a la que apelas no es una ley física, como la ley de la gravedad. Funciona justamente porque no hay nada que favorezca a la cara del Rey frente al escudo. Así que ahora, antes de lanzar la moneda, hay de nuevo la misma probabilidad de cara que de escudo. ¡Cuán fácilmente te seducen las apariencias!*
> ***Aramis:*** *¡Por mi espada! ¡Porthos, no entremetáis a Dios en esto! Dilectos amigos, permitidme terciar en vuestra patética discusión. Porthos, vos sois el que os dejáis engañar: la realidad, lo único que sabemos, es que Athos ha lanzado la moneda diez veces y ha salido cara en nueve de ellas. Y, ya puestos, yo diría que la nariz del Rey es más pesada que el escudo. ¿Qué pensaríais si tuvierais una urna con rubíes y diamantes de la que, al sacar diez joyas al azar, aparecen nueve diamantes y un único rubí? Sin duda, que la urna contiene más diamantes*

---

[40] Juego común en muchos otros lugares de España (o al menos de las Castillas) como el dilecto amigo, reconocido experto, en éste y tantísimos otros asuntos, Jesús María Sanz Serna me hace saber.
[41] Modelo, según se dice, del *Dr. Strangelove* de Kubrick.
[42] ¿Qué hubiera pensado Dostoievski de la asociación entre Montecarlo, simulación y bomba atómica? Bueno, ya puestos, ¿qué piensan ustedes?
[43] ¡Cuán propicias son a los experimentos mentales las bucólicas tardes de verano! ¡Qué todo el año sea verano!
[44] ¿O dijo Par Dieu?
[45] Qué gustaba decir nuestro querido y recordado Chicho Guadalupe.

que rubíes. Lo mismo ocurre en este caso: a la luz de la información disponible, deduciríamos que es más probable que salga cara en el siguiente lanzamiento de la moneda.[46]

Así que ante la experiencia de lanzar una moneda diez veces, y obtener una sola cara, razonamientos alternativos que apelan a la ley de los grandes números sugieren, reclaman que el siguiente lanzamiento sea cara, o que sea cruz[47] o se decantan por la indiferencia.

Yo, qué quieren que les diga, opto por Bayes, digo por Aramis. Porque una sola cara en diez lanzamientos es ocurrencia improbable –que no imposible– para una moneda perfecta[48]. Porque a fe que si salieran diez cruces en diez lanzamientos, antes de seguir elucubrando, exigiría examinar la moneda para cerciorarme de que tiene cara y cruz, ¿no?

Vean otro ejemplo que nos muestra cómo nuestra limitada intuición infusa de frecuencias en muchas repeticiones, combinada que cierta arrogancia, impaciencia o pereza intelectuales nos conduce a falsas conclusiones. Pongamos que le pedimos[49] a un grupo de 100 personas que *fabriquen* una lista aleatoria de longitud 500 formada por unos y ceros.

Habrá dos métodos de *fabricación*: el *legal* y el *tramposillo*. Qué método de preparación va a usar cada uno va a depender de alguna característica muy personal que divida a la población en dos mitades aproximadamente iguales, como, por ejemplo, la inicial del segundo apellido de la abuela materna.

- *Legal.* Aquellas de esas 100 personas para las que ese apellido comience por una letra desde la A a la G han de preparar la lista *comme il faut*, es decir, lanzando 500 veces una moneda equilibrada y anotando en sucesión un *uno* cada vez que salga cara y un *cero* cada vez que salga cruz.
- *Tramposillo.* Los tramposillos, por imperativo legal, deberán *inventarse* la sucesión para que *parezca* aleatoria.

En la práctica es fácil distinguir a los tramposillos de los legales. Y es que, por ejemplo, casi todas las sucesiones legales contendrán trozos de longitud 10 de unos consecutivos. De hecho, la probabilidad de que el azar genere una sucesión con estas características supera el 95%.[50] Pero hemos de reconocer que pocos son los que, puestos en la tesitura de *fabricar una lista aleatoria* anotando unos y ceros, se atreverían a poner 10 unos seguidos, ¿verdad?

O si se quiere, y dándole la vuelta, cuánta significación le damos, por ejemplo, a que un jugador de baloncesto está *en racha*, y le buscamos una razón causal, cuando en realidad en gran medida esa racha no es sino fruto pasajero del puro azar.

Gyorgy Pólya ideó un fascinante experimento mental con un laboratorio virtual de urnas y bolas: la ***urna de Pólya***.

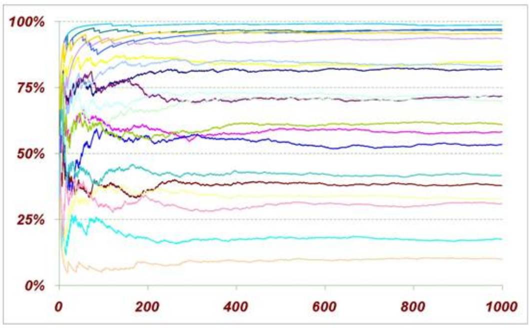
[46] Aramis, al ataque bayesiano. Conviene quizás recordar aquí que tanto Aramis como Bayes eran eclesiásticos.
[47] En *El jugador*, Aleixéi, el experto jugador, *alter ego* de Dostoievski, le espeta a la abuela intentando contener su frenética pulsión apostante: *–Pero, abuelita, si el cero acaba de salir. Seguramente no saldrá ya en mucho tiempo.*
[48] Jaume Balmes, en *El Criterio*, decimonónico libro de autoayuda, se maravilla ante la capacidad del cálculo combinatorio para discernir entre los improbable y lo imposible, para a continuación sugerir que a todos los efectos prácticos… y que… ¡bizantinismos, los justos!
[49] Este ejemplo está extraído del libro de John Allen Paulos, *A mathematician plays the market*.
[50] Es decir, más del 95% de las listas generadas de esta manera tiene al menos un trozo de 10 unos consecutivos.

En la búsqueda de información y en el contraste de oportunidades, los seres humanos no son muy metódicos, y sí harto impacientes: las primeras impresiones suelen ser duraderas hasta transformarse sin solución de continuidad en opiniones: la elegida entre varias ofertas alternativas suele estar entre las primeras consultadas. Las opiniones, pues, son contagiosas, y la posibilidad de contagiarse de una u otra depende de cuánta gente la comparte. La urna de Pólya nos permitirá reflexionar sobre cómo evoluciona ese contagio.

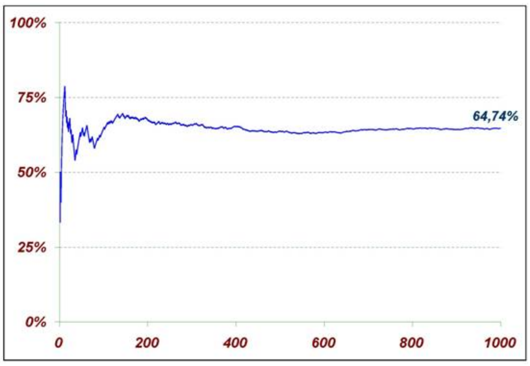
Tenemos una urna y un suministro (inagotable) de boliches negros y rojos. La urna de Pólya, como los zurrones eleáticos, tiene capacidad para infinitos boliches.

Para comenzar, se pone un boliche de cada color en la urna. A partir de ahora, en cada paso se escoge un boliche al azar de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna junto con otro boliche de ese mismo color. Y así sucesivamente. Nos interesa cómo evoluciona la proporción de boliches negros (o de boliches rojos) sobre el total de boliches en la urna. Traducción: *al comienzo las opiniones están divididas al 50% y la masa de gente con opinión es escasa (sólo dos). Cada nuevo individuo toma la opinión de la primera persona con la que se encuentra.*

El experimento consiste en repetir la observación y el añadido de boliches 1000 veces, digamos, y anotar la senda de 1001 valores cambiantes, la evolución de la proporción de boliches negros que resulta. ¿Qué va a pasar con la evolución? ¿Qué opina? Nada, al principio, favorece a los boliches rojos o negros, así que… No está claro.

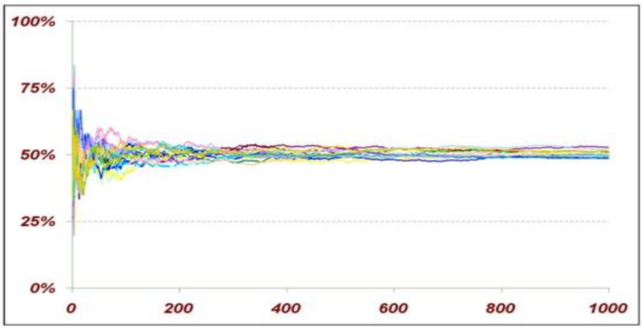


El gráfico de la izquierda muestra unas cuantas sendas de evolución de la proporción de boliches negros siguiendo escrupulosamente el mecanismo aleatorio de contagio; se trata de distintas repeticiones de las 1000 extracciones y añadidos comenzando con un boliche negro y otro rojo. Obsérvese cómo cada senda, tras una tumultuosa juventud, en cuanto adquiere una cierta madurez (masa crítica) se estabiliza para siempre, pero alrededor de un valor que no podemos predecir, cualquier valor entre 0% y 100% es igualmente probable. Asombroso, el proceso siempre se estabiliza a la larga en una proporción, y esa proporción tiene la misma probabilidad de estar entre 90% y 100% que entre 40% y 50%, por ejemplo[51].



