

MATEMATICA Y BIOLOGIA

NACERE HAYEK

Departamento de Análisis Matemático, Univ. de La Laguna
38271. La Laguna, Canary Islands, Spain.

ABSTRACT

In this paper a panoramic view of the role played by Mathematics in the field of the biological sciences is given. As an illustration several important applications and models are also considered.

RESUMEN

En este artículo ofrecemos una visión panorámica del papel jugado por la matemática en el campo de las ciencias biológicas. Se incluyen como ilustración varias aplicaciones y modelos importantes.

El resultado de un desarrollo matemático debe compararse siempre con la intuición propia de lo que constituye una conducta biológica razonable. Si tal confrontación revela que hay desacuerdo, habrá que tener en cuenta las posibilidades siguientes:

- a) Se ha cometido un error en el desarrollo matemático formal.*
- b) Los supuestos iniciales son incorrectos y/o representan una simplificación por demás excesiva.*
- c) La intuición propia de lo biológico adolece de desarrollo inadecuado.*
- d) Se ha descubierto un principio penetrante.*

Harvey J. Gold |12|

La ciencia denominada biología (término acuñado en 1802 por Lamarck y Treviranus), que había estado dominada por la controversia entre los partidarios de la preexistencia de los gérmenes y los de la epigénesis, logró sacudirse definitivamente de toda apelación a consideraciones extracientíficas de orden metafísico o teológico, al adentrarse en el siglo XIX con una dedicación más particular a los problemas del desarrollo y evolución de los seres. Pudo diversificarse así en numerosas disciplinas y experimentar un notable crecimiento, del que dan buena cuenta el nacimiento de la teoría celular y disciplinas asociadas (citología e histología), las innumerables aportaciones al estudio morfológico, inventario, clasificación y geografía de los animales y plantas (zoología y botánica), la generación de la anatomía comparada, de la paleontología, de la fisiología animal y vegetal (promovida con las investigaciones de Lavoisier), primeros trabajos de genética (Mendel) y las teorías explicativas de la evolución debidas a su gigantesca figura Charles Darwin.

En todo ese proceso de gestación, el pensamiento original matemático deambuló por unos derroteros diferentes, pudiéndose decir que hizo poco en favor de la biología. Era obvio que la evolución general de ambas ciencias acusaba una bien marcada independencia la una de la otra. Mas, la desconexión, o mejor aún, la incompatibilidad entre el método analítico de la matemática y el quehacer propio de la biología (y en general, el de las ciencias de la vida), quedaría quebrantada a partir de los primeros lustros de este siglo XX. Y la matemática, construída hasta entonces bajo la égida de una tradición filosófica que se empecinaba en Hermanarla con el dominio de lo estático e intempo-

ral, excluyendo de su actividad el conocimiento de lo que nace y muere con el tiempo (como los seres vivientes y en particular, el hombre), pareció entrar en un proceso de autotransformación en gran parte impulsado por los espectaculares progresos de sus ramas de estadística y cálculo de probabilidades, como consecuencia del cual sería más tarde sustituida (ya plenamente en los últimos treinta años) por una matemática moderna, más flexible y para el mundo real, que dejaba una estela de importantes repercusiones en campos que otrora le fueron claramente vírgenes y nada atractivos.

Para matizar mejor el grado de esa mutación, recordemos lo que dice R. Queneau [25] al asegurar que en sus relaciones con la matemática, toda ciencia pasa por las cuatro fases siguientes: empírica (que da cuenta de los hechos), experimental (que se propone medirlos), analítica (destinada a calcularlos) y axiomática (en donde se los deduce de ciertas premisas básicas acompañadas generalmente de una metaciencia). A tenor de este criterio, conviene indicar que, en los albores de nuestro siglo, sólo la física, y en algunas zonas la química y la ingeniería, alcanzaron en su conjunto a la tercera fase, viéndose únicamente tratar con el método analítico de la matemática dominios pequeños de la biología (teoría de la lucha por la vida) y algunos hechos esporádicos de formulación cuantitativa. En términos generales, podemos aceptar que, desde el punto de vista matemático, no se había presentado ningún problema de auténtico interés a resolver, desligándose por ende sus seguidores de campos como la biología que no se ofrecían a su actividad, por expandirse de forma nada estimulante para la creación de nuevos pensamientos matemáticos.

Quizás lo anterior incline a pensar que la matemática no hubiera realizado intentos serios de encarar problemas biológicos. Nada más lejos de nuestro propósito. Virtualmente desde mucho antes, se apreciaban en casi todas sus áreas, vestigios de variadas incursiones matemáticas. Por ejemplo, baste reseñar que L. Euler (1707-1783) había escrito sobre el flujo de la sangre, biología de poblaciones y problemas de mortalidad; que Descartes (1598-1650) se detuvo a examinar a los animales y al cuerpo humano como mecanismos que podrían ser explicados en términos mecánicos; y asimismo, que Helmholtz (1821-1894), Volterra y otros importantes matemáticos, se ocuparon de cuestiones de fisiología, ecología y otros campos de la biología. Existieron igualmente esfuerzos en utilizar matemáticas para describir el crecimiento de poblaciones humanas, destacando en el siglo XVIII, el modelo elemental propuesto por el economista y demógrafo inglés Thomas R. Malthus (1766-1834), que se apoyaba en la hipótesis de que la tasa instantánea de crecimiento de una población era proporcional al tamaño de la misma (*). Modelos modificados del de Malthus surgieron luego también, entre otros el del sociólogo belga P.F. Verhulst (siglo XIX), prediciendo que los tamaños de las poblaciones tendían asintóticamente a un valor constante al aumentar el tiempo, y que conllevaría el trato de ecuaciones diferenciales con retardo o ecuaciones diferenciales funcionales de considerable interés matemático.

Debe señalarse, por último, que A. J. Lotka, al decidir no

(*) La hoy famosa conclusión de Malthus de que " la población se multiplica en una progresión geométrica, mientras que la reserva de alimento crece sólo en progresión aritmética ", preveía una lucha por la existencia en la que vió Charles Darwin un mecanismo para explicar la selección natural, lo que puso en evidencia que una idea esencialmente matemática había contribuido al desarrollo del concepto central de la evolución biológica |24|.

tomar en consideración al tiempo como variable discreta, sería el primero en introducir un modelo de tiempo-continuo, lo que representó el punto de partida de ulteriores investigaciones sobre la dinámica de poblaciones |26| (*).

De la misma enumeración de los escasos hechos reflejados en esta retrospectiva ojeada, cabe bien deducir ahora lo que antes quisimos poner de manifiesto, esto es, que en realidad la matemática nunca jugó en las ciencias biológicas un papel importante y desde luego, ni por asomo cercano al que desempeñó siempre en las ciencias físicas.

Habría de ser más tarde, repetimos, cuando las cosas cambiaran sustancialmente, y justo desde el momento en que el campo de las matemáticas se viera enriquecido con el advenimiento de unas nuevas ideas que a la par de excitantes, resultaron ser a la postre, verdaderamente revolucionarias. En efecto, esas concepciones que en principio se acogieron como productos mas o menos interesantes de la inspiración matemática, produjeron bien pronto un reconocido impacto en zonas que hasta allí le fueron vedadas, del trabajo intelectual.

La multivalencia y pluriadaptación de que venía provisto el bagaje de esa nueva matemática que posteriormente se ha dado en llamar moderna, posibilitó ciertamente una sensible e inesperada infiltración en áreas impensables como la medicina y la bioquí-

(*) A raíz de esto se abre una larga historia de modelación matemática. En las décadas de los 1920 y 1930 hubieron verdaderamente grandes adelantos con los trabajos de Lotka y de Volterra en ecología, e igualmente con los de Fisher, Haldane y Wright en genética (de ello hablaremos más adelante) y en años más recientes, técnicas matemáticas mucho más sofisticadas se han entroncado con cuestiones de biología de poblaciones, simultaneándose con avances en trabajos experimentales y de campo, gestadores de una nada desdeñable riqueza de nuevos datos.

mica, ó en la planificación industrial, sociología y filosofía, revelándose incluso provechosa la formulación matemática de los problemas, hasta para los docentes en historia, geografía y lingüística. Pero muy en particular, y por lo que atañe al presente trabajo, se hicieron más visibles diversas situaciones en biología en las que los modelos matemáticos canalizaron resultados tan prometedores que privaría la necesidad de emplearlos.

Conviene, no obstante, hacer una pausa a este respecto, para aclarar que las cosas no evolucionaron con la ligereza que se presumía. En primer lugar, los tratamientos iniciales siguieron el camino de la metodología básica de la física matemática. Espoleados aún por la máxima de Galileo " mide lo que puede ser medido y haz mensurable lo que aún no lo es ", los biólogos comenzaron a investigar principios cuantitativos que pudieran representar propiedades fundamentales del fenómeno que observaban, con el fin de añadir a aquellos principios , proposiciones y axiomas matemáticos que tendieran a suministrar nuevas informaciones sobre el fenómeno. Paulatinamente, se fué haciendo así cada vez más patente, que gran número de cuestiones relativas a los animales o a los seres humanos, conllevaban problemas " matemáticos "; y que el hallazgo de un adecuado modelo matemático acrecentaba enormemente la explicación del funcionamiento normal o patológico de un órgano, desde el momento en que se supieran formular ciertas leyes o postulados básicos. Sin embargo, fué igualmente perceptible que la determinación de estos modelos era mucho más difícil que en el caso de los fenómenos físicos, debido a que su acoplamiento con los datos experimentales resultaba bastante más delicado por la mayor complejidad de los procesos de la biología.

El hecho mismo de que sólo unos pocos problemas biológicos hubiesen llegado a posibilitar unas descripciones matemáticas lo suficientemente satisfactorias para que su manipulación cristalizara en un estudio productivo e interesante, tenía una lógica explicación. Históricamente, y según antepusimos, el desarrollo de la biología fué en todo tiempo manifiestamente distinto del de la física en cuanto a su correlación con la matemática. Mientras a los físicos se les brindaba la posibilidad de extraer del mundo real sistemas sencillos, de emplear condiciones experimentales simplificadas y de usar una instrumentación precisa para la ejecución de medidas asentadoras de unas leyes básicas de descripción de los sucesos de la naturaleza, los biólogos tuvieron que encararse desde un principio con sistemas o procesos intrínsecamente complejos; más concretamente, los objetos sobre los cuales éstos se vieron obligados a efectuar sus investigaciones, hallábanse compuestos de una enmarañada amalgama de partes diferentes, que interactuaban las unas en las otras, y con el agravante de ser en extremo numerosos y en general afectados de inevitables y grandes errores, los datos experimentales medidos sobre los mismos. Habría que decir aquí, que únicamente el uso de métodos estadísticos y probabilísticos que ya los matemáticos habían desarrollado para la estimación de determinados errores en astronomía, consiguió proporcionar algunos útiles conocimientos en las investigaciones que se afrontaron.

