matematicalia
revista digital de divulgación matemática

CULTURA

Volumen 7, núm. 4 (diciembre 2011)
9 páginas

http://www.matematicalia.net
ISSN: 1699-7700

Recibido: 13 de octubre de 2011
Publicado: 02 de febrero de 2012

Superficies de gomaespuma y la cuártica de Klein

José Luis Rodríguez Blancas
Universidad de Almería
e-mail: jlrodri@ual.es
página web: http://www.ual.es/personal/jlrodri

Resumen

El artículo versa sobre la cuártica de Klein, modelo algebraico del triple toro, y explica la forma de construirla geometricamente con gomaespuma.

Introducción

Felix Klein descubrió en 1879 simetrías ocultas en las superficies de Riemann (Figura 1). ¿Quién diría que la primera, por ejemplo, con una simetría de orden 7, es un triple toro con dos discos recortados?

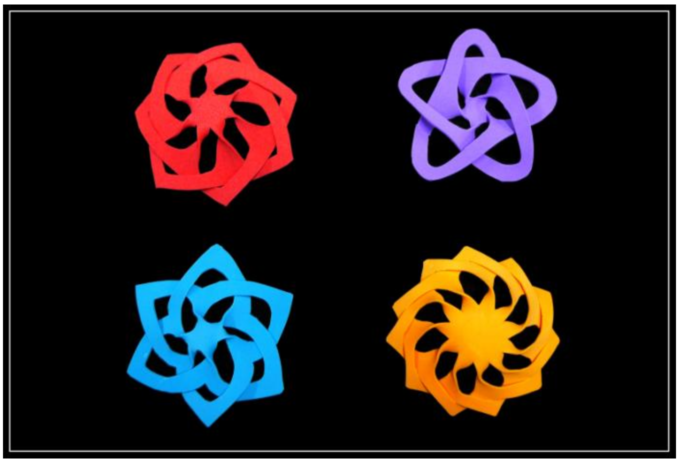

Figura 1. Superficies con distintos órdenes de simetría. [Fotografía: Alejandro de la Paz].

1. Simetrías del triple toro

El triple toro es como la superficie de una rosquilla, pero con tres huecos. Existen muchas y variadas maneras de representarlo [6], siendo objeto de estudio en distintas ramas de las matemáticas. Algunas de estas representaciones son realmente bellas porque reflejan simetrías, tal y como se aprecia en la Figura 2.

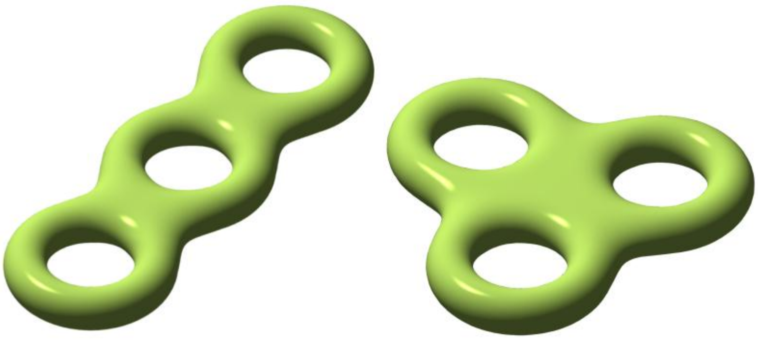

Figura 2. Representaciones del triple toro. [Fuente: Wikipedia, autor: Oleg Alexandrov].

En la imagen de la izquierda aparecen visibles 8 simetrías de orden 2 (respecto de los tres ejes). En la representación de la derecha vemos una simetría de orden 3.

Antonio Costa destacó en su charla titulada *Simetrías de superficies* [2, 3] el resultado sorprendente de Klein [4], que asegura que el triple toro posee además simetrías de orden 7. La famosa *cuártica de Klein,* dada por la ecuación en variables complejas $x^3y + y^3z + z^3x = 0$, es un modelo algebraico del triple toro sobre el que Klein basó sus investigaciones. El modelo geométrico tridimensional más conocido del triple toro es el reproducido en la Figura 3.