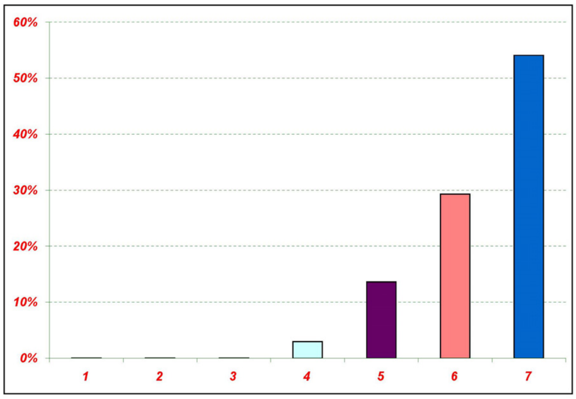
Ante una senda como la recogida en el gráfico de la izquierda que sólo hubiéramos observado desde el paso 200 en adelante, ¿quién no hubiera buscado una explicación determinista, no por efecto del azar, que justificara por qué la proporción de boliches negros tiene que ser aproximadamente 65%? ¿O no? Y no hay razón alguna. ¿Quién no intentaría buscar ventajas competitivas intrínsecas en una marca, sea Microsoft, que acaba por ocupar un franja mayor de mercado que otra, sea Apple, cuando puede que el único responsable de tal diferencia sea el inicial contagio aleatorio entre usuarios y curiosos? Seguro que muchas veces hemos caído en similares argumentaciones falaces.

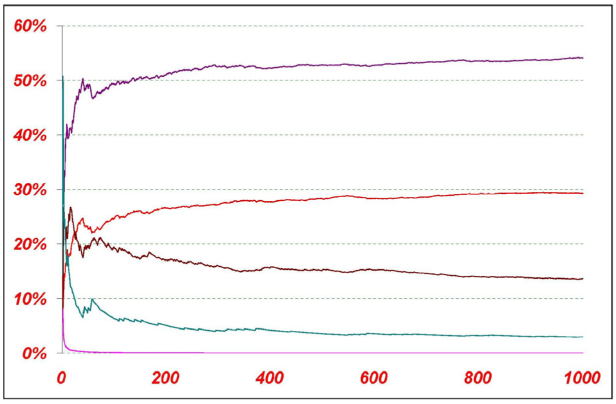
[51] Distribución uniforme, en la jerga.



¿Y si actuáramos favoreciendo a quien menos tiene, añadiendo boliches del color contrario al observado en la extracción? Ahora la evolución siempre se estabiliza en 50%. Al comienzo vuelven a manifestarse oscilaciones salvajes, pero pronto el mecanismo de compensación actúa igualando las proporciones.

Pero imaginen que hay boliches de varios colores, digamos siete, como en el arco iris[52] occidental. Comenzamos con uno de cada en la urna y seguimos la misma regla, mirar en la urna, escoger una bola al azar, devolverla y añadir una bola de ese mismo color. ¿Qué pasará? Estamos remedando la competencia entre varios, sean marcas o sean nodos de internet y sus referencias en Google[53], sean... Como antes, las proporciones de los sietes colores de boliches se estabilizan. Pero, ¿en qué valores límites se alcanzan? Veámoslo en una simulación[54]:





SENDA DE PROPORCIONES DE 7 COLORES **DISTRIBUCIÓN FINAL**

Las sendas que aparecen en el gráfico son las de las proporciones de los siete colores. A la derecha la proporción final. Es una ley potencial típica, de Pareto o de Zipf. Un color, no sabremos cuál va a ser, pero uno, tiene mucho más del 50%, el siguiente como la mitad, y los último, pobres, casi nada, pero dignamente estables. Aplíquese a distribución de riqueza, modas, referencias en Google, etc.

La conversación entre Athos, Porthos y Aramis, las rachas de Paulos y la urna de Pólya nos advierten de que ante las mañas del azar, de su acumulación repetitiva, la intuición inopinada es mala consejera y que haremos bien en ser prudentes y pasar cualquiera intuición inmediata que hayamos pergeñado, por muy obvia y natural que nos pudiera parecer en un principio, por un fino cedazo de duda metódica hiperbólica. La simulación por ordenador no es poca ayuda para discernir falsas intuiciones, rechazar conclusiones falaces y también para sugerir conjeturas interesantes, que luego habrá que justificar con rigor matemático inexcusable.

[52] ¡Qué poético!
[53] ¡Qué moderno!
[54] ¡Qué empírico!

SEGUROS Y CRÉDITOS

La gestión de los dos principales instrumentos financieros: los seguros y los créditos, que nos acompañan desde el comienzo de la historia[55] y que son parte, ¡ay!, de nuestras preocupaciones diarias, se fundamentan en la ley de los grandes números.

La idea es simple. Consideramos primero una mutua de seguros y luego una cooperativa de crédito.[56] En una mutua, un grupo de personas aseguran solidariamente un riesgo al que están expuestos de manera similar. Todos tienen la misma probabilidad, digamos de un 5%, de sufrir un cierto daño durante el próximo año que supone una pérdida de 30 en las unidades monetarias que sea. La homogeneidad del grupo, del riesgo y del daño es importante.

El grupo está compuesto por 1000 asegurados. La ley de los grandes números nos dice que debemos esperar unos 50 siniestros, que suponen un daño colectivo de 1500. Como somos 1000, podemos obliterar completamente ese riesgo aportando solidariamente a un fondo común cada uno una prima al comienzo del año de 1,5. Al comienzo del año no sabremos a quiénes, como si fuera una lotería, les va a *tocar* el siniestro, pero sabemos cuántos, y esto es todo lo que hace falta saber para afrontar el daño solidariamente. Este 1,5 es la prima llamada pura.

Claro, no es tan simple, hay fuentes de incertidumbre que la prima pura no cubre, y que obligarán a incrementarla. Para empezar, puede ser que la frecuencia esperada de 5% esté inadecuadamente estimada. Ésta se ha estimado analizando series estadísticas, muestras del pasado. El pasado es guía del futuro[57], pero es tan sólo una muestra. Hay que incrementar la prima pura para cubrir este posible error de estimación. En segundo lugar, la ley de los grandes números es una estimación aproximada: puede ocurrir, ocurrirá, que la proporción de siniestros oscile por encima o por debajo de ese 5%. El teorema central del límite[58], por ejemplo, permite estimar esas potenciales oscilaciones y con cierto nivel de confianza determinar cuánto hay que aumentar la prima para cubrir la oscilación hacia arriba. En tercer lugar, el coste de los siniestros es, en general, aleatoriamente variable; hay que estimar esa variabilidad y, consecuentemente, imputar un incremento adicional, otro más, de la prima. Restaría finalmente, en cuanto a cobertura de incertidumbre, tener en cuenta las oscilaciones extremas, imprevisibles, catastróficas, y para protegerse contra éstas hay que disponer de reservas, en forma de capital, y de reaseguro[59]. Por supuesto, además las primas han de incorporar gastos, costes, como el de los reaseguros, y comisiones, y, como el capital es aportado por accionistas que demandan una rentabilidad por su inversión, la prima debe incrementarse con la parte correspondiente de los dividendos que éstos deben percibir.

No se puede prever todo, por supuesto, pero es todo lo que podemos hacer. La técnica completa es toda una compleja ciencia, la actuarial, que lleva prestando inestimables servicios a la humanidad desde hace casi cuatrocientos años. Dicho queda.

Una joya de la ciencia actuarial, de la que emana toda una subespecialidad de variantes y extensiones, es la elegante y eficiente estimación de Crámer que determina el capital necesario para garantizar solvencia con un determinado nivel de confianza. Partimos de un modelo que dice que el superávit X_t de la compañía en el año t será:

---

[55] En el código de Hammurabi, de hace más de 3750 años, ya aparecen referencias a contratos de seguros, a tasas de interés en crédito, a condonación de deudas… Pero en el código de Hammurabi parece haber trazas de todo; como en la anécdota de Victor Hugo: *¿Qué ha aportado Mesopotamia?, ¡hum!, ¡ah!, Mesopotamia: la Humanidad.*

[56] No una compañía de seguros, ni un banco o caja, por ahora.

[57] ¿Hay otra? Sí, claro, la imaginación, pero…

[58] Ya De Moivre estaba al corriente.

[59] Las compañías reasegurados aseguran el exceso de sinestralidad de las aseguradoras.

$$X_t = R - \sum_{j=s}^{t} Y_s$$

donde R son las reservas e Y_s es la variable aleatoria que registra el neto del montante aleatorio del coste de los siniestros del año s menos las primas recaudadas ese año. En media, cada Y_s debe ser negativa. Pues bien, con este modelo se tiene el teorema que dice que

$$\text{Probabilidad de ruina} \leq e^{-\alpha R},$$

donde α es un valor determinado implícitamente por ser el mayor valor para el que la esperanza de $e^{\alpha Y}$ es menor o igual que 1. El uso, en primera instancia, es: primero datos estadísticos y análisis del negocio nos darían una buena estimación de la variable Y; ésta tendrá media negativa (lo ingresado por primas supera los pagos por siniestros), con eso ya se puede determinar α (una cuenta), y por fin, R, si damos el nivel de confianza.[60]

En el análisis anterior hemos partido del supuesto de que había un número muy grande de asegurados en ese bloque homogéneo, pero, ¿y si ése no es el caso y tan sólo hay unos pocos (relativamente) asegurados? Entonces, claro, grandes números no se aplica. Las oscilaciones potenciales del porcentaje de siniestros son mucho mayores y la prima, en consonancia, es mucho mayor, *ceteris paribus*. Piensen en el caso hipotético de un sólo asegurado[61]: la prima pura *debería ser el montante del siniestro*, ora ocurre ora no, y si ocurre, hay que pagar el montante total, no hay fracciones, porcentajes, probabilidades. Olvídense en ese caso extremo de la probabilidad de ocurrencia; cuantos menos asegurados, menos relevante es esa probabilidad. Conviene resaltar que hace falta estimar una probabilidad de siniestro, pero que al carecer casi de información, la estimación será muy subjetiva.