Con todo, y aún siendo hartamente conocido que la modelización matemática de los sistemas representaba un paso esencial en el conocimiento científico de los mismos (y previsiblemente un idóneo medio a través del cual se dedujera su futuro e ignoto comportamiento), la aludida complejidad extrema de la mayoría de

los sistemas biológicos siguió disuadiendo durante bastante tiempo la extensión a los mismos de esa técnica metodológica.

Ahora bien, ¿ qué ha sucedido en los recientes años ?
¿ cuáles fueron las causas que modificaron hasta tal punto el panorama científico para que la matemática pudiera contactar tan estrechamente con la biología y otros campos afines que desde siempre le fueron de difícil aplicación ?

Esas causas no son difíciles de adivinar. A aquella matemática renovada, a aquellas nuevas concepciones a las que antes nos referimos, no tardó en unirse la quizás más sorprendente aplicación de dicha ciencia en el presente siglo: el computador electrónico. Y decimos aplicación *matemática*, apresurándonos a precisar que fué la matemática la que no sólo intervino fundamentalmente en las ideas centrales de su invención (*) sino, y lo que es más importante, la que tuvo que permanecer ineludiblemente presente en el esclarecimiento mismo de cuantas limitaciones y problemas habría de llevar luego consigo su uso cotidiano. La rapidez de ejecución de los miles de millones de operaciones necesarias que para el trato de los fenómenos más arduos y complejos brinda el computador, consiguió ciertamente anudar de modo considerable los lazos de colaboración entre los matemáticos

(*) El computador electrónico culmina un proceso matemático que en el transcurso de los siglos fué suministrando sucesivamente diversos utensilios para la resolución y aceleración de los cálculos, como el ábaco, los logaritmos, la regla de cálculo y la calculadora mecánica, y que acaba en una máquina universal con una multiplicidad creciente de usos potenciales, cuya noción provino ni más ni menos que de la lógica matemática abstracta. Para quienes pudieran pensar que el computador es una simple revolución de la ingeniería, habría que recordarles que la matemática subyace modo reinante en el corazón mismo de la computación y en cualesquiera impulso y desarrollo de aquél.

y físicos, y los biólogos y demás científicos de la vida (*). Claro está que, juntamente con los aumentos en velocidad aritmética, vinieron también incrementos en capacidad de memoria, en velocidad de acceso a las instrucciones almacenadas y una considerable proliferación de usos potenciales.

Dependió en gran medida del computador el éxito de buen número de modelos matemáticos aparecidos en dinámica de poblaciones, ecología, etc... a finales de la primera mitad del presente siglo, y desde entonces ha sido participante activo en el desarrollo de las diversas teorías científicas.

El ordenador actual, con su poder de resolución y versatilidad gráfica cada vez más perfeccionada, se ha convertido en un poderoso auxiliar que sirve para contrastar teorías, hipótesis y conjeturas, suministrando al propio tiempo valiosas pistas capaces de iluminar el camino a explorar. Su papel como instrumento de investigación en los modelos biológicos se entiende rápidamente, porque el recurso a la simulación mediante computador consigue dar una buena imagen global de su comportamiento dinámico. El proceso presupone naturalmente una discretización de aquéllos, lo que hace lógico que muchas veces se arranque de modelos discretos en ecuaciones en diferencias, que ofrecen la gran ventaja de explicitar la estructura del modelo en cuestión, sin echar mano a conceptos matemáticos especializados. Además, al poseer las ecuaciones siempre solución, cabe computarla directamente, pu-

(*) Si nos situamos, por ejemplo, en el campo de la cristalografía de los rayos X, piénsese que en la determinación de la estructura de las moléculas gigantes de las proteínas (uno de los éxitos más brillantes de la ciencia contemporánea), el análisis de los datos cristalográficos requería tal monstruoso porcentaje de poder calculatorio que sólo un computador de gran velocidad podía ser capaz de dar.

diéndose, por otra parte, introducir el modelo en el computador sin elaboración previa; y quedando reflejado, por último, con bastante aproximación, el comportamiento cualitativo del sistema.

La penetración de la matemática en los procesos biológicos gestó los fundamentos de una nueva ciencia, la *biomatemática*, la cual se ha ido desarrollando cada vez con mayor pujanza. Hoy nadie ignora que en los últimos cincuenta años muchos problemas de la biología moderna se han visto claramente beneficiados de un tratamiento matemático, lo que ha originado que, en justa reciprocidad, gran número de matemáticos empezaran a fascinarse por las ciencias de la vida.

En términos estrictos, la biomatemática asume el formalismo y la metodología propios de la matemática en la formulación y el análisis de teorías inherentes a la biología (y en general, de las ciencias de la vida).

Nacida entre los bastidores de la biofísica, la biomatemática es difícilmente distinguible de aquella hasta 1925 en que el matemático italiano Vito Volterra de la Universidad de Roma, inicia una serie de investigaciones demandadas por el biólogo d'Ancona de la Universidad de Siena, quien preguntaba a aquél si era factible hallar alguna vía matemática para el estudio de las variaciones en la composición de determinadas asociaciones biológicas. El estudio quedó fundamentado sobre las integrales de ciertas ecuaciones diferenciales e íntegrodiferenciales, que fué necesario examinar con detalle, tanto cuantitativa como cualitativamente.

Del diálogo fructífero d'Ancona - Volterra sobrevino una memoria notable que el segundo publica en 1931 |37|, y que significó el primer escalón en el desarrollo de la biomatemática.

En la formulación de los modelos que han venido siendo empleados desde entonces, interviene un buen número de técnicas matemáticas, si bien no son muchas las áreas más frecuentemente utilizadas (*). En base a encuestas realizadas en Congresos de Biomatemática ó de lo que se desprende de notables colecciones especializadas como las *Lectures Notes in Biomathematics* de la Editorial Springer Verlag o *Lectures of Mathematics in the Life Sciences* de la American Mathematical Society, hoy puede afirmarse que en más del setenta por ciento de los casos, los modelos biológicos que se estudian están mayormente expresados matemáticamente en términos de ecuaciones de evolución (en general, ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones de argumento retardado, ecuaciones integrales o íntegrodiferenciales, ecuaciones de reacción-difusión); sólo en un quince o veinte por ciento de casos, los modelos consideran efectos estocásticos o vienen formulados como procesos estocásticos.

En la actualidad, la biomatemática ha experimentado un extraordinario crecimiento en todos sus campos. De sus principales repercusiones en el ámbito biológico, extraemos seguidamente varios contextos que acreditan su importancia, deteniéndonos expresamente en algunos de ellos y dejando para el final del presente trabajo una concisa ilustración sobre algunas recientes teorías, como la de las catástrofes y la de la bifurcación, así como algunas consideraciones sobre el caos y sus connotaciones en el desarrollo de la biología en estos últimos años.

(*) Hasta hace sólo unas decenas de años, era generalmente asumido que la única rama de la matemática necesaria para un biólogo, era la estadística. Durante mucho tiempo fué ignorado que para describir muchos procesos biológicos, el conocimiento de otras ramas de la matemática, como las de ecuaciones diferenciales y teoría de la probabilidad, ofrecía a los biólogos posiciones más ventajosas.

Comencemos diciendo que en la biología cuantitativa existen, según es bien sabido, varios tópicos cuyo desarrollo requiere técnicas totalmente diferentes de las usadas en la física y química clásicas. La existencia de gran número de especies sumamente variables en cuanto a tamaño y apariencia, hizo indispensable la creación de una teoría de distribución de medición de caracteres, de sus promedios y variabilidades, dando lugar a la introducción de varios conceptos de gran utilidad. Así, por ejemplo, la afinidad entre parientes íntimos, tales como hermanos y hermanas, condujo a medidas de semejanza, entre ellas los coeficientes de regresión y correlación.

Anotemos también que en algunos campos biológicos se ha requerido para su necesaria evolución, el manejo de ecuaciones no lineales de difusión de un tipo no standard, por ejemplo, el de la ultracentrifugación. Que en otros, como el de la cristalografía de los rayos X, ha sido esencial la manipulación de series matemáticas complejas de Fourier. Y que la teoría de nudos de la geometría, está sirviendo actualmente a los biólogos para estudiar las formas de anudación del DNA (ácido desoxirribonucleico) de la célula viviente.

Otro hecho notable es que para construir una teoría de la autorreproducción, se han venido aplicando métodos matemáticos al estudio de un proceso que ha parecido siempre exclusivamente biológico, muy en especial desde que el célebre matemático John von Neumann ideara en los años cincuenta máquinas autorreproductoras. Von Neumann, considerado como el más universal hombre de ciencia del siglo XX, abogó siempre para que el matemático profesional no perdiera de vista la conexión con los problemas reales del mundo

físico, llegando a alucinar a un auditorio en una célebre conferencia pronunciada en 1948 titulada " La teoría general y lógica de los autómatas ", en la que propuso la construcción de máquinas que tuvieran la misma capacidad de reproducción que los organismos vivos mostrando una nueva visión de la manera en que se reproducen los seres vivientes. Sus ideas llevaron nada menos que al descubrimiento en 1953 por los biólogos Francis Crick y James D. Watson, de las sustancias DNA y RNA (ácido ribonucleico) que componen la célula viviente (*).

En el análisis biológico de las poblaciones se presentan cuestiones complicadas que muchas veces son resueltas aplicando conceptos matemáticos simples. Lo que se investiga principalmente es el cómputo, estimación y predicción de medidas y tamaños, figurando entre sus problemas comunes el de la distribución geográfica de genes, el de la distribución de edad en poblaciones, el de variaciones en grupos de individuos en el interior de una especie, etc... Merecen destacarse los interesantes modelos debidos a A. J. Lotka (1880-1949) y A. G. McKendrick, quienes dedujeron el modo de predecir una estructura de edad en las poblaciones humanas.

Hay que remontarse a la época del físico belga Adolphe Quetelet (1796-1874) para señalarle como el primero en dedicarse a estudiar estadísticamente las variaciones de altura en un conjunto de individuos de la especie humana, obteniendo una representación de estas variaciones mediante una curva denominada " polígono de

(*) La molécula DNA (portadora de toda la información genética celular), pasa instrucciones para que el RNA constituya las proteínas, y mientras éste las forma, aquélla programa sus genes (decidiendo, por ejemplo, altura, temperamento, etc.. en el caso de un niño humano), cuadro ciertamente familiar para un diseñador de computadores.

frecuencias ". Más tarde, Francis Galton (1822-1911), impulsado por la obra fundamental de Darwin *Sobre el origen de las especies mediante la selección natural* (Londres, 1859), aplica métodos estadísticos a la biología, creando la *Biometría* como teoría estadística de la variación individual.