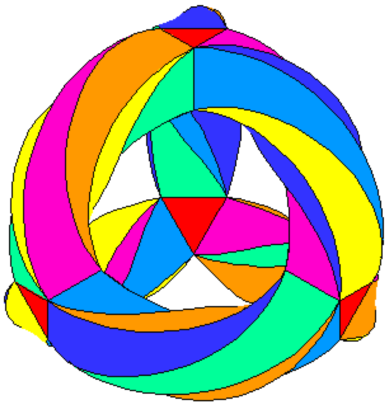

Figura 3. Triangulación en el triple toro. [Imagen: Greg Egan].

Este modelo consta de 56 triángulos, 24 vértices y 84 aristas, donde en cada vértice concurren 7 triángulos. Su superficie dual está formada por 24 heptágonos (véase una escultura en mármol de Helaman Ferguson).

Este modelo geométrico puede desplegarse en el plano hiperbólico, con la teselación regular {3,7} (cf. [7]), dando lugar a una figura plana simétrica de orden 7 denominada *configuración de Klein* (Figura 4).

Para reconstruir el triple toro a partir de esta figura desplegada, la arista $2\mathrm{n} + 1$ debe pegarse con la arista $2\mathrm{n} + 6$, módulo 14, teniendo en cuenta que las aristas pares van en dirección opuesta. En la figura se ven 15 heptágonos enteros (el azul central, los 7 rojos y los 7 amarillos). Los heptágonos en verde-gris se unen dos a dos para formar 7 heptágonos. Los 7 pedacitos del borde en azul-gris con forma de triángulo, forman otro heptágono y, por último, los restantes 7 pedacitos en azul-gris con forma de cometa forman otro heptágono. En total 24 heptágonos regulares, unidos de tres en tres en cada vértice. Por eso, la cuártica de Klein es conocida también como el *cuerpo platónico* de 24 heptágonos.

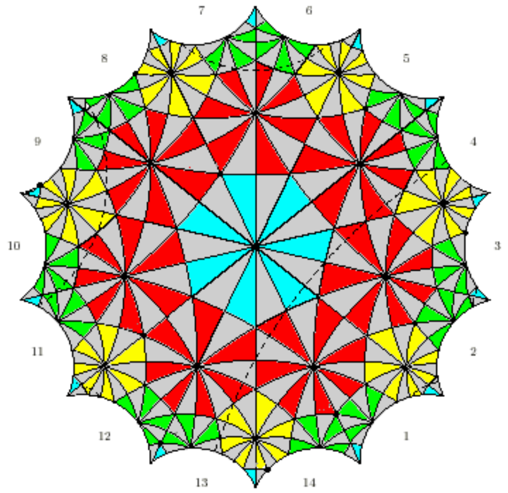

Figura 4. Configuración de Klein, coloreada por Tony Smith.

Si recortamos los dos heptágonos que forman los 14 pedacitos de color azul-gris del borde, y estiramos la figura suficientemente, como si fuese de goma elástica, podremos pegar el borde físicamente, obteniendo un modelo tridimensional de la cuártica de Klein (con dos discos recortados).

Existen muchas maneras de estirar la figura, pero queremos además que no se pierda la simetría de orden 7. A ello dedicamos el resto del artículo.

2. Modelo geométrico de Costa y Quach-Hongler

En el trabajo [2] los autores muestran dos figuras simétricas de orden 7, que resultan ser modelos geométricos de la cuártica de Klein. La primera (Figura 5) es una superficie cuyo borde consta de dos nudos enlazados; la otra la veremos al final.