El crédito minorista, es decir, los préstamos con garantía hipotecaria, préstamos de consumo, tarjetas de crédito, etc., que conceden las entidades de crédito, se gestionan análogamente. Sustituya siniestro por pérdida por incumplimiento en la devolución del préstamo. Los intereses de los créditos suelen especificarse como un porcentaje adicional (diferencial) sobre Euribor. Euribor es valor temporal del dinero[62], el diferencial se corresponde con la prima de seguro, que incluirá desde la probabilidad de incumplimiento hasta dividendos de accionistas. La cuenta básica (análoga a la de la prima pura) es que el montante total de pérdidas derivado de incumplimientos se ha de repartir alícuotamente entre los acreditados del grupo homogéneo que sea. Y básicamente, simplificando, claro, dice que en un grupo con una probabilidad de incumplimiento de 5% y sin garantía alguna, por cada 100 euros prestados el diferencial básico será de 5 euros.

Al final, los que hayan cumplido con sus pagos (los justos) habrán pagado una cantidad adicional que debe bastar para cubrir lo que han de dejado de pagar los que han incumplido (los pecadores), siempre que todas las cuentas estén bien hechas.

Cuando se da un préstamo a una gran o mediana empresa, por ejemplo comprando deuda que ha emitido, como en el caso en que se asegura un hecho único, la prima tiene que ser mucho mayor que la que resulta de multiplicar el montante del préstamo por la probabilidad de incumplimiento. Recalcamos aquí, de nuevo, en este caso la necesaria subjetividad de la estimación de probabilidad de incumplimiento. Las emisiones de deuda de estas empresas luego tienen un mercado secundario en la que permanentemente se les da precio, que de alguna manera recoge una percepción del posible incumpli-

[60] Si hubiéramos estimado que $-Y$ es aproximadamente una normal con media 1 millón de euros y desviación típica de 0,3 millones de euros, entonces α sería 22,2, y si el nivel de confianza es de 95%, entonces las reservas mínimas deberían ser de 135 mil euros.

[61] Asegurar las piernas de Beckham, por ejemplo. No va de broma. Aunque, ya puestos, se podría ser más selectivo a la hora de elegir las piernas por asegurar.

[62] Los Euribor son tipos de interés que se fijan en mercados monetarios para préstamos entre grandes bancos.

miento, pero ya es puro procesado de información sobre estados financieros y de prospección sobre su negocio y leyes de oferta y demanda.

Así que cuando los mágicos grandes números compensan incertidumbres se puede tener primero una buena idea de la probabilidad de siniestro o de incumplimiento y la prima o el diferencial puros serán aproximadamente el resultado de dividir la estimación del impacto del daño entre todos los asegurados o acreditados. Pero que cuando éste no es el caso, cuando no hay grandes números, la probabilidad esa es puramente una forma de hablar y la estimación de la prima se sustenta en simple subjetividad.

APOSTANDO A ROJO Y NEGRO

Imaginemos una ruleta perfecta, perfecta en su aleatoriedad, es decir, ideal, matemática, en la que la frecuencia de cada número es exactamente 1/36 y en la que no hay cero[63]; vamos a apostar exclusivamente a rojo, aunque si una irresistible pulsión le incitara a usted a apostar a negro, estaría en su derecho, por supuesto, pero ¡aténgase a las consecuencias! Apostar a rojo o negro en nuestra ruleta perfecta es equivalente a hacerlo a cara o cruz con una moneda asimismo perfecta, pero reconocerán que la ruleta evoca cantidades de dinero más elevadas y excitantes, y que además entre apuesta y apuesta se nos permite disfrutar de un buen cocktail martini *shaken, not stirred.*[64]

Las apuestas son nocionales, por cada 1 que se declara apostado, si sale rojo ganamos 1, si sale negro perdemos 1. Llamamos fortuna a la cantidad de dinero de que disponemos. La fortuna inicial es F_0, y la fortuna tras la n-ésima ronda es F_n. Antes de comenzar las rondas de apuestas, este F_n es una cantidad aleatoria, desconocida. No sabemos cuánto va a ser, aunque sí podemos usar el cálculo de probabilidades para exhibir qué posibles valores pueda alcanzar y con qué probabilidades.

Algunos argumentos que siguen requerirán muchas rondas de apuestas, incluso en alguno hasta infinitas rondas, y para no desbordar impaciencias, se jugará a ese ritmo eleático (véase la nota 22) que permite completar las infinitas rondas en un minuto.

Comencemos analizando la estrategia en la que en cada ronda se apuesta siempre la misma cantidad, digamos de 1 unidad monetaria, la que sea.

---

[63] En *El Jugador*, Aleixéi le explica a la abuela:

> *–¿Y que es eso del cero?... ¿No oíste que ese croupier [...] acaba de gritar cero? ¿Y por qué arrambla con todo lo que hay en la mesa? ¡Qué barbaridad, se lo ha llevado todo! ¿Qué quiere decir eso?*
> *– El cero, bábuschka, queda a beneficio de la banca. Cuando la bolita cae en el cero, todo cuanto haya sobre la mesa, todo sin distinción, pertenece a la banca.*

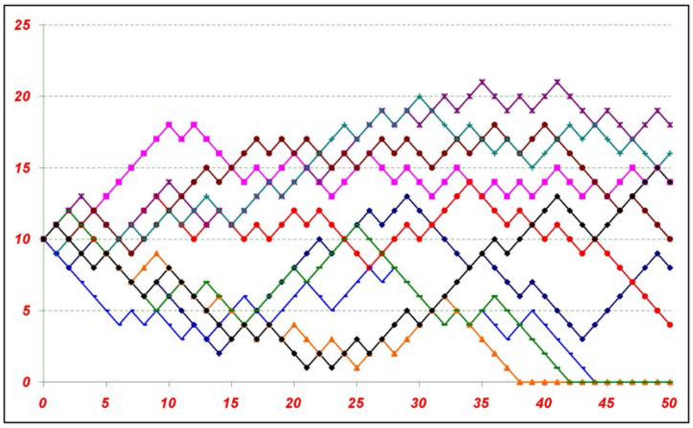
[64] O mejor *a la Buñuel*, como se detalla en una escena de *El discreto encanto de la burguesía*. Como es bien posible que sea ésta la información más interesante –¿la única?– de esta charla no puedo por menos que reproducirla directamente de su autobiografía:

> *Básicamente se compone de gin y unas gotas de vermouth, preferentemente Noilly-Prat. Permítaseme dar mi fórmula personal, fruto de larga experiencia, con la que siempre obtengo un éxito bastante halagüeño. Pongo en la heladera todo lo necesario, copas, ginebra y coctelera, la víspera del día en que espero invitados. Tengo un termómetro que me permite comprobar que el hielo está a unos veinte grados bajo cero. Al día siguiente, cuando llegan los amigos, saco todo lo que necesito. Primeramente, sobre el hielo bien duro echo unas gotas de vermouth y media cucharadita de Angostura, lo agito bien y tiro el líquido, conservando únicamente el hielo que ha quedado, levemente perfumado por los dos ingredientes. Sobre ese hielo vierto el gin puro, agito y sirvo. Esto es todo, y resulta insuperable.*

Conviene codificar la variación de fortuna a que da lugar el resultado de rojo o negro de la n-ésima con una variable X_n que valdrá +1 o –1 con probabilidades respectivas de 50%. Así que

$$F_n = F_{n-1} + X_n\,, \quad n = 1,2,\ldots$$

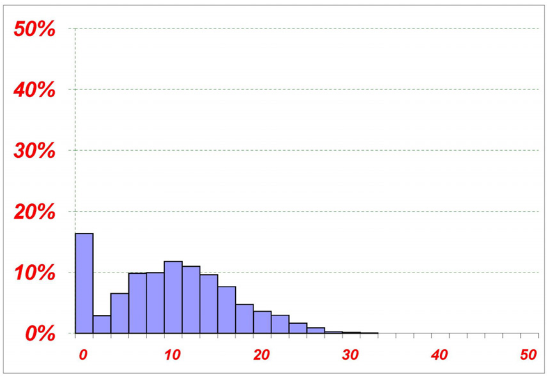
La fortuna F_n es una *suma aleatoria*, $F_n = F_0 + (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$. Bueno, no exactamente, en realidad éste sería el resultado si no hubiera la restricción de que en cuanto F_n se haga cero el juego se para para nuestro entrañable jugador: la ruleta puede seguir girando, pero él ya no puede seguir apostando. La fortuna real tras n rondas será F_n si $F_k \geq 0$ para cada k entre 0 y n (y 0 en caso contrario).

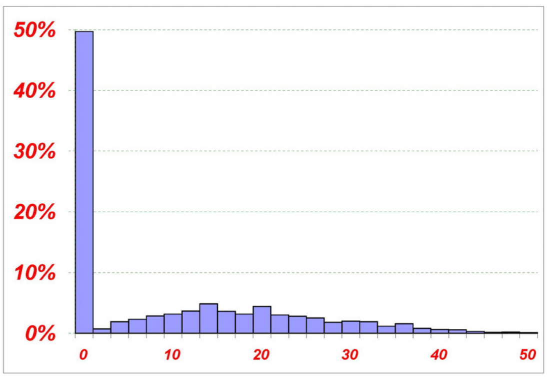


El proceso codificado por la sucesión de variables F_n es conocido en matemáticas como paseo[65] aleatorio simétrico (parado en cero).

Si nuestro jugador tiene como meta multiplicar su fortuna por k y juega compulsivamente hasta que logra su meta o se arruina, la probabilidad de que logre su objetivo es simplemente $1/k$. Es bueno tener una meta, un objetivo, un plan[66], porque si no, si se juega compulsivamente sin límite de tiempo, sin objetivo de ganancias, la probabilidad de abandonar la ruleta arruinado es, a todos los efectos, 100%. Ésta es la maldición del jugador, que entre los sospechosos habituales se conoce como *¡la ruina del jugador!* Pero, ¡atención!, la fortuna tras cualquier número de apuestas es *en media* siempre la fortuna inicial. Sorprendente, ¿verdad? Sí que parece razonable que cuando se juega sin límite de endeudamiento, como en cada apuesta la ganancia media es 0, a la postre, en media, ni se gane ni se pierda. Sin embargo, cuando el juego se para en cuanto la fortuna se hace 0, parece que la posición media tras muchas rondas de apuestas debiera resentirse y ser inferior a la inicial, pero tras meditar un segundo nos daremos cuenta que si bien es cierto que cuando la fortuna llega a 0 ya no hay forma de recuperarse, tampoco la hay de empeorar la situación.