Precisamente, algunos notables trabajos referidos esencialmente a la Biometría y al estudio de cruzamientos entre variedades de una misma especie, y que curiosamente no tuvieron trascendencia en el momento de su aparición (entre ellos, el famoso de Mendel de 1865), adquirieron luego inusitada significación en los albores del siglo XX, para labrar los cimientos de una importante nueva disciplina, la *Genética* ó ciencia de la herencia.

Los orígenes de la genética de poblaciones se remontan a 1908 cuando el matemático inglés G. H. Hardy (1877-1947) y el médico alemán W. Weinberg (1862-1939) descubrieron independiente-mente un principio relacionado con la frecuencia de genes (alelos) en una población. Hardy y Weinberg mostraron que se establecía un equilibrio entre las frecuencias de los alelos en una población, y cómo la frecuencia relativa de aparición de cada alelo tendía a permanecer constante, generación tras generación. Una relación matemática conocida ahora como teorema de Hardy-Weinberg fué desarrollada para describir el equilibrio de los alelos.

Hoy se sabe que en el contexto genético se torna fundamental la metodología probabilística y el enfoque bayesiano de las situaciones teóricas inspiradas en el cultivo empírico, y que con la genética biométrica, las preguntas concernientes al comportamiento de los genes en las poblaciones y a la mecánica de la evolución han logrado adquirir una nueva entidad (*).

(*) Obras excelentes que recogen un estudio sistemático del decir de la modelación matemática en genética de poblaciones son las del Prof. A. Jacquard (|21|, |22|).

Veinte años después del " redescubrimiento " (1900) del trascendental trabajo de Mendel, tres notables científicos, R. A. Fisher (|9|), S. Wright y J. B. S. Haldane (|17|), se constituirían en verdaderos planificadores del planteamiento mendeliano en cuanto a la herencia genética. Haciendo uso de técnicas matemáticas de modelización, mostraron la posibilidad de combinar las reglas de la herencia y las leyes del azar, de forma que un gen dado sobreviva y muera en una población.

La extrema sencillez del modelo de selección considerado por Fisher - Wright - Haldane (apoyado en la teoría de la difusión), permitió luego aclarar algunos conceptos fundamentales, entre ellos los de *equilibrio* y *estabilidad*, que hubieron de ser considerados ante la curiosidad biológica en saber si un sistema concreto (una población, un sistema ecológico) en estado de equilibrio, permanecería en la proximidad de este estado cuando se presentaran pequeñas perturbaciones. El modelo despertaría, por otra parte, el interés de muchos científicos de la vida porque facilitaba una prueba matemática del llamado aumento de " adaptación " en los procesos de selección que tienen lugar en la naturaleza.

Ya hemos adelantado que diversos capítulos de la teoría de ecuaciones diferenciales (ecuaciones en diferencias, teoría cualitativa, análisis asintótico, ...), han venido jugando un gran papel en el estudio y comprensión de numerosos problemas biológicos.

El hecho de que los modelos tengan la forma de ecuaciones diferenciales, conlleva tres importantes implicaciones: la primera es que los modelos predicen el futuro inmediato sobre la base del *presente*, no sobre la de alguna parte del pasado; en segundo lu-

gar, es asumido (como en todos los modelos clásicos de física y química), que el incremento de cualquiera de las variables internas (o de estado) en un intervalo corto de tiempo de longitud h es una función especial de h ; y por último, los modelos son básicamente *continuos*, más bien que discretos [28] (*).

Dentro de la clase de ecuaciones diferenciales, se aprecia que las de primer orden gobiernan el crecimiento de varias especies. El modelo más simple, conocido como ley malthusiana de crecimiento de población, puede ser formulado mediante el problema de valor inicial: $\frac{d p(t)}{dt} = a \cdot p(t)$ ($a = \text{cte.}$) , $p(t_0) = p_0$, donde $p(t)$ representa la población de una especie dada en el tiempo t . La solución del mismo: $p(t) = p_0 \cdot e^{a(t-t_0)}$, traduce el hecho de que cualquier especie que satisfaga dicha ley malthusiana crece exponencialmente con el tiempo.

Hay que advertir que estos modelos lineales de crecimiento de poblaciones son idóneos siempre que la población no sea excesivamente numerosa. Para poblaciones muy grandes, el modelo no resulta tan seguro (**), por lo que conviene considerar el dado por la denominada ley *logística* de crecimiento de población:

$$\frac{dp}{dt} = a p - b p^2 \quad (a, b = \text{coeficientes vitales de la población}),$$

(*) Como lenguaje descriptivo, la teoría general de las ecuaciones diferenciales posee una inherente limitación, y es la de que estas ecuaciones sólo pueden describir fenómenos en donde los cambios sean regulares y continuos. Queremos decir que, en términos matemáticos, las soluciones de una ecuación diferencial deben ser funciones diferenciables, que son las que se han de utilizar para los relativamente pocos fenómenos que presentan un comportamiento bueno y ordenado. No obstante, la imaginación matemática se ha ido esmerando en desarrollar métodos que puedan ser capaces de tratar los fenómenos divergentes y discontinuos, que son los de mayor abundancia en la naturaleza.

(**) Se ha comprobado que el modelo de Malthus se aplica satisfactoriamente a poblaciones en ciertas fases de su crecimiento, pero esto no sucede en una variedad de otros casos.

introducida en 1837 por el biólogo-matemático alemán Verhulst (*).

A menudo se observa en la naturaleza la lucha por la existencia entre dos especies similares que compiten por la supervivencia en una misma demarcación o nicho (sistemas *depredador-presa*) que culmina casi siempre con la completa extinción de una de las especies. Este fenómeno conocido como el *principio de exclusión competitiva*, fué enunciado (si bien en forma ligeramente diferente) por Darwin en 1859.

Un cuidadoso estudio desde el punto de vista matemático de este principio ecológico básico es expuesto en el cap. XVII de la obra de M. Braun [4] (**). Este autor considera un modelo deducido matemáticamente de un sistema de dos ecuaciones diferenciales que gobiernan la interacción entre dos especies similares, mostrando que toda solución del sistema se aproxima a un estado de equilibrio en el cual una de las especies se extingue.

Partiendo de la ley logística de crecimiento: $\frac{dp}{dt} = a p - b p^2$ (donde p representa el crecimiento de población), y designando con $p_1(t)$ y $p_2(t)$ las poblaciones en el tiempo t , por k_1 y k_2 (***)

(*) Si se asigna como valor natural de \underline{a} el de 0,029 estimado por algunos ecologistas (lo que arroja que \underline{b} valga 2.941×10^{-12}), la población humana de la Tierra, de acuerdo con esta ley logística, tiende al valor límite:

$$k = \frac{a}{b} = \frac{0,029}{2.941 \times 10^{-12}} = 9,86$$

miles de millones de personas.

Es claro que en estas predicciones, los desarrollos tecnológicos, consideraciones de poluciones y tendencias sociológicas, influyen significativamente sobre los coeficientes vitales \underline{a} y \underline{b} ; consecuentemente, éstos deben ser revaluados cada pocos años ([4], cap. V).

(**) Excelente libro que contiene una buena presentación de aplicaciones.

(***) Recuérdese que $p(t)$ se aproxima a una población límite $k = \frac{a}{b}$ cuando $t \rightarrow \infty$.

las poblaciones máximas que el microcosmos puede soportar y por $a_1 p_1$ y $a_2 p_2$ los potenciales bióticos (ó tasas de crecimiento bajo condiciones ideales), de las especies 1 y 2, respectivamente, las $p_1(t)$ y $p_2(t)$ satisfacen (si nos restringimos al caso de especies aproximadamente iguales) al sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dp_1}{dt} = a_1 p_1 \left(\frac{k_1 - p_1 - p_2}{k_1} \right) \quad , \quad \frac{dp_2}{dt} = a_2 p_2 \left(\frac{k_2 - p_2 - p_1}{k_2} \right) \quad ,$$

pudiéndose enunciar el siguiente *principio*: " Supuesto $k_1 > k_2$, toda solución $p_1(t)$, $p_2(t)$ del sistema anterior se aproxima a la solución de equilibrio $p_1 = k_1$, $p_2 = 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. En otras palabras, si las especies 1 y 2 son aproximadamente idénticas y el microcosmos puede soportar más miembros de la especie 1 que de la especie 2, entonces la especie 2 llegará finalmente a extinguirse " (*).

El problema 16 de los veintitrés planteados por David Hilbert en el segundo Congreso Internacional de Matemáticos (París, 1900) ha conducido a una interesante interpretación ecológica entre dos especies interactuantes. Dicho problema da origen a sistemas de ecuaciones del tipo $\frac{dx}{dt} = x.f(x,y)$, $\frac{dy}{dt} = y.g(x,y)$, que introducen conceptos como el de ciclo " ecológicamente estable ". El interrogante, ¿ hay algún sistema depredador-presa con, al menos, dos ciclos ecológicamente estables ? , no tiene aún respuesta conocida (|27| , cap. XIX).

(*) En general, hay que poner αp_2 y βp_1 en lugar de p_2 y p_1 en los sustraendos del sistema anterior, respectivamente, donde α y β denotan grados de influencia de una de las especies sobre la otra. Un análisis similar al efectuado permite predecir el resultado de la lucha por la existencia para todos los valores de α y β . El caso que hemos analizado es el que corresponde á $\alpha = \beta = 1$.

En una variedad de sistemas de circuitos eléctricos para la fisiología comparece el importante concepto matemático de oscilador no lineal. Muchos de ellos pueden describirse en términos de un modelo basado en la ecuación diferencial de B. van der Pol (1889-1959).

La transformación integral de Laplace suele ser de utilidad en muchos sistemas biológicos y fisiológicos que vienen descritos mediante ecuaciones diferenciales ordinarias. La razón de ello es que la composición de tales sistemas conlleva en el dominio (ó espacio antiimagen) ecuaciones diferenciales cada vez más complicadas, en tanto que en el espacio imagen aparecen descritas mediante operaciones algebraicas sencillas |16|.