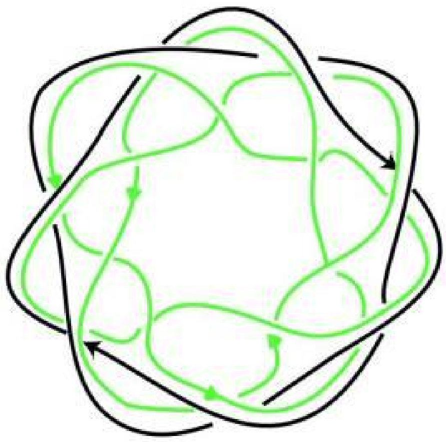

Figura 5.

Hemos construido con gomaespuma la superficie que tiene como borde este enlace (Figura 6). Observar que el borde de esta superficie es el enlace anterior, marcado ahora en blanco y amarillo.

Figura 6.

Si cosemos dos discos a lo largo de estos dos nudos obtendremos el triple toro. Este “cosido” hay que realizarlo en $\mathbf{R}^4$, donde hay espacio suficiente para que los discos intersequen a la superficie sólo en los nudos correspondientes.

¿Y por qué la superficie resultante con los discos cosidos es el triple toro?

Claramente es orientable y no es difícil calcular su característica de Euler, que es igual a –6 (podéis ver cómo hacerlo, por ejemplo, en *Juego con tiras de papel*). Así, la superficie que obtenemos al coser los dos discos tiene característica de Euler –4; por tanto, se trata del triple toro[1].

3. Construcción paso a paso

A continuación mostramos cómo hemos construido el modelo de Costa y Quach-Hongler de la cuártica de Klein, a partir de un simple heptágono regular de gomaespuma (Figuras 7a y 7b). La elasticidad de este material nos permite hacer los medios giros centrales. Durante la construcción identificamos la configuración de Klein estirada que permite hacer los pegados en el borde, respetando la simetría de orden 7.

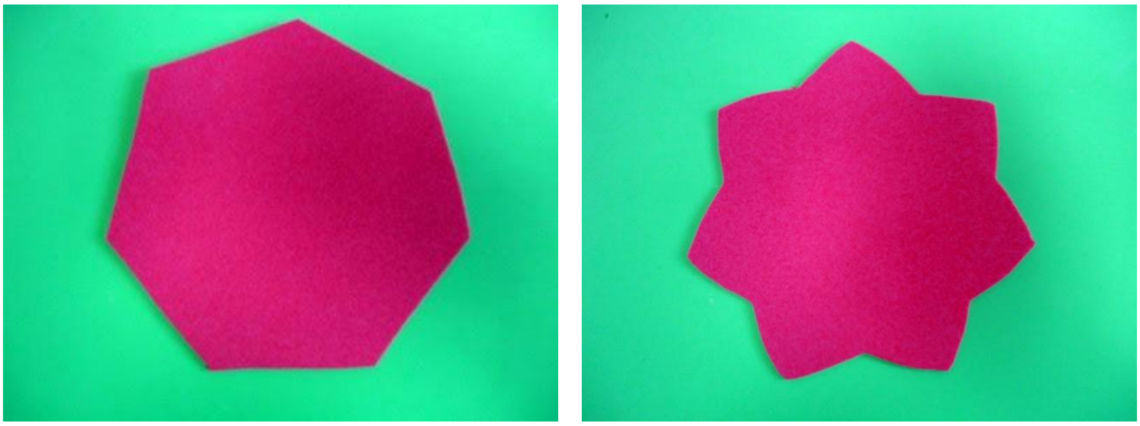

Figura 7a.

[1] El triple toro es una superficie (sin borde) orientable de género 3. Se reconoce por ser la única superficie orientable con característica de Euler –4. Recordemos que la característica de Euler de una superficie orientable de género g es $2-2g$, donde g es el número de asas. Si a dicha superficie le recortamos r discos, entonces la característica de Euler de la superficie resultante es $2-2g-r$.