Las distribuciones de valores de la fortuna con 50 o 200 repeticiones partiendo de una fortuna de 10 son:





en la que vemos cómo ha aumentado la probabilidad de arruinarse.

[65] Aunque en lugar de *paseo* también se usa el más estático de *camino*, o el más cansino de *caminata*.

[66] Como decía el general Eisenhower: *In preparing for battle I have always found that plans are useless, but planning is indispensable.*

Insistamos, recalquemos el asombro: si se juega sin una regla como la de retirarse en cuanto se alcance un determinado objetivo de nivel de ganancias, en cada jugada se estará, en media, como al principio, pero a la postre la ruina es inevitable.[67] Da que pensar, ¿no? Partimos de 10, anticipándonos al futuro calculamos que, en media, siempre estaremos en 10, pero al final es cero… ¿dónde se han ido los 10? [68]

Cuando yo tenía 10 años, Giacamo Casanova, me decían, era un libertino disoluto; a los 20 años, una suerte de revolucionario; a mis 30, un ácrata puro; a los 40, un vividor; y ahora, pasados los 50, ahora… me reservo mi opinión, pero era un… de mucho cuidado. He aquí dos extractos de sus memorias, *Histoire de ma vie*, que relatan hechos separados unos pocos días:

> *Jugando a la martingala, doblando continuamente mi apuesta, gané el resto de los días del Carnaval. Tuve la suerte de nunca perder en la sexta carta, pues habríame quedado sin dinero. Me hallaba tan satisfecho de haber incrementado de esta manera la fortuna de mi dueña [...]*
>
> *[...] Seguí jugando a la martingala, pero con tan mala fortuna que quedeme pronto sin dinero. Como compartía mis bienes con mi dueña, era obligado darle aviso de mis pérdidas. Vendió así ella sus diamantes, pero pronto perdí cuanto me dieron por ellos. Quedáronle sólo 500 monedas, de manera que hubo que abandonar el plan de que escapara del convento; porque ya no teníamos nada con lo que vivir [...]*

Lo dicho, un… El término *martingala* se usa ahora en matemáticas para designar el proceso de la fortuna que se obtiene cuando se sigue una estrategia cualquiera de apuestas en nuestra ruleta ideal, y, generalizaciones varias de esa noción. Pero con martingala[69] Casanova se refiere a la estrategia de apuestas que consiste en doblar la apuesta mientras continúe saliendo negro y se va perdiendo, y parando y retirándose en la primera ocasión en que sale rojo.

Pongamos que se comienza con 63 euros. Se empieza apostando 1. Supongamos que sale negro en las cuatro primeras rondas, así que las apuestas habrán sido de 1, 2, 4, 8 y las pérdidas acumuladas alcanzarán 1+2+4+8=15. La estrategia exige que se doble la apuesta, así que en la siguiente ronda la apuesta será de 16, y si se gana, justo se recupera lo perdido y queda además una ganancia de 1. El argumento es general, si no ha habido suerte en las n primeras jugadas y hemos perdido en todas, el total de pérdida acumulada es de $1+2+2^2+\ldots+2^n$, que es exactamente $2^{n+1}-1$. En la siguiente toca apostar 2^{n+1} y si sale rojo habremos compensado las pérdidas y nos queda un neto de 1.

rentabilidad	probabilidad
1,59%	98,44%
-100,00%	1,64%

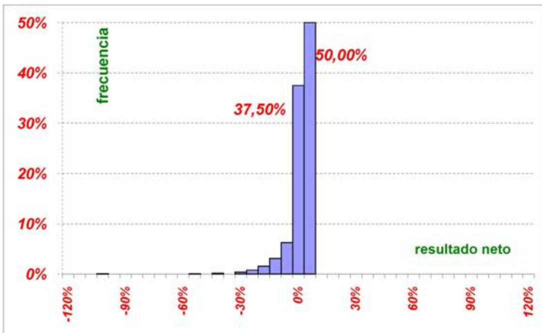
Si sale rojo en alguno de los 6 primeros lanzamientos se habrá ganado 1, pero si resulta que no, que en esos 6 sale negro, habremos perdido 63. En 6 lanzamientos solo hay dos posibilidades: se gana 1, con probabilidad de 63/64=98,44% y se pierde 63, con probabilidad complementaria de 1/64=1,56%. Obsérvese la asimetría extrema.

Casanova intentaba usar su estrategia como forma de vida. Consígase un capital de digamos 63; preferiblemente fondos aportados por un socio institucional, una novicia en un convento, un fondo de pensiones,… Cada día, al Casino, a jugar a la martingala; se gana 1, que se distribuye en tres partes iguales: una para el inversor, otra como comisiones y otra para gastos. La probabilidad de perder un día cualquiera es bien pequeña. Mientras todo vaya bien el esquema va proporcionando buenas rentas a todos. Pero tiene riesgo, claro, y *tanto va el cántaro a la fuente*…; la probabilidad de que este es-

[67] Anoten aquí la sonrisita malévola de la tortuga, mientras Aquiles declina comentar.
[68] No busquen a Aquiles, el de los pies ligeros; se ha marchado. Creo que no volveremos a verlo.
[69] Según el Drae: *Artificio o astucia para engañar a alguien, o para otro fin*. Asimismo, *Cada una de las calzas que llevaban los hombres de armas debajo de los quijotes*. Quijote: *Pieza del arnés destinada a cubrir el muslo*.

quema aguante un año (de 365) días es tan sólo de un 3 por mil, aunque si lo lograra el resultado sería una rentabilidad del 200%. Por cierto, el jugador profesional recibirá, en media, en comisiones aproximadamente 21, más los gastos cubiertos. ¡Cáspita! –pensó la dueña a la que festejaba Casanova.

Pura huida hacia adelante; doblar la apuesta, arriesgar más y más para cubrir pérdidas, acelerar hasta descarrilar, ¡cuánta huida hacia adelante! Abstrayendo de la ruleta: ¡cuánta apuesta de Casanova en tantas decisiones de la vida ordinaria!



Visto lo visto, quizás haya que amarrar un poquito y usar una estrategia no tan arriesgada, y en lugar de doblar, ir multiplicando la apuesta en rondas sucesivas (mientras se va perdiendo) por un factor entre 1 y 2. Las pérdidas son ahora más variadas, y menos cuantiosas, como en el gráfico de la izquierda, PERFIL CASANOVA, pero, claro, las pequeñas ganancias serán algo menos probables. En resumen, ganancias pequeñas casi seguras, contra pérdidas enormes muy poco probables.

Dos anotaciones para precisar un poco. Primero, el cero en la ruleta empeora las cosas, la ruina es más rápida. Segundo, si se pudiera seguir apostando indefinidamente sin límite de crédito, a la larga se lograría esa ansiada ganancia de 1, porque tarde o temprano saldrá rojo; espejismo embaucador: ganancia segura de 1, sin riesgo.

En fórmula, la fortuna sucesiva C_n siguiendo la martingala de Casanova es una suma estocástica, una integral:

$$C_n = C_0 + \sum_{j=1}^{n} \mu_n X_n \ ,$$

donde $\mu_n = 2^n$ si $X_1 = X_2 = \ldots = X_{n-1} = -1$, y 0 en otro caso.

La sucesión de fortunas aleatorias que resultan de cualquier estrategia de apuestas sobre nuestra ruleta ideal se escribe de forma análoga, pero donde μ_n denota la apuesta que se hará en la ronda n y que, en general, dependerá de todos los resultados anteriores:

$$\mu_n = \text{función de } (X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}).$$

Sea cual sea la estrategia de apuestas que se nos ocurra pergeñar, el valor medio de la fortuna que se puede tener tras un número cualquiera n de rondas es siempre la fortuna inicial. No hay ventaja, ni desventaja. Sin embargo, la distribución de posibles valores que se tienen tras esas n rondas depende de la estrategia seguida. Por ejemplo, si se parte de una fortuna de 2 y en dos rondas se apuesta 1 en cada una, los posibles valores de la fortuna serán 4, 2 y 0, con probabilidades respectivas de 25%, 50%, y 25%. Esto quiere decir que si repetimos 100 veces esa estrategia de dos apuestas en 25 de las repeticiones esperamos un resultado de 4, en 50 un resultado de 2 y en 25 un resultado de 0. Pero, si la estrategia es apostar todo lo que se tiene, también en dos rondas, los resultados serán de 8 un 25% y de 0 un 75% de las veces.

Otra cosa es lo que sucede cuando en un minuto eleático se completan infinitas rondas, ¡malévolo infinito en acción!, porque entonces con la apuesta fija y sin objetivo de ganancia, el jugador se arruina seguro, mientras que con la estrategia de Casanova y sin límite de crédito, se gana a la larga la apuesta inicial con seguridad.

CAMINANDO AL AZAR EN SUPERFICIES DE RIEMANN[70]

Seguimos con una ruleta matemáticamente ideal con 50% de probabilidades para rojo y 50% para negro, y permitiremos, ¡somos así!, que se juegue sin límite de crédito. Queremos señalar ahora cuanta flexibilidad dan las estrategias de apuestas para *doblegar el azar* a nuestro antojo, casi.