En las recientes décadas hemos asistido al desarrollo de la *biología molecular*, fundamentándose la maquinaria básica de la herencia biológica sobre la geometría del DNA y la combinatoria de secuencias de aminoácidos. En esta área de la biología, ha constituido una verdadera sorpresa que la geometría diferencial global, cuya presencia ha sido por otra parte bien notoria en la teoría cuántica de campos, esté jugando ahora un papel crucial. Esto ha podido acontecer gracias a una fórmula debida a James H. White |38| y la teoría subyacente. Varios biólogos han conseguido comprobar que dicha fórmula describía ciertos fenómenos de la molécula DNA, existiendo también conexión con algunas enfermedades (entre otras, con la llamada " del sueño ", ocasionada por el parásito humano trypanosoma). Otras aplicaciones biológicas en relación con la fórmula citada, son dadas por W. R. Bäuer, F. H. C. Grick y J. H. White |3|.

No podemos dejar de referirnos a la variedad de problemas biológicos en carcinogénesis, tales como el papel del ciclo de la célula, las interacciones celulares o el proceso de transformación celular. Entre los progresos realizados en esta dirección figuran, entre otros, el promovido por el modelo estocástico de Williams y Bjerckness [39] y el más reciente de Schürger y Tautu [32], los cuales emplean un método que recurre a las funciones de transición como operadores, utilizando al propio tiempo la teoría de semigrupos. Es oportuno señalar también la existencia de una diversidad de modelos en relación con el debido entendimiento del ciclo de crecimiento de las células blancas de la sangre en sistemas sanguíneos normales y de mal funcionamiento, cuestión de gran interés en leucemia.

Un insondable mundo en el que se han realizado descripciones matemáticas muy sugestivas y en ocasiones imprescindibles para la investigación de grandes agrupaciones de células nerviosas interconectadas (como ocurre en el cerebro), ha sido el de las *redes neuronales*. Entre los instrumentos matemáticos en principio utilizados se incluyen métodos lógicos y álgebras de Boole. El interés en este campo comenzó a fomentarse cuando en 1943, el fisiólogo Warren S. McCulloch del M.I.T. (U.S.A.) y el matemático Walter Pitts de la Universidad de Pensilvania, desarrollaron un modelo abstracto supersimplificado de la neurona en forma de un autómata finito con sólo dos estados posibles: en marcha o parado. Oportunas combinaciones de estos módulos o neuronas formales, dieron lugar a modelos de sistemas nerviosos que permitieron formular diversas proposiciones, entre ellas, un teorema general de S. C. Kleene, que era capaz de caracterizar las clases de conducta que

cabía esperar de las redes neuronales de McCulloch-Pitts. El modelo neurológico de McCulloch-Pitts estimularía notables investigaciones ulteriores sobre la naturaleza del pensamiento y sobre la propia capacidad de los sistemas biológicos para autoorganizarse (*).

Entre todos los modelos matemáticos que han tratado de explicar el funcionamiento real de esos elementos básicos del sistema nervioso que son las neuronas, destaca el hoy ya clásico modelo del impulso nervioso desarrollado por A. L. Hodgkin y A. F. Huxley de la Universidad de Cambridge [20], quienes idearon un sistema de ecuaciones diferenciales descriptivas del funcionamiento de un circuito eléctrico artificial de comportamiento similar al de las fibras nerviosas. Su trabajo, del que ofrecemos una brevísima ilustración (**), contribuyó a que les fuese otorgado un Premio Nobel de Medicina.

El impulso nervioso es una variación a modo de onda de la diferencia de potencial a través de la membrana del eje nervioso. Debido a la extrema pequeñez de la neurona, los citados investigadores realizaron en la década de los cincuenta, varios experimentos sobre ciertas fibras nerviosas (axonas) del calamar, cuyo grosor posibilita mediciones (mediante electrodos finos) de diferencias de tensión en la membrana lo suficientemente precisas para suministrar unos primeros datos fiables del modelo.

(*) En la actualidad, los problemas de redes neuronales siguen siendo del máximo interés. El XXIV de los Symposium anuales que se dedican a Cuestiones matemáticas en Biología, celebrado en Vancouver (Canadá) en Agosto de 1990, llevó por título "Redes Neuronales".

(**) Para mayores detalles, véanse [16], [24], entre otros.

Tras someter la axona a una tensión eléctrica exterior, bien sea positiva, ó negativa de pequeña cuantía, inmediatamente después de desconectar desciende hasta el potencial de base. Mas, si es negativa y su cuantía está por encima de un cierto umbral, se produce una excitación, es decir, la tensión queda rápidamente reforzada en un múltiplo de la proporcionada inicialmente y solamente después desciende hacia el estado de reposo.

Varios resultados experimentales mostraron que, tras una excitación, penetran iones de sodio en el eje nervioso durante la fase ascendente del impulso, abandonando dicho eje iones de potasio durante la fase descendente; y que la evolución en el tiempo de la tensión producida por la excitación depende de la concentración de iones de sodio en el medio.

Estos fenómenos hacen suponer que la excitación de la membrana tiene que ver con una alteración de la permeabilidad para los iones de sodio y de potasio.

Hodgkin y Huxley en 1952, midieron la corriente iónica cuando se mantiene constante el potencial de la membrana, y de los datos registrados dedujeron las leyes que rigen la dependencia de la permeabilidad del sodio y del potasio sobre el potencial de la membrana. Así formularon leyes que se apoyaban en el conjunto de cinco ecuaciones diferenciales que se explicitan seguidamente y cuya interpretación daba una buena idea del comportamiento de las fibras nerviosas (*):

La propagación del impulso nervioso, o potencial de acción, viene traducido por un proceso eléctrico descrito por la ecuación

(*) Un buen estudio ilustrativo del sistema de Hodgkin-Huxley es el de Fitzhugh |10|.

en derivadas parciales no lineal:

$$I_m = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = C \frac{\partial E}{\partial t} + I_i \quad ,$$

donde I_m representa la corriente a través de cualquier segmento de la membrana, E el potencial de la membrana, R la resistencia del material de la célula en el interior de la membrana, C la capacitancia efectiva de la membrana é I_i la corriente iónica. Esta última viene dada a su vez por:

$$I_i = \bar{g}_{Na} m^3 h (E - E_{Na}) + \bar{g}_K n^4 (E - E_K)$$

Las conductividades del sodio y del potasio dependen de tres variables sin dimensión (m , n , h) determinadas experimentalmente y que obedecen a las tres ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{\tau_m} (m_\infty - m)$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{\tau_n} (n_\infty - n)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\tau_h} (h_\infty - h)$$

En uno de los tres Congresos estivales que se celebraron durante el período 1966-68 sobre Biología teórica en la localidad italiana de Bellaggio, patrocinado por la International Union of Biological Sciences, y al cual fueron invitados genéticos, especialistas en redes nerviosas, biólogos experimentales, matemáticos, químicos y físicos, el matemático E. Ch. Zeeman de la Universidad de Cambridge aportó unos modelos topológicos para dos procesos fisiológicos: el del latido del corazón y el del impulso nervioso. El último de ellos causó gran revuelo, debido a que su esquema proporcionaba no sólo una mejor comprensión conceptual que

el modelo cuantitativo de la bioquímica de dicho impulso al que acabamos de referirnos de Hodgkin- Huxley, sino que requería menos ecuaciones que el de este último.

Los modelos presentados por Zeeman se basaban en una teoría, ya cimentada desde 1964, y debida al genio del matemático francés René Thom, uno de los primeros especialistas mundiales en topología diferencial (que, al igual que Zeeman, también figuraba entre los invitados al ciclo de Bellaggio). El fundamento de esa teoría consistía en la descripción de los fenómenos discontinuos de la naturaleza con la ayuda de modelos matemáticos continuos; en lenguaje matemático, trataba esencialmente de la transformación de unos conceptos abstractos en ciertas formas geométricas llamadas *catástrofes*. En contraposición con la teoría newtoniana que sólo considera fenómenos regulares y continuos, la *teoría de catástrofes* nacía para configurar un método universal destinado al estudio de todas las transiciones con saltos, discontinuidades y cambios bruscos de cualquier forma y especie (como catástrofes se identificaban, por ejemplo, un súbito desequilibrio nervioso o la repentina explosión de una burbuja).

El propósito de Thom, tal y como emergió de su mente, apuntaba ante todo hacia un lenguaje matemático para la biología. Un área primordial de su teoría era la de la *morfogénesis* u origen de la forma en la vida y en la naturaleza inorgánica. Para Thom, apasionado estudioso de la embriología, las matemáticas de los cursos estables del cambio y las matemáticas de la forma biológica eran las mismas, en base a que toda forma de un organismo representa un registro parcial de los procesos de desarrollo y me-

tabolismo (*). Obsesionado con el problema de su descripción, crea Thom un contexto matemático basado en el supuesto de una estabilidad estructural de la naturaleza que hace hincapié en la regularidad cualitativa, en vez de hacerlo en la cuantitativa (**).

La raíz de sus elucubraciones habría que buscarla principalmente en la conexión existente entre el cálculo de variaciones y cierto tipo de singularidades " planimétricas " estudiadas por el americano H. Whitney (***) y relacionadas especialmente con la estabilidad de movimientos de los sistemas dinámicos, esto es, de la dinámica cualitativa que tuvo su origen en Poincaré (1854-1912). Convencido de que la topología podía servir como lenguaje natural idóneo para definir los conceptos de forma y cambio estructural, Thom revolucionó la matemática aplicada con el desarrollo de una dinámica cualitativa adaptándola especialmente a las biociencias.

La propiedad que Thom designa como *estabilidad estructural*, subyacente a la teoría entera, se manifiesta en sí misma en una

(*) Influyó sin duda en sus investigaciones la excelente obra de Thompson (*On Growth and Form* - Cambridge University Press, 1917) en la que se exploran aspectos matemáticos y físicos de la forma natural. Tampoco le pasó por alto el reto en 1940 a los biólogos del físico alemán B. Bavink de que se relegase a segundo término el concepto de cantidad mensurable y contable, colocando en el primero el concepto básico biológico de forma (ó *gestalt*).

(**) Thom escribe " toda la ciencia se basa en la suposición implícita de estabilidad estructural " , y también " la ciencia es posible sólo si las observaciones y los resultados son cualitativamente repetibles " .

(***) La teoría de singularidades es una amplia generalización del estudio de funciones en puntos máximos y mínimos; y en la teoría de Whitney las funciones se sustituyen por aplicaciones (en general, colecciones de varias funciones de varias variables). René Thom y E. C. Zeeman llegaron a sugerir que la combinación de la teoría de singularidades y sus aplicaciones debería llamarse teoría de catástrofes.

constancia local de estructuras cualitativas (*).

