Recibido: jueves, 26 julio 2007

multimedia ::
matematicalia
revista digital de divulgación matemática
Vol. 3, no. 1 (feb. 2007)

"Constelaciones: El juego de los tres colores": buscando la solución

Rafael Ramírez Uclés
Colegio El Carmelo (Granada)
e-mail: rramirez@ugr.es

Víctor Albendín Ramírez
IES Luis Carrillo de Sotomayor (Baena, Córdoba)

El primer paso para resolver un problema es interesarse por él.
TEOREMA DE UCLÉS

Generalmente, la resolución de problemas presenta un innato atractivo para la mayoría de nosotros. Pero, a veces, el contexto en el que aparece este reto puede añadir una mayor motivación para enfrentarnos a él.

En este sentido, descubrir la solución, las estrategias y la esencia de un juego de mesa siempre ha movilizado a las mentes matemáticas más inquietas. Además, si tras el juego se esconden aplicaciones para otros campos de la ciencia, el estímulo aumenta.

"*Constelaciones: El juego de los tres colores*" es un juego de mesa con propiedades geométricas y numerosas aplicaciones para el aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes matemáticas (teorema de Tales, combinatoria, estructuras geométricas, característica de Euler, grafos conexos...). Su versión original está patentada en colaboración con la Universidad de Granada.

En este artículo presentamos la versión informática resultado de un proyecto subvencionado por la Dirección General de Innovación Educativa y Formación del Profesorado de la Junta de Andalucía en el II Concurso de Materiales y Recursos Educativos Digitales en Software Libre.

Nos quedan muchas preguntas abiertas: solución óptima, clasificación de soluciones, estrategias ganadoras... Tras presentaros el juego, facilitaros su descarga gratuita y proponeros algunas ideas para su tratamiento matemático, ¿quién acepta el reto?

Su leyenda original

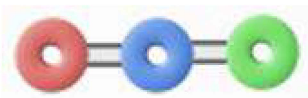
Cuenta la leyenda que en dieciocho lejanos rincones del universo existen constelaciones formadas por tres estrellas alineadas y separadas por la misma distancia que ocuparía una de ellas en la bóveda celeste. Las estrellas que las determinan son de tres colores distintos.

Cada noche, estas constelaciones viajan por el espacio hasta que se encuentran las unas con las otras. Cuando dos estrellas del mismo color de constelaciones diferentes se unen, se funden de tal modo que queda una nueva constelación mayor formada por cinco estrellas. Ésta vuelve a viajar hasta capturar a una nueva errante fundiéndose nuevamente una o varias de sus estrellas.

De este modo, progresivamente, forman una constelación gigante, la cual viaja más rápido si está formada por un menor número de estrellas. Al amanecer cada estrella retorna a su rincón y al anochecer vuelve a viajar. La leyenda afirma que sólo cuando la constelación gigante viaje lo más rápido posible quedará unida para siempre. ¿Cuál es esta constelación?

Descripción

El juego consta de 18 fichas diferentes, formadas a partir de las posibles combinaciones de tres colores: rojo, verde y azul.
Cada ficha está compuesta de tres círculos o discos alineados y unidos entre sí por dos segmentos, de igual longitud que el diámetro, tal y como se muestra a continuación.



Apariencia de una ficha.

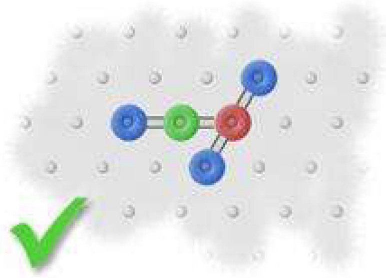
En el juego original, los pivotes en los que se depositan las fichas van libres y admiten todos los giros. En la versión informática, están fijos y forman parte de un tablero cuadriculado (las fichas giran múltiplos de 90º) o con un entramado hexagonal (giros múltiplos de 60º). Por su parte, las fichas se pueden girar y trasladar a lo largo del tablero antes de ser colocadas.

El tipo de tablero se puede elegir al principio del juego; el tablero cuadrado es más fácil de utilizar, aunque es menos flexible que el tablero hexagonal.