Para comenzar: con una estrategia adecuada de apuestas *podemos remedar con la fortuna tras n rondas cualquier distribución de probabilidad que nos plazca, siempre que su valor medio coincida con la fortuna inicial*; eso sí, si esperamos lo suficiente, si n es grande. Esto significa que podemos crear un protocolo que anticipando el estado de la fortuna que pueda haber tras cada ronda de apuestas, nos dice cuánto hemos de apostar en la siguiente ronda, con el fin de lograr que los valores de la fortuna tras un número amplio de rondas esencialmente alcance los valores prescritos con las frecuencias prescritas. Antes de comenzar a apostar no sabemos cuál de las evoluciones de caras y cruces va a ocurrir, pero la estrategia permitirá garantizar la frecuencia de resultados posibles.

Veámoslo en acción en un ejemplo. Partimos de una fortuna de 100 euros. Queremos un libro de instrucciones de apuestas para que un 1/3 de las veces la fortuna final sea de 300 y 2/3 de las veces sea 0. La instrucción es la siguiente: apostar 1 hasta que la fortuna sea 300 o sea 0 y en cuanto eso ocurra se deja de apostar. *A priori* podemos determinar cuántas rondas de apuestas nos garantizan que la fortuna tras ese número de rondas será 300 un tercio de las veces y 0 dos tercios de las veces, aproximadamente.

Pero más aún: una hábil estratega puede forzar a que las sendas en sí de la fortuna, y no sólo los posibles valores tras n rondas de apuestas, se tuerzan, se alabeen y sigan prescripciones de comportamiento bastante arbitrarias.

Veamos con un ejemplo lo que se puede conseguir. Se exige[71] que tras n rondas, la fortuna F_n se encuentre con seguridad entre ciertas cotas prefijadas: entre $F_0 + m_n$ y $F_0 - m_n$, y esto para cada n, donde m_n va creciendo hacia a infinito. ¡Bah!, esto no es problema, y se conseguirá simplemente con ir apostando progresivamente menos. Pero además se exige que ninguna apuesta sobrepase 1, y, sobre todo, que en una sucesión de rondas la apuesta media sea al menos ½. Lo que se exige es un pequeño *tour de force*, porque si la estrategia es tal que la fortuna se hallase siempre entre dos cotas fijas, entonces la apuesta media tendrá, necesariamente, que ser cada vez más pequeña y tender a cero. Así que…

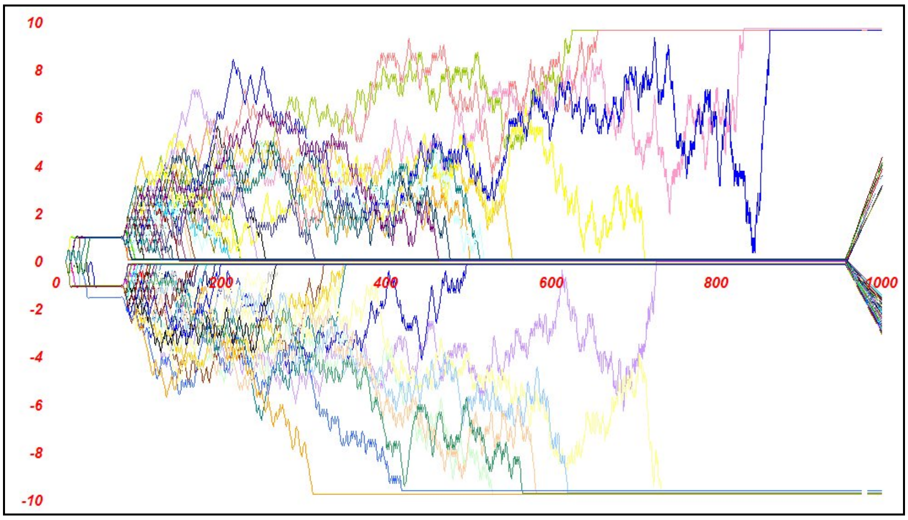
Para lograrlo, el libro de instrucciones muy del gusto de Sísifo puede ser como sigue. Partamos, por simetría, de fortuna cero y recordemos que no hay límite de crédito. Como se trata de cálculos de frecuencias, conviene que imaginemos que 100 jugadores simultáneamente siguen nuestras indicaciones, luego estudiaremos las frecuencias de las sendas que van obteniendo.

Una etapa introductoria, la etapa cero[72], para dar margen de maniobra: durante un buen rato apuestan fijo una cantidad pequeña, pero cuando las fortunas se hacen 1 o –1 dejan de apostar, o mejor apuestan cero; tras un tiempo todos tendrán fortuna 1 o –1, más o menos la mitad (unos 50) de cada alternativa. Vale. Ahora, primera etapa: con una apuesta fija pero algo más pequeña que la anterior, seguirán jugando hasta que su fortuna se hace 10 ó 0, para los que tenían fortuna 1, o se hace 0 ó –10, para los que tenían fortuna –1. Esperamos un buen rato, y veremos que más o menos el 90% de los jugadores tendrán fortuna 0, aproximadamente un 5% tendrán fortuna 10 y alrededor de un 5% tendrán fortuna –10. ¡Ajá!, ya estamos listos para la etapa segunda, que sólo tiene una ronda. ¡Atención!: los que tengan fortuna cero apuesten 1, por ejemplo, los que no, quietos parados en esta ronda (apuestan

[70] ¡Advertencia! Aquí la cosa se pone un punto subidita de tono matemático.
[71] ¡Hay gente pá tó!
[72] ¿Cuál es el ordinal de cero?

0). ¿Cuál es la apuesta media en esta ronda?… 0,9, pues aproximadamente un 90% apostarán 1, y el resto nada. Bien. Los jugadores ahora respiran un rato y dejan pasar bastantes rondas en las que los 100 jugadores charlan animadamente sin apostar. Y ahora, una etapa tercera, análoga a la primera, con la cota 10 reemplazada por un número bien grande, 100, por ejemplo, y luego una etapa cuarta como la segunda pero con una apuesta de digamos 4, para los que justo arrancan con fortuna y así sísificamente: un respiro, una etapa impar, una etapa par, un respiro... ¡Voilà, prueba conseguida!

En el párrafo anterior he deslizado aquí y allá varios *bastantes*, *aproximadamente*, *alrededor de*, que con un poco de técnica relojera se pueden calibrar y ajustar adecuadamente para que todo encaje y el argumento se sostenga. El gráfico LA MARTINGALA DE SÍSIFO recoge una simulación de las sendas de fortuna de esos 100 jugadores en las etapas cero, primera y segunda, con una escala de tiempos que se ha manipulado (más o menos logarítmicamente) para que se pueda percibir el comportamiento de las sendas.



LA MARTINGALA DE SÍSIFO

En pentagrama matemático, el resultado anterior se codifica así:

TEOREMA. *Dada un sucesión creciente m_n de números reales que tiende a ∞, existe una estrategia de apuestas que nunca superan 1 y es tal que la fortuna resultante $\{G_n\}_n$ parte de $G_0=0$ y cumple que*

$$-\boldsymbol{m_n} \leq \boldsymbol{G_n} \leq \boldsymbol{m_n}$$

en cualquier senda y en cualquier ronda y además

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\mathrm{E}\left(\mathrm{G}_{n+1} - G_n\right)\right| = 1$$

(E denota *esperanza matemática*, promedio de la distribución de valores).

Los iniciados en los arcanos de la secta de la Variable Compleja, secta matemática particularmente subrepticia de la que uno, por un servidor, es más que compañero de viaje, pueden apoyarse en estrategias de apuestas como la que he descrito para construir funciones de variable compleja, y obtener[73]

[73] *On the growth and coefficients of analytic functions* (**Annals of Mathematics**, 120 (1984), 505-516), cuyos resultados respondían a cuestiones planteadas tiempo antes por John E. Littlewood y Walter K. Hayman.

TEOREMA. *Sea Ω un dominio en el plano cuyo complemento tiene capacidad nula. Entonces, hay una función f analítica en el disco unidad* ***D****,* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *, que cumple*

i) $f(\mathbf{D}) \subset \Omega$
ii) $\| \limsup_{n\to\infty} |a_n| \geq A \|\Omega\|_B$

donde $\|\Omega\|_B$ *es el radio del mayor disco que cabe en* Ω*.*

La relación entre objetos (matemáticos) tan deterministas como las funciones analíticas de la Variable Compleja y la Teoría de la Probabilidad es asombrosa, y aunque viene de lejos, sigue fascinando[74] a los investigadores. Tuve la suerte de ser iniciado en esa mística conexión por Albert Baernstein II y he tenido la fortuna de compartirla, aprendiendo y disfrutando, con José M. Rodríguez, José G. Llorente, Mavi Melián, Domingo Pestana, Alicia Cantón y Ana Granados y con el *tardano* Juan José Arrieta.

Quizás pueda sorprender algo que este modo de pensar probabilístico se pueda incluso adaptar para ayudar a entender el comportamiento a largo plazo de las geodésicas de las superficies completas de curvatura negativa. Ahí hay poco margen para el azar, aparentemente, porque si nos situamos en un punto de la superficie y elegimos una dirección en que movernos de forma óptima, el camino geodésico a seguir está completamente determinado, y se tarda una eternidad en recorrerlo a velocidad constante.

Para ello conviene estar versado en las sutilezas y familiarizado con los vericuetos de las superficies de Riemann a que las funciones holomorfas dan lugar, como se vanaglorian de estarlo los miembros de la tendencia *Teoría Geométrica de Funciones*, lealmente integrados, ¡oiga!, en la secta de la *Variable Compleja*.

Un ejemplo[75]: consideremos una superficie completa de curvatura negativa M, no compacta para obviar situaciones triviales, fijemos un punto cualquiera p, y sea I el conjunto de aquellas direcciones para las que la geodésica que parte en esa dirección se alejan indefinidamente de p.

TEOREMA. *Hay sólo tres posibilidades:*

i) si M es tiene área finita, I es numerable;
ii) si M tiene área infinita y no tiene función de Green, I tiene dimensión 1 y medida nula;
iii) si M tiene función de Green, I tiene medida plena.

¡No hay gradaciones ni situaciones intermedias!