Que las concepciones de Thom no carecían de precedentes se pone de manifiesto si recordamos que ya dos matemáticos rusos, Andronov y Pontryagin, habían desarrollado en 1937 la dinámica cualitativa de Poincaré en una definición general de la estabilidad estructural. Tuvieron que superar algunos delicados planteamientos. Para ellos, dadas las ecuaciones que describe cualquier sistema dinámico, una cuestión crucial era saber cómo se distribuían topológicamente las soluciones estables de dichas ecuaciones: ¿ representaba un estado estable del sistema parte de una gama continua o un reducto aislado rodeado de inestabilidad ? ¿ podría un pequeño cambio cuantitativo alterar ligeramente las soluciones o bien produciría otras nuevas muy diferentes ó incluso llegaría a no dejar ninguna ?

Años más tarde Thom, que había trabajado intensamente en la relación de las singularidades topológicas con las específicas del cálculo, se percató de que un adecuado conocimiento de la " disposición " o estructura de los máximos y mínimos de un proceso era en general equivalente a conocer su comportamiento cualitativo, encontrándose así con una cuestión fundamental: ¿ cuántas estructuras topológicamente diferentes eran posibles ?

Imbuído en la creencia de que debía haber (al menos para los procesos simples) un número limitado de estructuras arque-

(*) Dos experimentos no dan nunca los mismos resultados cuantitativos, porque las condiciones experimentales no pueden reproducirse exactamente y las perturbaciones externas no quedan eliminadas por completo. Grosso modo, la propiedad de estabilidad estructural pretende expresar que, en base al credo científico en un orden preestablecido para el universo que presupone que en general los experimentos se pueden repetir, aún cuando no fuera en forma de reproducción exacta, lo que se espera que ocurra es que al repetirlos *aproximadamente* en las mismas condiciones, se deben obtener *aproximadamente* los mismos resultados (|31|, pág. 21).

típicas, algo así como un desdoblamiento único para cada singularidad, en 1965 llega a una notable conclusión: que para una serie muy amplia de procesos, sólo eran posibles siete desdoblamientos estables, a los que llamó *catástrofes elementales* [40].

El libro de Thom [35] apareció en 1972, con un prefacio de Waddington (*) quien lo comentaba como una contribución muy importante a la filosofía de la ciencia y en particular a la biología teórica. La tesis que sostiene la obra y que refleja su título *Stabilité structurelle et morphogénèse* es, resumiendo, que las formas descritas por la teoría de catástrofes y en particular las siete catástrofes elementales, representan en definitiva, unas formas elementales cuyas combinaciones permiten recrear la infinita sucesión de formas naturales. Ahora bien, esto no es debido al azar, sino a una morfogénesis cuya lógica interna es la teoría matemática de la estabilidad estructural.

Sin entrar en detalles, la teoría de catástrofes se interesa en sistemas cuyo estado viene descrito por n variables *internas* (variables de estado) y cuyo comportamiento (normalmente regular, aunque pudiendo presentar irregularidades) se encuentra bajo el control de m parámetros *externos* (factores de control).

Dos hipótesis son necesarias para aplicar la teoría de catástrofes en su forma actual: la primera, es que el sistema descrito se rija por un potencial; la segunda, que el número de factores

(*) C. H. Waddington, profesor de genética animal en la Universidad de Edinburgo y presidente de la International Union of Biological Sciences, fué el primer científico de categoría que aclamó la teoría de catástrofes. Experto en morfogénesis, mantuvo que la bioquímica sólo no puede explicarla, sugiriendo ya desde 1940, que para el estudio apropiado de las formas biológicas sería deseable una teoría que hablase en términos de " operadores topológicos ". Thom se propuso inicialmente dar una mayor precisión al concepto de *creodo*, inventado por Waddington para ayudar a explicar algunas de las propiedades de desarrollo de los organismos.

de control de los que depende su conducta sea limitado (por razones matemáticas difíciles de justificar aquí, se supone siempre $m \leq 4$).

Un proceso de abstracción topológica hizo posible el llamado *teorema de clasificación* de Thom (1965), en virtud del cual " en un sistema gobernado por un potencial y cuyo comportamiento depende de un número de variables de control no mayor que cuatro, sólo son posibles siete catástrofes distintas, es decir, siete tipos de discontinuidad cualitativamente diferentes (no interviniendo en ninguna de ellas más de dos variables de estado " (*).

Ya hemos dicho que Thom, de hecho, se había apoyado en su convencimiento de que las formas cualitativas, geométricas, topológicas de comportamiento que se observaban en las catástrofes elementales debían repetirse en muchos procesos (**), lo que matemáticamente significaba demostrar la existencia y unicidad de esas

(*) J. Guckenheimer, experto en teoría dinámica y en topología, expuso en 1973 un contraejemplo para el teorema de Thom en el que daba a entender que el " siete mágico ", tan elogiado por los especialistas en teoría de catástrofes, debía ser aumentado para que el teorema fuese correcto.

(**) En el siglo XVIII, los científicos quedaron asombrados al descubrir que las celdas de un panal estaban muy próximas a utilizar el mínimo absoluto de cera para cerrar un volumen dado, ¿ les permitían a las abejas sus instintos resolver un problema de cálculo de variaciones ? Hoy nos damos cuenta de que la presión de los cuerpos de las abejas a trabajar la cera suave y templada es suficiente para dar la razón al fenómeno. Cada pared de una celda está sometida a presión por ambos lados y adopta una forma que iguala esa presión tanto como es posible. Las celdas son de sección exagonal por la misma razón que una bandeja de peniques, si se sacude hasta que los peniques estén pegados los unos a los otros, presenta una colocación exagonal. No importa que los movimientos de las abejas sean muy diferentes y mucho más complejos que las vibraciones de la bandeja. La forma cualitativa, geométrica, que resulta es la misma (Transcrito de |40|, págs. 41 y 42).

Volvemos a insistir en que para Thom, " en la Ciencia sólo cuentan las experiencias que se repiten. La experiencia efectuada no será considerada como válida, más que si otro experimentador, que efectúa la misma experiencia en otro tiempo y en otro lugar, obtiene sensiblemente la misma morfología que en la primera experiencia" (|36|, p. 11).

siete formas abstractas, debiendo ser además estructuralmente estables.

Las denominaciones de esas siete catástrofes elementales son las siguientes: el pliegue, la cúspide, la cola de milano, la mariposa, y las umbilicales hiperbólica, elíptica y parabólica (*). El teorema fundamental de la teoría de catástrofes, interpretado en dimensión 3 (tres parámetros externos), enuncia la existencia de cinco conjuntos de catástrofes elementales. A cada una de ellas está asociado un sistema descrito por un potencial dependiente de una (pliegue, cúspide, cola de milano) o de dos variables internas (umbílicas hiperbólica y elíptica). La extensión a cuatro parámetros implica la introducción de dos formas nuevas (mariposa, umbílica parabólica).

Entre otras muchas aplicaciones, puede asegurarse que las tres catástrofes umbilicales dirigen muy verosímilmente en Biología, por ejemplo, la organogénesis de los procesos de captura (fagocitosis en los unicelulares) y de la sexualidad (formación y emisión de gametos). El blastopore en la gastrulación de los anfibios proporciona un ejemplo probable en Embriología, de la cola de milano. Ha llamado la atención, asimismo, las similitudes de formas entre el desdoblamiento de la catástrofe umbílica hiperbólica y la formación del pie y la cabeza de una seta, así como entre el embrión de un erizo de mar y el de la catástrofe umbilical elíptica.

(*) Las denominaciones de las cuatro primeras vienen sugeridas por los rasgos visuales de los gráficos que las describen; las de las tres restantes - difíciles de visualizar - llevan nombres matemáticos.

La teoría de catástrofes, que llegó a considerarse para algunos, como uno de los principales movimientos intelectuales del siglo, fué contrastada, atacada y defendida en los términos apropiados a una teoría científica. Un buen número de artículos han sido dedicados sistemáticamente a la crítica de la misma. Entre ellos, pueden citarse el de J. Guckenheimer [15], el del biólogo matemático Jack Cowan (*); el del biólogo B. Goodwin (**), los de los matemáticos Steven Smale (***) y H. J. Sussmann y R. S. Zahler (****), ... Otros muchos, como el ya citado C. H. Waddington (^), es decidido defensor de la teoría, así como E. C. Zeeman, quien hizo patente en varios notables artículos que compartía las ideas de Thom (^ ^), etc ...

En realidad, lo que importa de una teoría es lo útil que puede resultar, y nó los argumentos en su favor o en contra. Una gran ventaja de la teoría de las catástrofes es la de poseer la garantía de que las conclusiones basadas en la misma son estructuralmente estables, lo que no es frecuente con muchos otros métodos.

(*) Cowan sostiene que " la biología está llena de oscilaciones y de ciclos más o menos estables en todos los niveles y es raro encontrar un potencial claro que haga la situación estrictamente tratable en términos de la teoría de catástrofes " ([40], p. 88).

(**) Que dejó escrito, " Creo que las percepciones cualitativas de la conducta de los sistemas dinámicos que proporciona la topología debe combinarse con un análisis cuantitativo " ([40], p.44).

(***) Smale, medalla Fields, afirma que " la teoría tiene más de filosofía que de matemáticas ".

(****) Quienes dirigieron una polémica poniendo en entredicho la universalidad y el valor de la teoría, declarando que eran exageradas las pretensiones de la misma [34].

(^) La influencia de Waddington sobre Thom se trasluce cuando éste afirma que la vida es un proceso en el que se transmite estabilidad, nó simplemente un ordenamiento dado por genes. Fué Waddington quien acuñó la palabra *homeorhesis* (v.g. "mismo camino") para los procesos de desarrollo biológico que siguen un curso estable de cambio.

(^ ^) Para ilustrar una de las catástrofes elementales, Zeeman llegó a diseñar una curiosa máquina (una especie de aparato de cartón y goma). Discrepaba de Thom en cuanto al modo de usar la teoría.

Al configurarse además, como una teoría topológica, proporciona directamente resultados cualitativos |31|.

Hoy en día ha aparecido la teoría de catástrofes *generalizada*, la cual abandona la hipótesis de que la dinámica del campo derive de un potencial |8|.