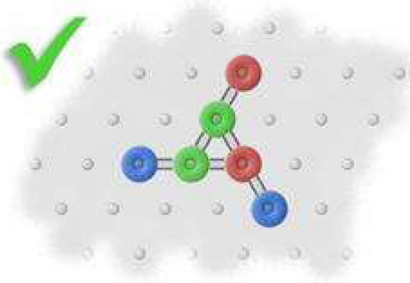
El reto

Debes colocar las 18 fichas de colores en el tablero, de manera que el número de discos visibles sea el mínimo posible; para tal fin, las fichas se pueden solapar entre sí, siempre que cumplan unas reglas muy fáciles.

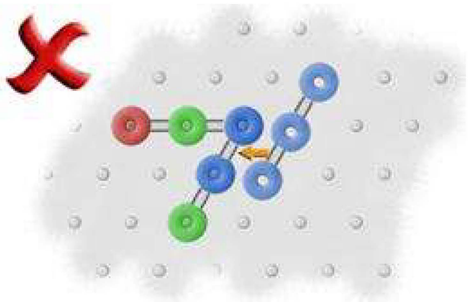
Reglas del juego



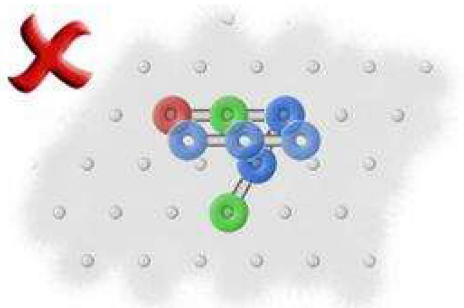
Dos fichas se unen al superponer un único círculo de una ellas con otro del mismo color de la otra. Además, sólo pueden contactar en uno de sus círculos (los segmentos no pueden superponerse ni contactar con los círculos ni con otros segmentos).



Una misma pieza puede unirse a su vez con una, dos o más piezas.



Los segmentos no pueden solaparse.



Los segmentos no pueden cortarse.

Aprender jugando

En la página web en la que os podréis descargar el juego, aparecen otros tipos de contenidos. Existe una *demo* introducción en la línea de los videojuegos convencionales, explicaciones sobre su utilización, actividades, código fuente...

Además de la versión en solitario, el juego permite que dos jugadores se enfrenten para conseguir puntos mediante solapamientos de fichas. También existe la opción de retar al ordenador, programado con inteligencia artificial en tres niveles de dificultad.

El juego didáctico que se presenta se encuadra dentro de los recursos educativos de carácter *granular*, también conocidos como *objetos de aprendizaje*. Estos materiales presentan numerosas ventajas frente a los tutoriales y trabajos más extensos tradicionales.

Las actividades a realizar con el juego *Constelaciones* se han agrupado en 6 unidades o temas, cada una de las cuales se puede descargar tanto en su versión Windows como Linux. Actualmente se están elaborando nuevas actividades recogiendo las sugerencias de los jugadores que lo están poniendo en práctica.

BLOQUE 1: TEOREMA DE THALES

UD	Nombre	Nivel
1A	Proporciones	-Primaria -1º Ciclo ESO
1B	Clasificación de triángulos	-Primaria -1º Ciclo ESO
1C	Teorema de Thales	-2º Ciclo ESO
1D	Polígonos regulares	-2º Ciclo ESO

BLOQUE 2: MOVIMIENTOS EN EL PLANO Y TEOREMA DE PITÁGORAS

UD	Nombre	Nivel
2A	Pitágoras. Triángulos.	-2º Ciclo ESO -Bachillerato
2B	Movimientos en el plano	-2º Ciclo ESO
2C	Movimientos en el plano	-2º Ciclo ESO
2D	Movimientos en el plano	-2º Ciclo ESO

BLOQUE 3: CARACTERISTICA DE EULER

UD	Nombre	Nivel
3A	Caras, lados y vértices	-1º Ciclo ESO -2º Ciclo ESO

BLOQUE 4: COMBINATORIA. PROBABILIDAD

UD	Nombre	Nivel
4A	Número de fichas	-1º Ciclo ESO -2º Ciclo ESO
4B	Estructuras equivalentes	-1º Ciclo ESO -2º Ciclo ESO
4C	Probabilidad	-2º Ciclo ESO -Bachillerato