[74] Para muestra reciente: la teoría de las ecuaciones de Loewner estocásticas, *cf. Basic properties of SLE*, de Steffen Rohde y Oded Schramm (**Annals of Mathematics**, 161 (2005), 883–924.)
[75] *Escaping geodesics of Riemannian surfaces,* con Mavi Melián (**Acta Mathematica,** 187 (2000) 213-236).

A P E R T U R A

LA BOMBA *SUBPRIME*

En *Casablanca*, tras la emotiva escena de *La Marsellesa*, un indignado mayor Strasser le exige al capitán Louis Renault, ese inefable cínico, que cierre el *Café Américain*:

Rick: *How can you close me up? On what grounds?*
Captain Renault: *I'm shocked, shocked to find that gambling is going on in here!*
Croupier: *Your winnings, sir.*
Captain Renault: *Oh, thank you very much.*
Captain Renault: Everybody out at once!

Alan Greenspan[76] compareció hace unos meses ante un comité del Congreso de los Estados Unidos para que explicara, o mejor, expusiera su versión, de las causas de la crisis financiera y económica que explotó en el verano de 2007, y en auto de fe, admitiera sus errores, renunciara a sus ideas y expiara sus culpas. Uno de los congresistas, impaciente ante lo que consideraba rodeos procrastinantes, le recordó la escena de Casablanca y le espetó: *Pero bueno, Mr. Greenspan, no nos diga usted ahora que no sabía que se apostaba.*

El premio Nobel Paul Samuelson[77] explicaba:

> *Por lo visto, nadie aprendió la lección de 1998, cuando Long Term Capital Management estuvo a punto de quebrar y necesitó un rescate pactado por parte del Banco de la Reserva Federal de Nueva York.* ***La ingeniería financiera es lo que nos permite pasar del apalancamiento cero hasta, pongamos, un apalancamiento de 50 a 1. Y cuando el riesgo acumulado resultante explota****, de nuevo todo lo que ocurre es que el director general y el director financiero se van al banco partiéndose de risa por el camino.*

Apuestas apalancadas, ¡hum! Les describiré a continuación una estrategia de inversión, típica de *hedge funds*, en cuya estructuración la Ley de los Grandes Números, en su versión más ingenua, desempeña un papel pivotal.

Recordemos. En los préstamos minoristas, el diferencial sobre Euribor compensa las pérdidas producidas por incumplimiento en una cartera amplia y homogénea. La Ley de los Grandes Números dice que la tasa de incumplimientos en la cartera será aproximadamente la probabilidad de incumplimiento, de manera que si la probabilidad de ese incumplimiento es de un 5% y si en caso de incumplimiento se pierde un 50% del préstamo, ese diferencial será de un 2,5%. Pero, como hemos comentado más arriba, cuando el préstamo es a una empresa de mediano o gran tamaño, de los que no hay suficientes en una entidad para que la Ley de los Grandes Números sea válida, y en la que los incumplimientos no se compensan unos con otros, el diferencial será más elevado que el que acabamos de derivar.

Bien, hasta aquí un hecho de la naturaleza, pero, ¡ajá! –se dice un avispadillo–, ¿qué ocurriría si pudiéramos acumular un gran número de esos créditos a grandes o medianas empresas comprándoselos a distintas entidades financieras de todo el mundo, de este mundo tan pequeño, compacto y global en que vivimos, de manera que la cartera resultante si esté en situación de Ley de Grandes Números? La cuenta entonces es la siguiente: si la probabilidad de pérdida es de 5%, si la pérdida en caso de incumplimiento se estima en un 50% y si el diferencial es pongamos de un 4%, entonces por cada 100

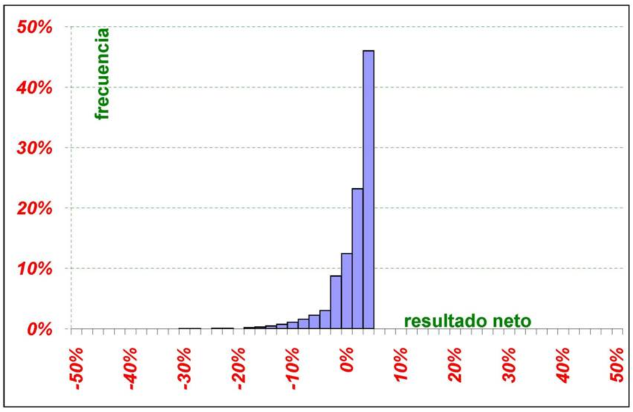
[76] Presidente de la Reserva Federal durante casi veinte años, 1987-2006.
[77] En un artìculo que apareció en diario EL PAÍS: *Adiós al capitalismo de Friedman y Hayek.*

prestados se ganaría un 1,5%, porque los incumplimientos supondrán un impacto de 2,5%, pero como compensación se recibe un 4%. Si las economías de escala y la capacidad de acceso a los mercados lo permiten, hay ahí una oportunidad de ganar con seguridad, ¿no?


How gamblers broke the banks

Ya puesto, y babeante ante la oportunidad de arbitraje y dinero fácil, el ambicioso avispadillo del ¡ajá!, decide rebuscar en la zona gris, sector lado oscuro, que consiste de aquellas compañías, emisoras de deuda, que tienen una determinada probabilidad de incumplimiento, lo que las agencias de *rating*[78] califican de *BBB*, pero para las que los diferenciales son los más altos disponibles, es decir, las que las entidades prestatarias y los mercados secundarios donde esa deuda se negocia consideran más arriesgadas, para así magnificar la discrepancia entre diferencial y probabilidad de incumplimiento.

El avispadillo se deleita ya con una ganancia casi segura, casi sin riesgo, muchos meses seguidos. No; entre otros muchos *caveats* a considerar, recordemos primero que la asignación de probabilidad de incumplimiento a una gran empresa es una tarea que tiene mucho de subjetiva, lo que hace que el resultado en sí de esa asignación sea bastante incierto; y, en segundo lugar, que en cualquier caso esa asignación pretende ser válida para un año típico. Debe preguntarse: ¿qué ocurre si la tasa de incumplimiento pasa a ser de un 10%, y la pérdida en caso de incumplimiento de un 75%, por ejemplo, si el año no es precisamente típico? para responderse que aquella ganancia segura de 1,5% se transforma en una pérdida de 3,5%. ¡Oops!



Esto es un ejemplo típico de estrategia de *hedge fund*, alistando a la ley de los grandes números para combatir en los mercado de renta fija. Si postulamos un ingenuo modelo sobre la incertidumbre de esas asignaciones de probabilidad, como el que subyace en la regulación mundial actual de cálculo de capital en las entidades financieras, el conocido como Basilea II, la distribución de posibles resultados de esa estrategia sería algo así como el que aparece en el gráfico de la izquierda. Familiar, ¿verdad?, el mismo perfil suicida de la huida hacia adelante, de la martingala de Casanova: ganancia pequeña casi segura, con pérdidas enormes poco probables.

Impertérrito e insaciable, el avispadillo del ¡ajá!, quiere más, mucho más, quiere exprimir su ¡ajá! al máximo. Quizás incluso tenga acceso a una versión virtual apalancada. Sin comprar los préstamos, simplemente declara un nominal nocional, virtual, para participar directamente de las pérdidas y las ganancias en proporción al nocional declarado. Insistimos, sin aportar fondos obtiene esa rentabilidad aparentemente casi segura, y por contra paga la rentabilidad negativa en caso de que ésta se produjera. La inversión es ahora una apuesta pura y dura a favor de que la estrategia vaya a funcionar.

Obviemos, y es mucho obviar, la pregunta de qué interés social pueda tener todo esto[79] y cómo se llega a que estas operaciones sean posibles, sin prestar oídos a explicaciones cínicas de que puedan redundar en una mayor eficiencia de los mercados. Se podría argumentar, que, en principio, si estos contratos se establecen entre dos inversores privados, *consenting adults*, arriesgando sus propios fondos, no habría problema. Pero no, ni siquiera en ese caso, no es así, porque los montantes nocionales

[78] Empresas que se dedican justamente a asignar probabilidad de incumplimiento a las empresas grandes, que emiten deuda, e incluso a medianas.
[79] Respuesta: ninguno.

de los que estamos hablando son enormes, porque el número de participantes es amplio, y porque la liquidación de estos contratos en condiciones adversas puede desestabilizar al propio sistema financiero global, como ocurrió en el caso de Long Term Capital Management al que aludía Samuelson, y como ha ocurrido en la presente crisis.

Una vuelta de tuerca más: la cosa pasa de castaño oscuro cuando se amalgaman estos contratos con otros similares[80] en contratos madre que se envuelven y empaquetan hasta adquirir apariencia de instrumentos de inversión estándar, incluso registrados en mercados organizados y avalados por una inspección *light* que les adjudica un *rating* de respetabilidad –para así adquirir la consideración de instrumentos *admisibles* que superan los ingenuos controles de una regulación patéticamente desfasada e indolente hasta la connivencia–, y cuando los inversores finales son ahora, por ejemplo, ¡atención!, fondos de pensiones o planes de jubilación, por ejemplo. En estos instrumentos apalancados y virtuales, opacos –en el sentido de que tras tantas idas y vueltas y tantos intermediarios, es ya imposible saber en qué se está invirtiendo–, las rentabilidades potenciales superan, por supuesto, lo que se puede obtener en mercados tradicionales de instrumentos *normales* de deuda, de esos títulos que como piezas de Lego básicas han servido para crear estos… monstruos. *Nota bene:* el inversor institucional, el gestor de fondos, ante estas ofertas sabe, por supuesto, que las rentabilidades positivas tan jugosas con las que se le seduce tienen como contrapartida asumir riesgos y, aunque no alcance a entenderlos, acepta, no inocentemente, sino claudicando ante los incentivos propiciados por accionistas; y todo esto en nombre de otros que son los que aportan su ahorro y cuyos intereses parecen no formar parte de la ecuación.