Al margen de los ejemplos anteriormente citados, la teoría de catástrofes ha venido aplicándose a la biología en muchos de sus campos, desde la bioquímica a la genética, a la embriología y a la teoría de la evolución. Entre los curiosos modelos existentes, es muy conocido, si bien duramente criticado, el de aplicación en el estudio del comportamiento animal debido a Zeeman y referido a la conducta agresiva en el perro. En este modelo, son factores dominantes de control, el enfado (que sólo hace que el perro ataque) y el miedo (que sólo le hace huir o someterse). El modelo refleja los diferentes cursos de estados agresivos o sumisos, donde la conducta neutral más probable es la de niveles bajos en ambos estados y poco probable cuando ambos son fuertes.

Otro ejemplo interesante es el del comportamiento territorial que despliega el urogallo.

Modelos más complejos permiten mostrar cómo interactúan las diferentes especies en cuanto a sus comportamientos, ó cómo cambian esas interacciones con el tiempo.

El análisis cualitativo de la teoría de catástrofes sugiere asimismo, las diversas maneras con las que puede controlarse la formación de nubes de langostas.

Añadamos, para terminar, que la denominada " semiología topológica " |23|, basada en la teoría de catástrofes elementales, se ha aplicado con éxito para la interpretación de imágenes radiográficas (formas estáticas) y registros periódicos (E.C.G.).

Algunos matemáticos opinan que para el estudio de las discontinuidades de la naturaleza, existen otras técnicas matemáticas ya desarrolladas, quizás mejores que la teoría de catástrofes, como las de la teoría cuántica, teoría de ondas de choque y especialmente el campo muy activo de la teoría de la bifurcación. En particular, esta última teoría supone un desafío al principio de Thom de la estabilidad estructural. No obstante, y de hecho, hay una estrecha correspondencia entre la teoría de catástrofes y la de la bifurcación, y en una muy buena parte de casos, sus matemáticas se superponen ó mejor aún, devienen equivalentes.

En realidad, cabe decir que singularidades, bifurcaciones y catástrofes, representan términos diferentes para describir la aparición de estructuras discretas (esto es, no continuas) a partir de estructuras suaves, regulares y continuas. Si la catástrofe constituye el salto brusco surgido como respuesta de un determinado sistema ante una alteración suave en las condiciones externas, la *bifurcación* (palabra sinónima de " ramificación "), designa generalmente cualquier metamorfosis cualitativa del sistema frente a un cambio en los parámetros de los que depende.

La teoría de la bifurcación nació con las investigaciones del matemático Leonhard Euler a mitad del siglo XVIII y comenzó a adquirir significación con el primero de los trabajos ya citados de H. Poincaré (*) de finales del siglo XIX. La teoría trata de un cuerpo de técnicas para estudiar las soluciones de ecuaciones diferenciales (en general, en derivadas parciales) no lineales cuyo carácter cambia de manera discontinua cuando los parámetros que

(*) Thèse: " Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles " (1879).

intervienen en las ecuaciones atraviesan ciertos umbrales.

El proceso de la bifurcación es importante en la estabilidad estructural, en ciertas reacciones químicas, en las inestabilidades en plasmas y ocurre también en flujos turbulentos; en particular, el arranque de una turbulencia puede ser descrito matemáticamente por bifurcaciones sucesivas, que conducen a una transición del orden hacia el desorden.

Hasta primeros del decenio de 1960 la mayoría de los científicos y muy en especial los biólogos, no habían prestado especial cuidado a las bifurcaciones que llevan a un estado errático, por no tener quizás unos alicientes concretos que les impulsasen a explorar el comportamiento desordenado y, por otro lado, si bien los matemáticos ya habían reparado en las bifurcaciones, tampoco poseían incentivos suficientes que les indujesen a describir para qué servía el desorden.

Pero el sorprendente hallazgo de que algunas ecuaciones matemáticas muy sencillas podían modelar sistemas tan violentos como una cascada; y más en general, la apreciación de que ciertos comportamientos dinámicos complejos debidos al efecto de fuertes no linealidades, se encontraban particularmente ligados a lo que sería llamado el *caos* en biología en los problemas de equilibrio de poblaciones, así como a notables cuestiones de mecánica celeste, de física de aceleración de partículas y de cinética química, alteró sensiblemente el norte preferencial de algunos senderos de la investigación científica.

Se puso decididamente mucha mayor atención al hecho de que algunos contextos matemáticos, y en especial, la teoría de la di-

námica de los sistemas no lineales (*), coadyuvaban en gran medida a comprender una diversidad de fenómenos, como el de las epidemias, el de los cambios climatológicos, el de la formación de las nubes, el de los complicados ritmos del corazón humano, etc., siendo esto el origen del interés inusitado por un tipo de problemas que en el pasado sólo concentraba adeptos en la mecánica celeste.

Conceptos nuevos involucrados en los comportamientos complejos de algunos sistemas dinámicos, propulsaron el desarrollo de teorías espectaculares; entre ellos, los de *caos*, *fractal*, *atractor extraño*, ...

El primero sobrevino a raíz del descubrimiento de que algunos sistemas deterministas muy simples, con solo unos pocos elementos podían generar comportamiento errático, llamándose *caos* a la aleatoriedad así generada. Hoy quizás sea válido reemplazar las palabras *catástrofe generalizada* por las de *caos determinista*.

El término *fractal*, debido a Benoit B. Mandelbrot, matemático del Instituto Thomas Watson de I.B.M., culminó en una geometría sorprendente de la naturaleza. La imagen de un fractal, tal y como fué concebido, consta de fragmentos geométricos de orientación y tamaño variable, pero de aspecto similar. Una notable particularidad en el caso de la geometría de fractales, es que la noción de longitud carece de significado, y para cuantificar de qué modo llena el espacio un fractal hay que acudir al concepto matemático de dimensión.

(*) Es bien sabido que un sistema dinámico consta de dos partes: la noción de estado (la información esencial sobre aquél) y una dinámica (regla que describe cómo evoluciona el estado en el tiempo). El ejemplo clásico más conocido de sistema dinámico es el del péndulo simple. En un sentido muy amplio, cuando el sistema no responde a los estímulos en proporción directa, se dice no lineal.

Los fractales tienen dimensión fraccionaria (no entera) (*), la cual representa el medio de ponderar cualidades carentes de una definición clara como el grado de escabrosidad , discontinuidad o irregularidad de un objeto (**).

En lo que concierne a las ciencias de la vida, varios biólogos teóricos se apercebieron de que en el cuerpo humano abundan las estructuras fractaliformes. Pudo registrarse que las neuronas constituyen ejemplos de estructura fractal; así como que el cuerpo celular se ramifica en dendritas, las cuales se escinden, a su vez, en fibras más finas, estructura que puede tener relación con el caos en el sistema nervioso. Algunos investigadores, por otra parte, recurrirían recientemente a la geometría fractal para tratar de explicar anomalías en las pautas de flujo sanguíneo que penetra en el corazón sano.

Se comprobó asimismo y a sabiendas de que la descripción " exponencial " clásica de la ramificación de los bronquios no era satisfactoria, que la fractal encajaba con los datos; y muchas otras diversas aserciones como, por ejemplo, la de que el sistema

(*) La dimensión fractal no es otra que la dimensión de Hausdorff-Besicovitch, que permite asignar medidas a conjuntos para los cuales la medida usual de Lebesgue resulta inadecuada. En la geometría clásica (la euclídea), las rectas tienen dimensión uno, los círculos dimensión dos y las esferas lo son de tres. Así, mientras que una línea euclídea llena exactamente un espacio unidimensional, una línea fractal se desparrama en un espacio bidimensional; consecuentemente, una línea fractal - la de la costa, por ejemplo - tiene una dimensión comprendida entre uno y dos; y análogamente, una superficie fractal - una montaña, verbigracia - tiene dimensión intermedia entre dos y tres.

(**) Para Mandelbrot, la existencia en la naturaleza de numerosas figuras irregulares y fragmentadas, no parece discutible; pero que el grado de irregularidad y fragmentación sea mensurable, es una idea que no sólo no logró imponerse en el pasado, sino que aún exige ulteriores elucubraciones para que sea aceptada (|1|, p. 135).

colector urinario y el del conducto biliar en el hígado, resultaban ser fractales(*). Aún más y en definitiva, que eran fractales las estructuras que proporcionaron la clave de la dinámica no lineal. No obstante, la teoría incomprensiblemente no acabó de cuajar del todo en el seno de algunos colectivos científicos, y la euforia fractal declinó, atravesándose períodos de indiferencia.

Desde un ángulo matemático, el conjunto de las bifurcaciones de una clase de sistemas dinámicos deterministas (cuyo comportamiento viene descrito por una recurrencia o una ecuación diferencial), posee una estructura fractal en el espacio de sus parámetros; es decir, la organización de este conjunto resulta similar a la de sus partes, incluso infinitesimales. Ahora bien, todo esto se encuentra en conexión con la aparición de un complicado comportamiento dinámico que traduce la presencia de un tipo de situaciones que parecen no llevar ni a un estado estable ni a un curso estable de cambio (por ejemplo, estado estacionario no constante y no periódico, entre otros) y en el que queda inmerso un nuevo concepto, el de *atractor extraño*, que permite hablar de comportamiento caótico para los sistemas atrapados por esos atractores (**).

En 1963, Edward N. Lorenz, del M.I.T. (U.S.A.), descubrió el caso de un sistema con pocos grados de libertad que tenía un comportamiento extrañamente complejo. El sistema se manifestaba de una forma errática que se desentendía de toda caracterización basada en cualquiera de los tres tipos de atractores que hasta esa fecha se conocían.

En la construcción de aproximaciones sucesivas de soluciones

(*) Basado en un principio de aleatoriedad, el biólogo A. Lindenmayer desarrolló en 1968 un modelo para la descripción de formas de plantas aunque con una variable determinista. Esto condujo a una clase especial de fractales que se denominarían sistemas L.

(**) En términos groseros, un atractor es a lo que tiende, o a lo que es atraído, el comportamiento de un sistema. Hasta hace relativamente poco tiempo, los puntos fijos, los ciclos límites y las superficies toroidales, eran los únicos atractores conocidos.

de ese sistema de ecuaciones de Lorenz, los experimentos numéricos sugirieron la existencia de un conjunto de atracción de dimensión algo mayor que dos, que tenía una complicada estructura topológica. El atractor observado, llamado hoy *atractor de Lorenz*, fué el primer ejemplo de atractor caótico o *extraño* (*).

La índole determinista de los modelos dinámicos construídos con estos atractores consienten cierta predecibilidad. El ecólogo W. M. Schaffer, que ya había computado exponentes de Lyapunov (**) y mapas de Poincaré, usa atractores extraños para explorar la epidemiología de enfermedades infantiles, tales como el sarampión y las viruelas locas (con técnicas de reconstrucción del espacio de fases mostraría, por ejemplo, que el sarampión obedece a un atractor extraño, cuya dimensión fractal es aproximadamente de 2,5) (|11|, p. 315) (**).