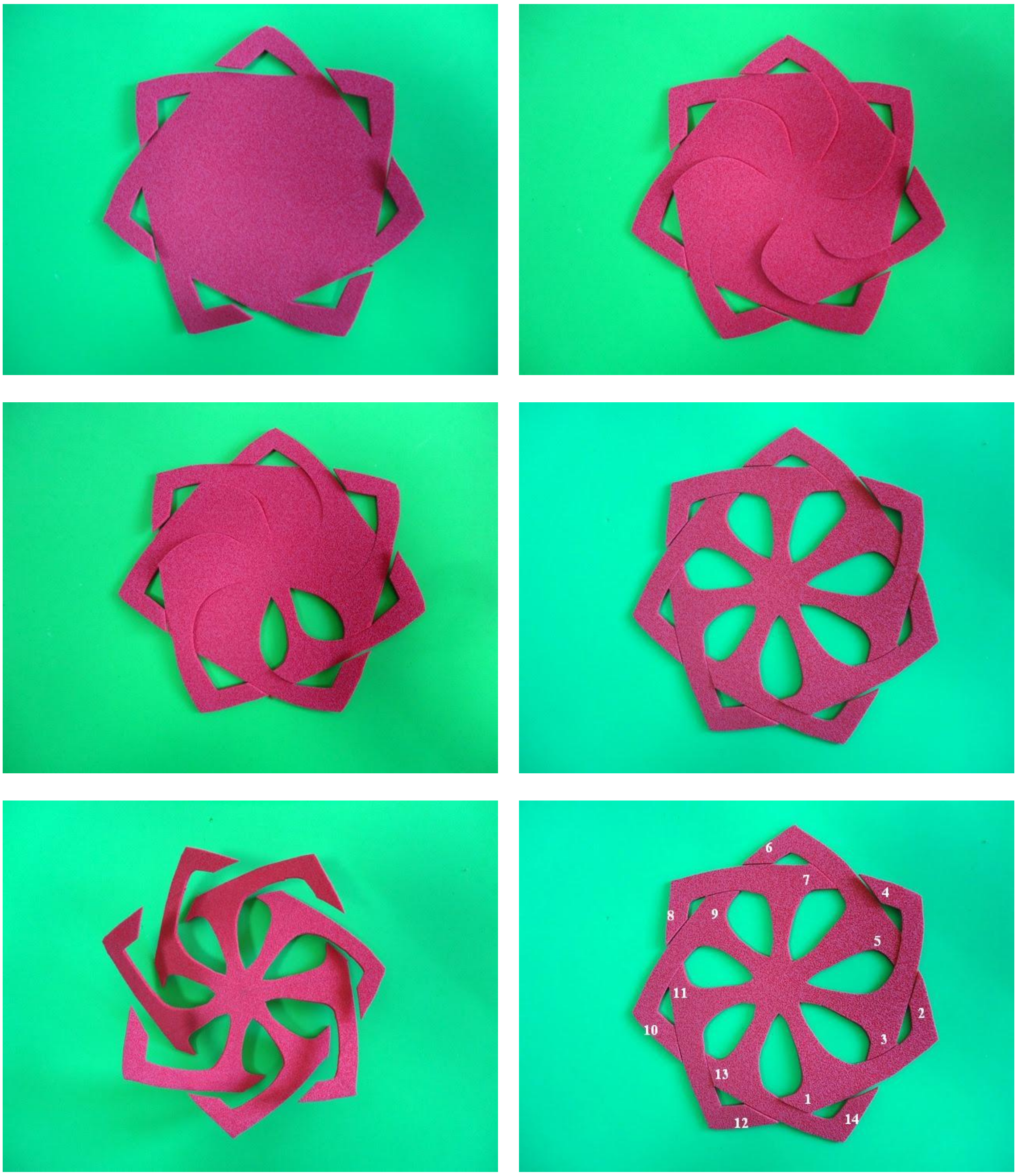

Figura 7b.

Obsérvese que la figura obtenida hasta el momento es la configuración de Klein estirada. Siguiendo el borde se leen exactamente las aristas numeradas del 1 al 14 de la configuración de Klein.