Al final, y en esencia, todo esto es un puro comportamiento a la Casanova en todos sus extremos, invirtiendo ahorro de otros a la busca de espejismos de griales de rentabilidad segura, para el propio solaz y beneficio y el bonus correspondiente. Y recuerden Casanova era un… sin descuento. Con volúmenes enormes de estos paquetes virtuales, opacos y apalancados, con los mismos préstamos básicos de referencia multiplicándose en una espiral de espejos en multitud de estructuras, se crea una bomba sistémica, una bomba racimo, que a la larga, necesariamente, explota con un poder destructivo insidioso y masivo.

La bomba subprime es una variante de esta tecnología: ahora se empaquetan y apalancan hasta lo explosivo carteras de créditos hipotecarios concedidos a personas de limitada solvencia sobre montantes muy próximos al nivel de la garantía. *En condiciones económicas muy estables,* los diferenciales deberían compensar el impacto de los incumplimientos, pero un mínimo empeoramiento de esas condiciones afectará substancialmente a la capacidad de pago y al valor de la garantía: riesgo explosivo.

Si la propia entidad que concede estos créditos asumiera estos riesgos tan volátiles, los vigilase y controlase y tuviera capital adecuado, uno hasta casi diría que tiene una función social. Pero si lo que hace es empaquetarlos hasta su opacidad y los transfiere, y quienes los aceptan los vuelven a transferir, de nuevo empaquetados y apalancados… bueno, pues lo visto.

[80] Como, por ejemplo, titulizaciones de las minutas de los despachos de abogados neoyorquinos que litigan contra las compañías tabaqueras. Es decir, instrumentos por los que se le da dinero ahora a esos despachos a cambio de lo que puedan recaudar en sus litigios futuros que duran años.

APERTURA

En uno de sus concisos y jugosos artículos, Julio Camba[81] resume la llamada de ley de Gresham con esta coplilla flamenca:

Gitana te pasa a ti
lo que a la **farsa monea,**
que de mano en mano va
y ninguno se la **quea…**

El papel de los matemáticos, físicos y estadísticos, de los versados en técnicas cuantitativas y llamados quants, en la crisis, ha sido instrumental[82]. No sólo han desarrollado las tecnologías de fabricación sino que además han aportando un halo de respetabilidad, de alta ciencia, actuando como fedatarios públicos de todos estos montajes.

Ha fallado todo: los bancos centrales, la regulación, la supervisión, el control, las agencias de *rating*, los incentivos…y también, y no en pequeña medida, los *quants*. Pero como matemático cercano a todo esto, de lo que puedo y debo hablar y de lo que hablaré, es del comportamiento y del papel de –algunos de– estos últimos.

Steve Ross, catedrático de Yale, ha afirmado en alguna ocasión que cuando se dedica a la *Finanza Forense*, a la autopsia de cadáveres financieros, siempre observa la concurrencia de dos pecados capitales: soberbia y avaricia.

Dejémos a un lado la obvia avaricia, no sin antes recalcar que doblegarse a la presión de los incentivos no es inocente. La arrogancia intelectual de los *quants*, tan alejada de la intrínseca humildad del método científico, los ha hecho sentirse y comportarse como prepotentes *masters of the universe* y olvidar las limitaciones de los modelos matemáticos como meras representaciones de la realidad. Modelos matemáticos significa desde sencillos modelos que intentan explicar un poco el porqué de ciertas concatenaciones causales como la urna de Pólya, hasta modelos que prescriben con precisión asombrosa los efectos de ciertas condiciones de partida, como muchos modelos de la Física.

En los sistemas económicos y financieros, los modelos matemáticos están a mitad de camino, mucho más cerca de la urna de Pólya que de la Física Cuántica. Y se aplican bajo condiciones iniciales inestables y cambiantes, que rápidamente distan de las postuladas y sobre las que actúan agentes con psicología, intereses… Las ecuaciones de los modelos de los sistemas biológicos son, de entre todas las que produce la modelización matemática, aquellas de las que tenemos más incertidumbre sobre su validez estable, y las más imprecisas. Obvio, bien conocido, ¿verdad? Pero en una huida hacia adelante, en una delusión masiva, en un alarde de estulticia, algunos *quants*, bastantes, se han comportado como si no fuera así, como si entendieran, más de lo que honestamente en fuero interno entendían, abusando. Mal, muy mal.

[83]*Pasemos, finalmente, a modo investigador científico. El fenómeno a analizar es el mercado financiero, el complejo mundo de las transacciones financieras. Queremos un modelo-modelo, con todo su aparato de predicciones exactas y su esquema de refutabilidad. Para llegar ahí, le dijo el Arquitecto al Emperador de Asiria, aún distamos mucho, si nos mantenemos en el enfoque de la ingeniería descrita. […]. Hay que incluir los efectos cuánticos, la dosis precisa de behavioral finance, los componentes informacionales. Yo no sé qué es eso de la ciencia*

---

[81] La recopilación en *Austral* se titula *Millones al horno* y el artìculo en cuestión, *Una partida de póquer*. Sin comentarios.
[82] Algún que otro equipo de quants se dedica, ¿dedicaba?, al arbitraje de modelo: diseñar instrumentos cuyo objetivo es que parezcan como más rentables y menos arriesgados de los que en realidad son, cuando se analizan a la luz de modelos que se sabe que usa la competencia. Perversion capital del espìritu cientìfico –vale– y, sobre todo, comportamiento amoral.
[83] Artìculo de un servidor en la revista *Arbor*, febrero de 2007, con el tìtulo de *Quants, Inc.*

> *informacional, pero la modelización científica de las Finanzas ha de ser modelización informacional.*
>
> *[…] Los esquemas basados en procesos estocásticos, incorporando movimiento browniano y saltos, son cándidos, ingenuos. Los modelos actuales no captan detalles de comportamiento. Pero esto no invalida el uso.* ***Invalida creérselos más de la cuenta****. Es un enfoque inocente, pero es el mejor de que disponemos, una aproximación si acaso de orden cero. Permite operar y actuar, con sus riesgos de todo tipo. Y permite analizar y medir y gestionar riesgos, para generar suficientes escenarios en los que discernir el potencial comportamiento de la cartera y de las inversiones o del casamiento de flujos. […]*

Un ejemplo de esta estúpida arrogancia intelectual es aquel comentario que los técnicos del Tesoro sueco deslizaban en su documentación de cómo gestionaban los riesgos derivados de la variabilidad de los pagos de intereses de sus emisiones de deuda, apuntando que no incluían previsiones ni análisis sobre la inflación porque, como era ya obvio, ése era asunto técnicamente resuelto, completamente dominado.

Volvamos a Samuelson, en el artículo ya citado[84]:

> *[…] pasaré a los nuevos "diabólicos monstruos de Frankesntein" de la nueva "ingeniería financiera".* ***Puede que yo y otros compañeros*** *de MIT, de Chicago, de Wharton, Penn y otras universidades,* ***lo pasemos mal cuando nos enfrentemos a San Pedro en las puertas del Cielo.***
>
> *¿Cuál es el problema? Es verdad que los derivados y los créditos recíprocos pueden proporcionar un reparto racional del riesgo y, por consiguiente, reducir el riesgo total, pero también pueden destruir por completo cualquier transparencia.*
>
> *Durante décadas he participado en consejos directivos sin ánimo de lucro con directores generales desde Nueva York hasta California. Ninguno de ellos entendió nunca nada de las fórmulas de Black, Scholes y Merton para valorar activos. Todo lo que sabían, o pensaban que sabían, era que los nuevos y maravillosos centros de beneficios libres de riesgo habían invadido sus despachos. Era mejor que la alquimia que convertía el estiércol en oro.*

Abundando en monstruosidades, he aquí el párrafo inicial del libro *A Demon of Our Own Design: Markets, Hedge Funds, and the Perils of Financial Innovation*, de Richard Bookstaber, publicado, ¡atención!, en 2006:

> *While it is not exactly true that I have caused the two great financial crisis of the late twentieth century –the 1987 stock market crash and the Long Term Capital Managemenet (LTCM) hedge fund debacle 11 years later– let's just say I was in the vicinity. If Wall Street is the economy's powerhouse, I was definitely one of the guys fiddling with the controls. My actions seemed insignificant at the time, and certainly the consequences were unintended. You don't obliterate hundreds of billions of dollars of investor money. And that is that the heart of this book–****it is going to happen again****.* ***The financial markets that we have constructed are now so complex, and the speed of transactions so fast, that apparently isolated actions and even minor events can have catastrophic consequences****.*

Casandras como Bookstaber[85] hubo much@s. Y Casandras retrospectivas ahora hay legión, fenómeno típico de la Economía, *dismal science* tan ágil en predecir el pasado, pero es tan fácil *to be wise after the fact*, o, en castizo, a toro pasado[86].

---

[84] Véase la nota 76.

Hasta el denostado Greenspan, por cierto, en unos de sus últimos discursos al frente de la Reserva Federal[87], en encarnación Casandra, advirtió claramente aunque con recomendaciones más bien tibias que casi invitaban a la inacción, a un *deja ver*, de los peligros de tanta concentración de riesgo de contrapartida en el mercado de instrumentos derivados de crédito.

En los tiempos que corren, conviene analizar y criticar con discriminación, y no hacer causa general, contra toda la innovación financiera. Los instrumentos financieros derivados cumplen la función de transferir adecuadamente riesgos, de trasladarlos desde aquéllos que no pueden gestionarlos a aquéllos con el apetito y la capacidad para asumirlos: una función innegablemente útil. Pero el riesgo sin diluir, sin grandes números que lo compensen, como la energía, ni se crea ni se destruye, solo se transforma…y se concentra …explosivamente, y se tiene que controlar, regular, supervisar, poner coto a las apuestas perversas que juegan con el dinero y los ahorros de otros.