(*) En un notable artículo aparecido en 1963 (*Deterministic non-periodic flows*, J. Atmos. Sci. 20, 130-141), cuyo objetivo inicial era estudiar el fenómeno de convección en la atmósfera de la Tierra por caldeoamiento de su región inferior y enfriamiento de la superior, el meteorólogo E.N. Lorenz dedujo su ya famoso sistema autónomo no lineal de ecuaciones diferenciales:

$dx/dt = \sigma(y-x)$, $dy/dt = rx-y-xz$, $dz/dt = xy-bz$ ($\sigma, r, b = \text{parámet. posit.}$)

La figura a la que conduce la aproximación numérica de una solución de este sistema es una especie de espiral doble, semejante a las alas de una mariposa, en la que se describen o entretejen unos lazos sin aparente regularidad en su número, y dependiendo el subsiguiente número de lazos sensiblemente de los valores iniciales, de tal modo que una pequeña perturbación de éstos, produce otra serie alternante de lazos. A esta figura se la conoce como "mariposa de Lorenz".

Es sorprendente que la belleza del artículo de Lorenz y sobre todo sus ideas, fueran ignorados nada menos que durante unos diez años.

(**) Estos exponentes representan unos números que en un sistema proporcionan un método para medir los efectos antagónicos de estirar, contraer y plegar, en el espacio de fases de un atractor.

(***) Consideramos oportuno añadir que un atractor caótico puede interpretarse como un fractal, en el sentido de objeto que va revelando nuevos detalles, a medida que se va amplificando.

Debemos puntualizar que sería principalmente en la década de 1970, cuando diversos grupos de matemáticos, físicos, biólogos y científicos de la vida, haciéndose eco de los desórdenes de que adolecía la naturaleza, indagaron con mayor profundidad nexos entre las diferentes clases de irregularidades. Los matemáticos, como ya anticipamos, se enfrascaron más detenidamente en los sistemas dinámicos, reparando algunos en que la turbulencia en los fluidos podía estar relacionada con la fenomenología de los atractores extraños, y hallando soluciones caóticas en ecuaciones similares a las de la cinética química y en las que gobiernan la dinámica de neuronas. Muchos físicos (con especial énfasis por parte de algunos norteamericanos como Joseph Ford en Georgia, Robert Shaw en California y otros), llegaron a decidir que la dinámica no lineal era el futuro de la física (¡ todo el futuro !). Los fisiólogos encontraron un insólito *orden* en el caos que sobreviene en el corazón humano, como causa primera de inexplicables muertes súbitas (*). Los ecologistas polemizaron abiertamente entre sí, respecto de la forma de ver el mundo (para algunos, las poblaciones eran en general, uniformes y constantes, bajo la égida de un determinismo regulador; otros concluían que eran más bien irregulares y que lo que las trastornaban eran factores ambientales impredecibles, criterio que anulaba cualquier hipótesis determinista). Y aquellos que poseían sólidos

(*) A raíz de que en estos últimos cinco años se descubriera que el corazón y otros sistemas fisiológicos se comportan generalmente de modo errático cuando son jóvenes y sanos, y que contrariamente a lo que por intuición cabría esperar, el envejecimiento y la enfermedad suelen ir acompañados de comportamientos de regularidad creciente, los fisiólogos actuales conciben al caos como señal de salud, y la disminución de alterabilidad y acentuación de periodicidades lo asocian con la enfermedad [13].

conocimientos matemáticos se esmeraron en tratar diversos grupos de criaturas como sistemas dinámicos. Los epidemiólogos, en base al análisis de ciertos registros de epidemias de sarampión y de otras enfermedades, y en general los estudiosos de la dinámica de poblaciones, descubrieron que sencillos modelos deterministas podían acarrear asombrosos comportamientos pletóricos de azar; finalmente, los biólogos moleculares se dispusieron a concebir las proteínas como sistemas en movimiento.

Unos diez años más tarde, todas esas percepciones y dinamismo desplegado para comprender el desarrollo de la complejidad en la naturaleza, se tradujo en una nueva ciencia bautizada por muchos bajo el nombre de *caos* (*), cuyo propósito no era otro que el de forjar un método para ver orden y pauta donde antes sólo era observado el azar, la irregularidad y lo impredecible. Se llegó al extremo de decir que " la ciencia clásica acaba donde el caos empieza ". Algunos la llamaron ciencia *no lineal* (|11|, p.11) (**).

Hay que añadir ahora que, si bien es verdad (como oportunamente fué advertido) que hubieron épocas en que una buena parte de matemáticos y físicos optaron por dar la espalda a las imágenes excéntricas de los fractales de Mandelbrot, los frutos de las nuevas investigaciones hicieron reverdecer la nube de polvo de Can-

(*) Entre la gran profusión de obras y trabajos aparecidos últimamente, destacamos aquí las recientes colecciones de excelentes artículos sobre *caos* (estudios experimentales, caracterización de fenómenos caóticos, etc ...) que pueden verse en *Directions in CHAOS* (vols. I, II, III y IV), Edit. Hao-Bai-Lin, World. Scientific. Publ. Co., Singapore (1990).

(**) El matemático Stanislas Ulam ironizó al respecto diciendo que llamar " ciencia no lineal " al estudio del caos, era definir la zoología como el " estudio de los animales no elefantes ".

tor, el copo de nieve de Koch, el triángulo de Sierpinski, la curva de Peano y, en definitiva, todo cuanto configuraba aquella geometría que el científico de la I. B. M. decía que era necesario que se aplicase para desvelar nuestro universo real, áspero y escabroso, con su inmensa variedad de formas naturales (nubes, montañas, árboles, capilares sanguíneos, pulmones, ...), imposibles de describir mediante la geometría estudiada en los últimos dos mil quinientos años.

Alcanzó entonces su óptimo esplendor la esencia del mensaje de Mandelbrot (*): que muchas de las estructuras de la naturaleza que aparentan tener una complejidad extraordinaria, poseen realmente una misma regularidad geométrica (**). Pero sobretodo se hizo patente el evidente paralelismo de esta teoría con la del caos determinístico de la dinámica no lineal, hasta tal punto que en estos últimos años, la geometría fractal ha revelado mucho sobre la naturaleza oculta del caos y el orden en el universo natural (***) .

(*) Con la renacida euforia surgieron ulteriores extensiones que suministrarían bases de avances significativos en el análisis de los sistemas dinámicos y en el de los atractores caóticos, como (entre otros) el análisis multifractal.

(**) Se trata de una propiedad que caracteriza a los sistemas que ofrecen el mismo aspecto a diversas escalas (de longitud o de tiempo) y que es llamada *autosemejanza*.

(***) Un claro exponente del binomio orden-caos lo constituye el modelo de Mandelbrot de 1980, el cual se define matemáticamente como el conjunto de todos los puntos del plano complejo que dan origen a un conjunto de Juliá conexo. Su fabulosa riqueza en formas y estructuras se contrapone fuertemente con la sencillez de las reglas que lo describen.

El conjunto de Mandelbrot se ha llegado a catalogar como el "más complejo objeto de la matemática". Entusiasmado con su hallazgo, increíble combinación de absoluta simplicidad y vertiginosa complicación, dice Mandelbrot "no me cansaría de devanear sobre la belleza de este conjunto".

Muchos científicos defendieron calurosamente la necesidad de enseñar el caos, propugnando una rápida estructuración de los programas matemáticos en la enseñanza universitaria por considerarlos plagados, incluso en cursos avanzados, de teorías aferradas al vasto campo de la linealidad, a causa sin duda de su fructífera aplicación a numerosos problemas lineales fundamentales de las ciencias físicas, pero marginando con ello una indispensable y temprana educación matemática en sistemas como los no lineales, de abrumadora presencia en el mundo en que vivimos (*).

La existencia del caos afectó, por otra parte, al mismo *método* científico, representando un abierto enfrentamiento al punto de vista *reduccionista*, en virtud del cual, y como se sabe, un sistema puede entenderse descomponiéndolo para estudiar cada parte por separado, criterio que, desde que se impuso en la mecánica clásica (para invadir luego las otras ciencias), ha prevalecido en buena medida debido a la presencia de gran número de sistemas en los que el comportamiento del todo es realmente la suma de los comportamientos de sus componentes |7|.

Ese método científico, encaminado directamente a simplificar la complejidad de los fenómenos, se remonta a Galileo, quien en principio la reduce a una explicación en términos de unos cuantos elementos simples, de unas cuantas variables mensurables: espacio, velocidad, tiempo. Después Newton dió forma a las leyes de la diná-

(*) El biólogo matemático Robert May de Princeton, pionero en la investigación del caos mediante la "duplicación de períodos", escribe al respecto en *Nature* (Junio 1976): " La intuición matemática así desarrollada equipa mal al estudiante para enfrentarse con el extravagante comportamiento exhibido por el más sencillo de los sistemas no lineales discontinuos, como la ecuación "logística" de la dinámica de poblaciones. Semejantes sistemas no lineales son seguramente la regla, nó la excepción, en todo lo que no concierna a las ciencias físicas No sólo en la investigación, sino también en el mundo cotidiano de la política y la economía, saldríamos ganando si más personas comprendieran que los sistemas no lineales sencillos, no poseen necesariamente propiedades dinámicas simples".

mica expresándolas mediante ecuaciones diferenciales bien determinadas (ecuaciones *deterministas*) (*).

La belleza y simplicidad de la mecánica newtoniana haría caer luego a Laplace y otros de sus ilustres colegas en un dogmatismo cientifista (**) en el que se oculta el prejuicio, hondamente arraigado hasta hace sólo unos veinte años en la inmensa mayoría de los científicos, de compartir un cuerpo de creencias acerca de la complejidad: las leyes simples deben llevar a resultados simples; por contra, la complejidad tan frecuente en la naturaleza - la turbulencia de una cascada o de una tormenta, la intrincada organización de los seres vivos, por ejemplo - aparece como consecuencia de leyes complejas o de infinidad de factores (***). Además, diferentes sistemas se comportan de manera distinta.

(*) Una propiedad muy importante de la teoría newtoniana es que las soluciones de las ecuaciones del movimiento quedan determinadas, para todo tiempo futuro o pasado, una vez conocidas las posiciones y velocidades actuales. Ello significa que, conociendo el presente, cabe predecir el futuro o retrotraernos al pasado.

(**) En opinión de Laplace, las leyes de la naturaleza implican un determinismo estricto y una predecibilidad completa, aunque las imperfecciones de las mediciones exigieran introducir la teoría de las probabilidades [7].