Ahora pegamos los 14 extremos de acuerdo a la regla: $2n+1$ con $2n+6$, módulo 14. Empezamos pegando 1 con 6, Seguimos pegando 3 con 8 y, sucesivamente, 5 con 10, 7 con 12, 9 con 14, 11 con 2, y 13 con 4 (Figura 8). Obsérvese que los 7 pegados han quedado disimulados bajo los 7 cruces exteriores.

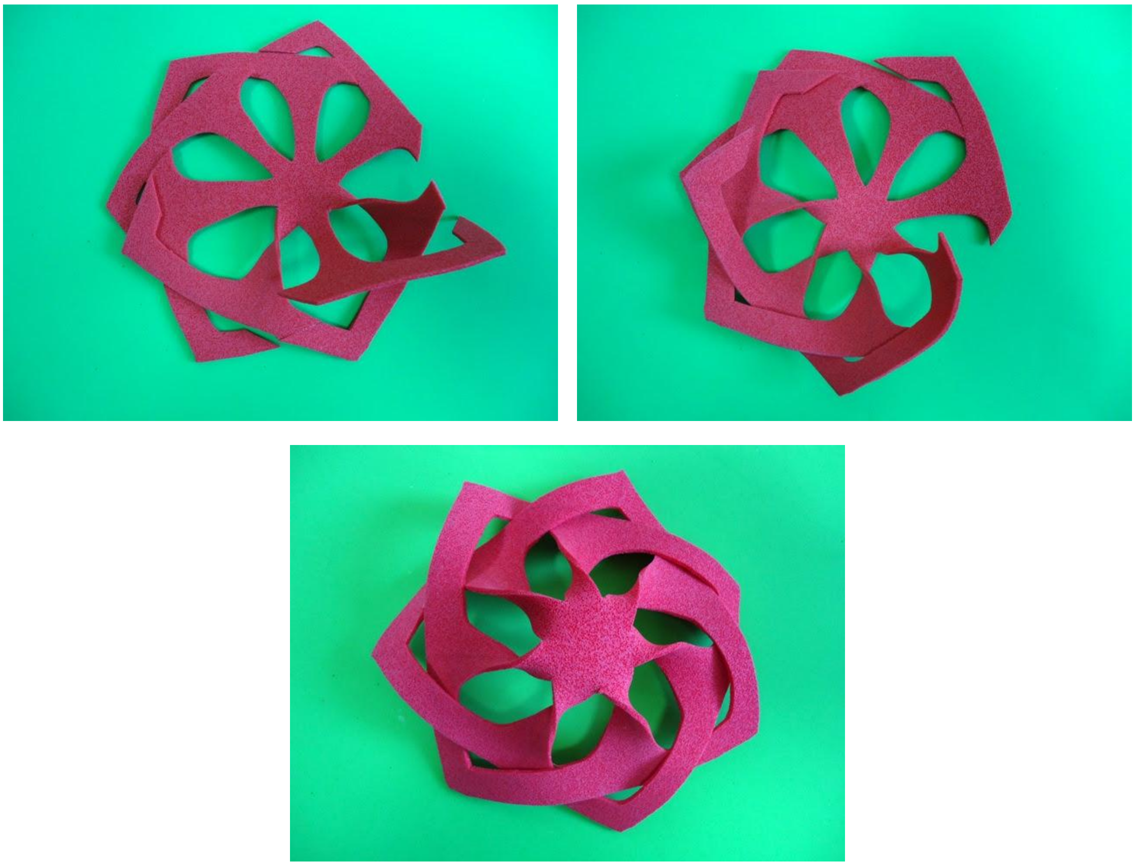

Figura 8.

Hemos preparado también el modelo con fieltro y velcro de la Figura 9, para montar y desmontar [2].

Figura 9. Junto a Ana Herrerías en Abla (Almería).

[2] El juego educativo *Polifieltros 3D*, ideado por el autor, explota otras posibilidades de estos materiales para la visualización de ideas matemáticas.

De manera similar se pueden construir superficies con otros órdenes de simetría, como las que aparecen en la foto del principio del artículo. ¿Os animáis a construir alguna? ¿Sabéis qué superficies son? ¿Qué superficie se obtendría a partir de un polígono regular de n lados en general?