SÍSIFO IRREDENTO

John K. Galbraith publicó en el año 1955 su libro *The crash of 1929*. El libro, en el catálogo de la editorial Ariel, acaba de ser reeditado por *n*-ésima vez, dos años después de la muerte de su autor. En el prefacio de una edición de quizás de los años 70, el autor, con la medida justa de orgullo y sin vanagloria, comenta las causas de su éxito perenne; arguye que sin duda algún mérito intrínseco tiene el libro, pero que la verdadera razón de su éxito no es otra que su permanente actualidad: justo cuando toca ser descatalogado, su libro, al menos su título, cobra inmediata actualidad porque otra crisis, una más, con matices distintos, pero raíces similares (¿avaricia, soberbia, exuberancia?) se cierne sobre el panorama económico y esto, más o menos, cada diez o quince años. Cometemos los mismos errores, ¡ay si Zenón hubiera charlado sin las prisas de Aquiles, el de los pies ligeros, con el impenitente Sísifo!, porque la sociedad no tiene memoria y los individuos no recordamos, porque la memoria social dura una generación, que en términos orteguianos es, ¡hum!, de quince años, porque la sociedad, como masa, es intrínsecamente bipolar. ¡Naturaleza humana! [88]

Creo que todo lo anterior es cierto, pero que hay más, que con vehemencia creciente, el ruido oculta las señales, que como dice Daniel Innerarity en *La sociedad invisible* el futuro ya no es lo que era, que el presente no existe y que el futuro es como un tren desbocado que avanza sin avisos de silbatos hacia nosotros sin que tengamos tiempo de asimilar su novedad, sus intrínsecas diferencias con la historia, –¡maestra, sí!, pero ajada, ¡la pobre!–, y no da tiempo de cambiar, a amoldarse, a refugiarse.

Estoy con Bookstaber en que hemos creado un sistema financiero tan complejo, tan interrelacionado, tan pequeño y compacto, donde las transacciones son tan inmediatas, donde acciones aparen-

[85] Quién iba a creer las advertencias y admoniciones de un *insider*, ¡bah, un resentido!, de tan improbable nombre.
[86] En una retransmisión televisiva de atletismo comentaban carreras al unìsono dos glorias nacionales, Fermìn Cacho y José Luis González. En una primera tanda de 1500 metros, en la repetición José Luis González se hacìa cruces de por qué el representante español no habìa atacado justo en aquella curva, en aquel momento tan decisivo. Cacho mantuvo un discreto y prudente silencio durante la agresiva perorata de González. En la siguiente tanda, en un momento dado, justo antes de la misma curva, Cacho le pidió en antena a González que decidiera si habìa que atacar ya o esperar, González cogido por sorpresa, no respondió; y Cacho, elevando el tono de voz le espetó: *Ahora, Jose Luis, ahora es cuando hay que decidirlo y decirlo, no después cuando ya la carrera ha terminado, porque a toro pasado…* Sea.
[87] *Remarks by Chairman Alan Greenspan: Risk Transfer and Financial Stability* To the Federal Reserve Bank of Chicago's Forty-first Annual Conference on Bank Structure, Chicago, Illinois (via satellite) May 5, 2005. http://www.federalreserve.gov/Boarddocs/Speeches/2005/20050505/default.htm.
[88] Que gusta decir Daniel Manzano, el economista sonriente, senequista ocasional, admirado socio.

temente inocuas, aisladas y menores tienen efectos catastróficos. Y, quizás, no sólo éste el caso del sistema financiero, sino en toda la estructura social. La complejidad del propio sistema convoca irremediablemente al caos, ¡aleteos de mariposa generando tifones!, y su compacidad fuerza irreductiblemente que lo impredecible, lo caótico, suceda casi de inmediato, como a traición, sin capacidad de respuesta ante sus efectos. Imaginen una bola de billar perfectamente esférica rodando por una plano horizontal, perfectamente plano; le damos un golpe con un taco de billar y empieza a rodar; hemos apuntado en una dirección, nuestra puntería no es perfecta, pero tras unas pocas mediciones, que llevan un tiempo, podremos saber en qué dirección exacta nos estamos moviendo. Pero si en lugar de rodar por un plano, la bola rueda sobre una mesa de billar pequeña y octogonal, donde los rebotes son perfectamente elásticos, quizás nuestras mediciones tarden más que el tiempo entre sucesivos rebotes y pronto nos daremos cuenta de que sólo nos resta dejarnos llevar por este devenir cáotico y sin fin, con garantía de eterno retorno.

Como dice William Gibson en su *Pattern recognition*, novela negra de tecno-ficción (¿ficción?),

> *Fully imagined cultural futures were the luxury of another day, one in which "now" was of some greater duration. For us, of course,* ***things can change so abruptly, so violently, so profoundly, that futures like our grandparents' have insufficient "now" to stand on. We have no future because our present is too volatile…*** *We have only risk management. The spinning of the given moment's scenarios. Pattern recognition.*

Un panorama desasosegante, un diagnóstico amedrentante, de muchos frentes abiertos inestables, susceptibles de cambios vertiginosos, con suficientes escritos en la pared, suficientes avisos y señales, como la velocidad y vehemencia con la que se ha desencadenado esta crisis. Sin duda.

Hay mucho que aprender, mucho que cambiar en la sociedad del riesgo en que vivimos, que parece diseñada en su compacidad global para generar caos incontrolado. Hace falta una cultura global de permanente vigilancia para desactivar tanto riesgo, para no generarlo, no con voluntad ingenua de que no se repitan crisis, que se repetirán, sino para que no sean devastadoras, porque de éstas sólo hace falta una para que no haya vuelta atrás. Y no hablo de la Economía o del sistema financiero que también, sino de la maltrecha ecología, de la brutal desigualdad… Y se hará, ¡claro que sí!

CODA

Tras esa dosis de moralina, tan casándrica y, a qué negarlo, tan terapéutica[89], *¡sursum corda!…* permítanme una coda sobre lo bueno y lo bello.

Desde aquel lejano septiembre, hasta aquí y ahora, deformado ya sin remedio casi como aquel personaje de Paul Auster en *La música del azar*:

> *He tratado con números toda mi vida. Tanto que he acabado por darme cuenta de que cada número tiene su propia personalidad. Por ejemplo, el 12 es muy distinto del 13. El 12 es estirado, concienzudo, metódico, inteligente, mientras que el 13 es solitario, un tipo sospechoso que no se lo pensaría dos veces antes de quebrantar la ley para conseguir lo que desea. El 11 es fuertote, un deportista que disfruta desbrozando caminos en un bosque o escalando montañas. El 10 es simplón, un personajillo blandurrio que siempre hace lo que le dicen; el 9 es profundo, místico, un buda contemplativo. No quiero aburrirle con todo esto, pero creo que ya se puede hacer una idea de lo que quiero decir.*

[89] ¡Puf! Gracias por esta catarsis, con su punto expiatorio.

Un tiempo *que me ha dado tanto*, sobre todo la fortuna de compartir…

> *…la discusión [con] colegas matemáticos haciendo malabarismos en el vacío con algún concepto ideal difuso y preciso, elemental y complejo, esencialmente compartido, transmitiendo matices sutiles con lenguaje e imágenes de secreta complicidad, persiguiendo un cierto enfoque, una idea tránsfuga y feliz, una conexión inesperada que ilumine una verdad científica (teorema) razonablemente novedosa que le atañe, exige una generosa voluntad de compartir, una, asaz breve, comunión de espíritu que crea vínculos de puro hermanamiento, de hermandad de las mentes. Ese milagro raro de la experiencia mística de estar en posesión de una verdad, pequeña quizás, pero nueva, que tan poéticamente relataba Schrödinger al rememorar el "advenimiento" de su ecuación, pero ahora en versión compartida.*[90]

A *Chanquete*, al gran Antonio Ferrandis, le concedieron hace años el premio al mejor actor en el festival de cine de Karlovy Vary en la actual Chequia. En la consiguiente entrevista, en una exhibición de original imaginación le preguntaron que qué sentía, si se sentía orgulloso. Y respondió que sí, que algo sí, pero que en realidad, él era irrelevante, que lo que la gente retendría en su memoria durante un tiempo era que un actor español había sido premiado.

Así me siento yo. Abrumado y desbordado por un honor desmesurado fruto del afecto, que me llena de orgullo, de orgullo sobre todo por la fortuna de haber generado tanto cariño en mis amigos y colegas Pepe Méndez, Antonio Martinón y Fernando Pérez, en la Facultad de Matemáticas, y en la Universidad de La Laguna. Me hacen un inmenso honor a mí, pero lo que queda, lo que espero que permanezca, es que uno de aquí, que empezó aquí…

José Luis Fernández Pérez (Santa Cruz de Tenerife, 1956) inició los estudios de Matemáticas en la Universidad de La Laguna y los concluyó en la de Zaragoza. Realizó su tesis doctoral en la Washington University de Saint Louis. Ha sido profesor de las universidades de Wisconsin y Maryland, siendo en la actualidad catedrático de Análisis Matemático de la Autónoma de Madrid.
Su campo de investigación es el Análisis Complejo, en el que está considerado como un especialista de primer orden. Su obra ha sido publicada en las más influyentes revistas matemáticas. Su trabajo ha sido reconocido con el nombramiento de académico correspondiente de la Real Academia de Ciencias.
Además de su labor como docente e investigador ha desarrollado una intensa actividad a favor de la cultura matemática. Ha sido presidente del Comité Español ante la Unión Matemática Internacional y del Comité Español del Año Mundial de las Matemáticas 2000. También presidió el Comité promotor de la candidatura de Madrid como sede del *International Congress of Mathematicians* del 2006, designación que se logra en 2002.
Es codirector de *Revista Matemática Iberoamericana,* revista de investigación de alto impacto, y lo fue asimismo de *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española.*
Además de su trabajo universitario, es consultor de Analistas Financieros Internacionales y dirige el Máster Ejecutivo de Finanzas Cuantitativas.

[90] De una nota en el Boletín de la Real Sociedad Matemática Española recordando al añorado Juha Heinonen.