BLOQUE 5: ESTRUCTURAS GEOMÉTRICAS

UD	Nombre	Nivel
5A	Coordenadas	-Bachillerato
5B	Areas y perímetros	-Bachillerato
5C	Distancias	-Bachillerato
5D	Matrices y grafos	-Bachillerato

BLOQUE 6: ACTIVIDADES DE INVESTIGACIÓN

UD	Nombre	Nivel
6A	Cómo se investiga en Matemáticas	-2º Ciclo ESO -Bachillerato
6B	La Inteligencia Artificial en el juego de *Constelaciones*	-2º Ciclo ESO -Bachillerato

A continuación, a modo de ejemplo y para motivar el reto de encontrar la solución óptima y clasificarla, presentamos el formato de una de las anteriores actividades, concretamente la 6A: *¿Cómo se investiga en Matemáticas?*

Buscar la solución óptima

Para esta actividad selecciona un solo jugador, la plantilla hexagonal y un solo color.

Vamos a plantearte un procedimiento para intentar determinar una solución óptima del juego Constelaciones, es decir, una estructura construida con las 18 fichas y en la que aparezca el menor número de pivotes. Esta actividad consiste en que intentes explicar cada uno de los pasos que se dan a continuación.

Nuestro **Problema**: *¿Cómo son las estructuras que tienen el menor número de pivotes?*

1. Simplificamos el problema utilizando una plantilla hexagonal con un solo color.
2. Determina varios ejemplos de estructuras y calcula para cada uno de ellos el número de pivotes, el de las caras y el de los vértices.
3. Explica los pasos que ha dado este investigador:

Conjetura: El número de caras es menor que el número de pivotes (sin contar la región no acotada).

*Una **conjetura** es una afirmación que creemos que es cierta, pero que aún no hemos demostrado. Podemos haberla obtenido al comprobar que se cumple en toda las estructuras conocidas hasta ahora y tenemos algunas pistas para creer que es cierta:*

Utilizamos la fórmula de Euler en el plano: $\text{Caras} - \text{Lados} + \text{Vértices} = 1$. La reformulamos con nuestra definiciones de Caras, Segmentos y Pivotes (Unidad 3) y comprobamos con ejemplos que se cumple (ver actividades de la Unidad 3).

En este caso, tenemos que tener en cuenta que $\text{Caras} + \text{Pivotes} = 2n+1$, siendo n=número de fichas que componen la estructura. Cuando hemos colocado todas las fichas, $n=18$.

Esta fórmula obliga a que la paridad (si son pares o impares) de las caras y vértices sean distintas (por lo tanto no podría ser el mismo número), luego el número de caras y de pivotes debe ser uno mayor que otro. Al comprobar con ejemplos parece que el número de caras es menor que el de pivotes.

Teorema: La solución del juego utilizando fichas de un solo color tiene 19 pivotes.

*Un **teorema** es una afirmación matemática de la que podemos dar una demostración siguiendo unos pasos y razonamientos lógicos.*

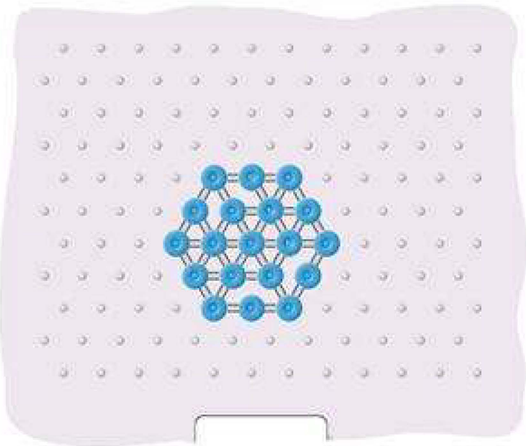
Demostración: ¿Podríamos demostrarlo utilizando la característica de Euler y la conjetura?

Por un lado, $\text{Caras} + \text{Pivotes} = 37$.