" Puesto que toda la realidad - concluye Laplace - se reduce al mundo físico y éste a su vez a las leyes de la mecánica, un observador que conozca con precisión absoluta el estado de las cosas en un momento dado será capaz, en principio - mediante el cálculo y aquellas leyes - de determinar el futuro con total certeza ".

(***) El problema de la interacción gravitatoria entre tres cuerpos (por ejemplo, Sol-Tierra-Luna) estudiado por Newton, es un contraejemplo que muestra la inexactitud de este prejuicio. El matemático Henri Poincaré probó que el problema de tres cuerpos resulta *irreducible* al de dos cuerpos, al presentar el primero un tipo de inestabilidad asintótica que no se da en el último.

Un conjunto de problemas de gran actualidad, con el comportamiento desordenado como telón primordial de fondo, abrieron nuevas perspectivas respecto de la interpretación reduccionista de la mecánica clásica.

Ello permitió ver que un sistema determinista puede volverse indeterminado. Que unas leyes deterministas muy simples - como en ciertos casos, la de la gravedad - pueden dar lugar a comportamientos complejos. Y dándole la vuelta al razonamiento, que una evolución temporal complicada puede provenir en determinadas ocasiones, de leyes simples.

Algo llamado caos condujo inexorablemente a la desaparición del programa reduccionista de la ciencia. Al asestar un golpe de gracia a los dogmas newtonianos, el caos acabó de barrer la fantasía de Laplace de la predecibilidad determinista (*).

El determinismo inherente en el caos mostraría después que muchos fenómenos aleatorios son más predecibles que lo que se había pensado.

Es cierto también, que la naturaleza puede usar el caos de manera constructiva. La evolución biológica necesita de la variabilidad genética: el caos proporciona un medio de estructurar los cambios al azar, haciendo así posible que la variabilidad esté bajo el control evolutivo (|7|, p. 29).

Debe tenerse en cuenta, por otra parte, que en los procesos biológicos, y a causa de la ausencia de significación fisiológica del caos, éste en general no interviene más que como manifestación patológica (fibrilación cardíaca, agregación aperiódica de las amebas, ...), afectando a sistemas cuyo régimen normal es periódico.

(*) La otra gran causa del hundimiento del determinismo de Laplace, fué la mecánica cuántica, con el principio de incertidumbre de Heisenberg como dogma central.

dico (piénsese que es raro en biología que un régimen fisiológicamente estacionario degenerare en un caos).

De todos modos, la dinámica caótica no sólo es en la actualidad un área vital de la matemática aplicada, sino que está acusando implicaciones cada vez más crecientes en las ciencias biológicas. Muchos son los ejemplos de actividad caótica que se investigan actualmente, como son, entre otros, el metabolismo celular, la electrofisiología cardíaca, biología de poblaciones, osciladores electrónicos y sistemas láser.

También hay que decir que existe una variedad de situaciones productoras de caos (*), cuya complejidad se acrecenta al aumentar la dimensión del espacio de referencia, debiendo asimismo ponderarse que los movimientos se hacen extremadamente complicados y aleatorios cuando hay muchos grados de libertad en los sistemas (por grado de libertad se entiende cada una de las variables necesarias para la descripción de un sistema).

Con esto queremos dar a entender que, si bien hoy se reconoce unánimemente que el caos constituye un modo básico subyacente en casi todos los fenómenos naturales cuyo estudio ha logrado dar explicación a una gran parte de problemas que había pendientes, aún quedan numerosas situaciones en la naturaleza que siguen siendo incomprendidas y para las que el hecho de que se determine que en ellas gravita un sistema caótico no aclara demasiado.

Cada día que pasa, el científico adquiere una mayor convicción de que, en su lucha por conseguir una descripción matemática del universo, quedarán siempre cosas que están fuera de la capacidad

(*) El más simple ejemplo no trivial que exhibe una plena variedad de comportamiento caótico, es el oscilador no lineal forzado.

de una inteligencia humana.

Y quizás acabe por recitarse a sí mismo unas frases cuyo significado distaría bien poco del que refleja las siguientes que dejó escritas Albert Einstein:

La mente humana no es capaz de comprender el Universo. Somos como un niño que entra en una enorme biblioteca. Las paredes están cubiertas hasta los techos de libros escritos en muchas lenguas distintas. El niño sabe que alguien debe haber escrito estos libros. No sabe quién ni cómo. No comprende las lenguas en que están escritos. Pero el niño percibe una especie de plan determinado en la ordenación de los libros, un orden misterioso que no comprende, sino que sólo sospecha oscuramente.

BIBLIOGRAFIA

- | 1 | APÉRY, R.; MANDELBROT, B.; THOM, R. y otros (1984), *Pensar la matemática - Cuadernos Infimos 114*, Tusquets Edit., Barcelona.
- | 2 | ARNOLD, V.I. (1989), *Teoría de Catástrofes*, Edit. Alianza Universidad, Madrid.
- | 3 | BAUER, W.R.; GRICK, F.H.C. and WHITE, J.H. (1980), Supercoiled DNA, *Scientific American*, 243, 118-133.
- | 4 | BRAUN, M. (1978), *Differential Equations and their applications* (second ed.), Springer Verlag, New York.
- | 5 | COSNARD, M. (1987), *Traitement Numérique des Attracteurs Etranges*, Edit. C. N. R. S., París.
- | 6 | COSRIMS (1964), *The Mathematical Sciences (A Collection of Essays)*, The M.I.T. Press, Massachusets.
- | 7 | CRUTCHFIELD, J.P.; FARMER, J.D.; PACKARD, N.H. and SHAW, R.S. (1987, Febrero), *Caos, Investigación y Ciencia*, 16-29.
- | 8 | EKELAND, I. (1977, Septiembre), *La th eorie des catastrophes, La Recherche*, 81, 745-754.
- | 9 | FISHER, R.A. (1930), *The genetical theory of natural selection*, Ed. Chapman and Hall.
- | 10 | FITZHUGH, R. (1960), Thresholds and Plateaus in the Hodgkin-Huxley equations, *J. Gen. Physiol.*, 43, 867-896.
- | 11 | GLEICK, JAMES (1988), *Caos (La creación de una ciencia)*, Edit. Seix Barral, Barcelona.
- | 12 | GOLD, HARVEY J. (1977), *Mathematical Modeling of Biological Systems*, John Wiley & Sons. Inc., N. York.
- | 13 | GOLDBERGER, A.L.; RIGNEY, D.R. and WEST, B.J. (1990), *Caos y fractales en la fisiología humana, Investigación y Ciencia* (Abril), 31-38.
- | 14 | GOODWIN, B. (1973), *Mathematical Metaphor in Development, Nature* (Marzo).

- | 15 | GUCKENHEIMER, J. (1978), *The Catastrophe Controversy, The Mathematical Intelligencer*, vol. I, nº 1, 15-20.
- | 16 | HADELER, K.P. (1982), *Matemáticas para biólogos*, Edit. Reverté, Barcelona.
- | 17 | HALDANE, J.B.S. (1930), A mathematical theory of natural and artificial selection, *Proc. Cambridge Phil. Soc. Math. Phys. Sci.*
- | 18 | HAYEK, N. (1985), *Contribuciones de la matemática al desarrollo de la medicina*, Serv. Public. Universidad de La Laguna.
- | 19 | HISTORIA GENERAL DE LAS CIENCIAS (1973, 1975), *La ciencia contemporánea*, tomos 3 (siglo XIX) y 5 (siglo XX), Edit. Destino, Barcelona.
- | 20 | HODGKIN, A.L.; HUXLEY, A.F. (1952), A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, *J. Physiol.*, 117, 500-544.
- | 21 | JACQUARD, A. (1977), *Concepts en génétique des populations*, Ed. Masson, París.
- | 22 | JACQUARD, A. (1974), *The genetic structure of populations*, Ed. Springer-Verlag.
- | 23 | KERGOSIEN, Y.L. (1983), Medical exploration of some rhythmic phenomena: A topological semiology, *Lectures Notes in Biomathematics*, 49, 32.
- | 24 | KLINE, M. (1968), *Mathematics in the Modern World*, Edit. W.H. FREEMAN, San Francisco y London.
- | 25 | LE LIONNAIS, F. (1962), *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, Edit. Eudeba, Buenos Aires.
- | 26 | LOTKA, A.J. (1922), The stability of the normal age distribution, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 8, 339-345.
- | 27 | LUCAS, WILLIAM F. (Editor) (1983), *Differential Equations Models, Modules in Applied Mathematics*, vol. 1, Springer-Verlag, New-York.

- | 28 | LUCAS, WILLIAM F. (Editor) (1983), *Life Science Models*, Modules in Applied Mathematics, vol. 4, Springer-Verlag, New-York.
- | 29 | MANDELBROT, BENOIT (1975,1984), *Los objetos fractales*, Tusquets Edit., Barcelona.
- | 30 | POHL, W.F. (1980), DNA and Differential Geometry, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 3 no 1, 20-27.
- | 31 | SAUNDERS, P.T. (1989), *Una introducción a la teoría de catástrofes*, Edit. Siglo XXI, Madrid (2a edic.).
- | 32 | SCHÜRGER, K.; TAUTU, P. (1976), A markovian configuration model for carcinogenesis, *Lectures Notes in Biomathematics*, vol. 11, 92-108, Springer-Verlag, Berlin-N. York.
- | 33 | STEEN, L.A. (ed.) (1978), *Mathematics Today*, Springer, N. York.
- | 34 | SUSSMANN, H.J. (1978), Catastrophe theory as applied to the social and biological sciences: A Critique, *Synthèse*.
- | 35 | THOM, RENÉ (1972), *Stabilité Structurelle et Morphogénèse*, Ediscience, París.
- | 36 | THOM, RENÉ (1974), *Modèles mathématiques de la morphogénèse*, Union Générale d'Editions, París.
- | 37 | VOLTERRA, VITO (1931), *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Edit. Gauthier-Villars, París.
- | 38 | WHITE, J.H. (1969), Self-linking and the Gauss integral in higher dimensions, *Amer. J. of Math.* 91, 693-728.
- | 39 | WILLIAMS, T.; BJERKNES, R. (1972), Stochastic model for abnormal clone spread through epithelial basal layer, *Nature*, 236, 19-21.
- | 40 | WOODCOCK, A. and DAVIS, M. (1986), *Teoría de las catástrofes*, Edit. Cátedra S.A., Madrid.
- | 41 | ZEEMAN, E.C. (1976), Catastrophe Theory, *Scientific American* (Abril), 65-83.