4. Más superficies de Seifert con gomaespuma

Otra figura simétrica de orden 7 mostrada en [2] es la que se reproduce en la Figura 10. Consiste en dos discos unidos por 7 tiras verticales, cada una con medio giro en el mismo sentido. Calculando su característica de Euler, es fácil comprobar que se trata de un triple toro con un disco recortado.

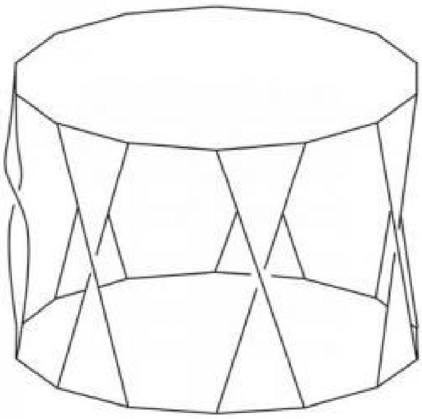

Figura 10.

Tanto el modelo anterior como éste son superficies orientables con borde un nudo o enlace. Reciben el nombre de *superficies de Seifert* asociadas al nudo o enlace dado, en honor a Herbert Seifert que las estudió hacia 1934. Algunas de ellas se pueden realizar con una pompa de jabón, introduciendo el nudo de alambre en agua jabonosa (podéis ver el nudo de trébol y el nudo figura 8 en el vídeo https://www.youtube.com/watch?v=vThY9TTgHxw). El programa *SeifertView* [8] de Jack van Wijk permite visualizarlas perfectamente (Figura 11).

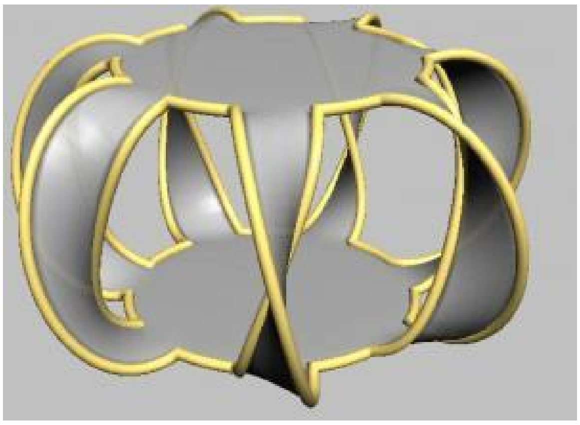

Figura 11. Cuártica de Klein. Imagen del programa *SeifertView*.

Esta tiene un aspecto muy bonito en gomaespuma (Figura 12).

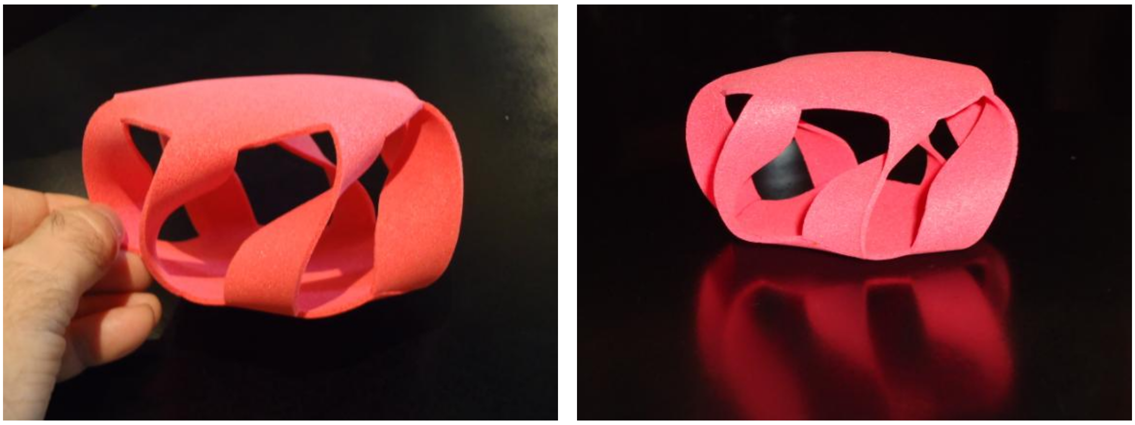

Figura 12.