Si la conjetura es cierta, $\text{Caras} < \text{Pivotes}$; por lo tanto, el número menor de pivotes sería 19 (habría 18 caras).

Si la formasen 18 pivotes, tendría que haber 19 caras y esto contradice nuestra conjetura.

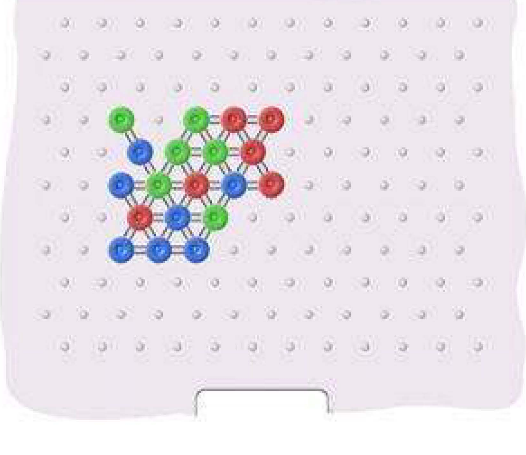
Por lo tanto nuestro Teorema es verdadero (siempre que la conjetura sea verdad). Además, podemos encontrar soluciones con 19 pivotes; aquí te mostramos una (hay muchas más).



Teorema: Las soluciones para el juego *Constelaciones* con color tienen 19 pivotes.

Si cuando consideramos el juego con un solo color, obteníamos soluciones con 19 pivotes, al utilizar fichas de colores las soluciones tendrían que tener 19 o más pivotes. Si encontramos una solución en color con 19 pivotes habríamos demostrado este Teorema.

Para ver que existen soluciones en color con 19, os mostramos la primera que consiguió Jose Mª. Márquez Vázquez:



A partir de una solución podemos obtener infinitas mediante movimientos en el plano y permutaciones de color. ¿Cómo sabremos que dos soluciones son la misma salvo estos movimientos o cambios de color? Consideremos la siguiente definición:

Definición: Dos soluciones son equivalentes cuando una se puede obtener a partir de la otra mediante giros, traslaciones, simetrías, composición de ellas y/o permutaciones de color.

Dada cualquier solución podemos obtener a partir de ellas infinitas soluciones equivalentes aplicando giros, traslaciones, reflexiones, composiciones de ellas y/o permutaciones de color. Utilizando las coordenadas adecuadas y los movimientos y colores necesarios podemos elegir siempre de este conjunto una solución que la represente (a la que llamaremos *representante canónico*), y es la que la distingue de cualquier otra solución que no sea equivalente (pues el representante de ésta será distinto).

Teorema: Podemos determinar un representante canónico para cada clase de soluciones con color (salvo las seis correspondientes permutaciones de color).

La idea de la demostración consiste en colocar (mediante isometrías del plano) el centro de la ficha completamente roja en el origen de coordenadas, el centro de la ficha completamente azul en el semieje positivo de abscisas y el centro de la ficha verde en el semiplano superior (y consideramos las seis correspondientes soluciones equivalentes obtenidas como resultado de las seis permutaciones posibles entre los tres colores).

Referencias

Todo el material se puede consultar y descargar gratuitamente de la siguiente dirección (además encontraréis la *demo* del juego con la presentación de éste, todos los requisitos para su instalación, el código fuente y algunas sorpresas más):

http://www.victoralbendin.org/constelaciones.

Bibliografía: R. Ramírez Uclés, V. Albendín Ramírez: *Constelaciones: el juego de los tres colores*. XIII Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (XIII JAEM). Granada, 2007.

Sobre los autores

Rafael Ramírez Uclés (i) es profesor de matemáticas en el Colegio El Carmelo de Granada. **Víctor Albendín Ramírez** es profesor de Informática en el IES Luis Carrillo de Sotomayor de Baena (Córdoba). Este proyecto surgió buscando la respuesta a una ingenua pregunta: *¿Cómo programar un ordenador para encontrar la solución óptima si aún no conocemos la estrategia ganadora para conseguirla?* Esperamos vuestros comentarios, sugerencias y soluciones en la página web de *Constelaciones*.