Podéis ver más superficies de Seifert de gomaespuma pulsando sobre la Figura 13. Veréis composiciones que, variando el orden de simetría, nos recuerdan a los famosos nudos celtas. Las figuras son manipulables y se pueden volver de dentro a fuera, retorcerlas… En fin, como se dice informalmente, la topología es la geometría de la goma elástica, y con estos objetos de gomaespuma en la mano, la topología es, si cabe, ¡mucho más divertida!

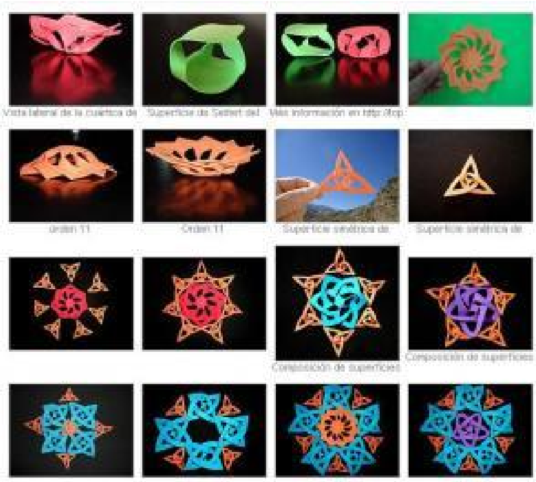

Figura 13.

Referencias

[1] J. Baez: *Klein's Quartic Curve*, http://math.ucr.edu/home/baez/klein.html (2010).

[2] a b c A. Costa, C. van Quach-Hongler: *Prime order automorphisms of Klein surfaces representables by rotations of the Euclidean space*. *Journal of Knot Theory* (aceptado). [Disponible en http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1010/1010.0172v4.pdf].

[3] ^ A. Costa: *Simetrías de superficies*. Charla impartida en el XVI Encuentro de Topología, Zaragoza, 2010. [Disponible en http://et17.unizar.es/Plenarias/SimetriasSuperficies.pdf].

[4] ^ F. Klein: *Über die Transformationen siebenter Ordnung der ellipptischen Funktionen*. *Math. Ann.* 14 (1879), 428-471. [Disponible en http://library.msri.org/books/Book35/files/klein.pdf].

[5] Wikipedia: *Klein quartic*, http://en.wikipedia.org/wiki/Klein_quartic.

[6] ^ S. Levy (ed.): *The Eightfold Way: The Beauty of Klein's Quartic Curve*. MSRI, 1999. [Disponible en http://library.msri.org/books/Book35/contents.html].

[7] ^ D. Hatch: *Hyperbolic planar tesselations*, http://www.plunk.org/~hatch/HyperbolicTesselations.

[8] ^ J. van Wijk: *Visualization of Seifert Surfaces*, http://www.win.tue.nl/~vanwijk/seifertview (2005).

Sobre el autor

José Luis Rodríguez Blancas cursó sus estudios de Matemáticas en la Universidad de Zaragoza. Se doctoró en la Universidad Autónoma de Barcelona en el año 1997, y desde el año 2000 es profesor titular de Geometría y Topología de la Universidad de Almería. Su investigación se enmarca dentro de la topología algebraica. Cuenta con trabajos en álgebra homológica, teoría homotópica motívica, teoría K algebraica, teoría de categorías y teoría de grupos. Es autor de los blogs divulgativos *Juegos topológicos* [http://topologia.wordpress.com], *Mago Moebius* [http://www.magomoebius.com] y *Polifieltros 3D* [http://www.polifieltros3d.com], en los que presenta actividades y curiosidades sobre geometría y topología al público en general.