

PLANES DE MUESTREO POR ATRIBUTOS: UN ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Carlos J. Pérez-González & Arturo J. Fernández

Departamento de Estadística e Inv. Operativa. Universidad de La Laguna
38271 Santa Cruz de Tenerife. Spain (e-mail: cpgonzal@ull.es)

Resumen

Este artículo presenta un análisis de la sensibilidad frente a cambios en el tamaño muestral y el número de aceptación en los planes de muestreo de aceptación por atributos. Considerando que la distribución del número de unidades defectuosas en la muestra es binomial, deducimos las expresiones analíticas que describen esos cambios. Estas expresiones permiten estudiar el efecto sobre la forma de la curva característica asociada al plan de muestreo. El análisis también incluye resultados gráficos que proporcionan una mejor comprensión del funcionamiento de dichos planes con objeto de evaluar su robustez ante variaciones en los parámetros que determinan por completo el plan.

Palabras y frases claves: muestreo de aceptación; número de aceptación; tamaño muestral óptimo; distribución binomial; curva característica

SAMPLING PLANS BY ATTRIBUTES: A SENSITIVITY ANALYSIS

Abstract

In this paper, a change sensitivity analysis concerning to sample size and acceptance number of the attributives sampling plans is presented. Under the binomial assumption of the number of defectives in the sample, analytical equations that describe these changes are derived. These expressions are applied to study the modifications of the relative shape of the sampling plan's characteristic curve. Graphical

results are also included, which yield a better comprehension about the performance of these plans with the proposal to evaluate their robustness to variations in the parameters that define the plan completely.

Keywords and phrases: Acceptance sampling; acceptance number; optimal sample size; binomial distribution; characteristic curve.

1. Introducción

1.1 Planes por atributos

Los planes de muestreo de aceptación por atributos representan una gran parte de la totalidad de métodos existentes en el muestreo para el control de aceptación. Un plan de muestreo por atributos permite determinar la aceptación o el rechazo de los lotes que han sido fabricados mediante un proceso, a efectos de ajuste a unos niveles de calidad. Una forma de especificar dichos niveles de calidad es a través de la proporción p de unidades defectuosas que está presente en los lotes en estudio o que produce el proceso de fabricación que genera los mismos. El plan de muestreo establece el tamaño muestral, n , que han de tener las muestras que se extraen de dichos lotes así como el número de aceptación, c , que representa el número máximo de unidades defectuosas presentes en la muestra extraída a partir del cual se decidiría el rechazo del lote completo. Por tanto, si D es la variable que cuenta el número de unidades defectuosas en la muestra de tamaño n , el plan determina un criterio de aceptación de la siguiente forma: si $D \leq c$, se acepta el lote; en otro caso, se rechaza el lote.

En este caso, el propósito es encontrar el plan de muestreo para el cual se acepten con una alta probabilidad, $1 - \alpha$, aquellos lotes fabricados con un nivel aceptable de calidad, p_α pero que, además, acepte con una baja probabilidad, β , los lotes fabricados bajo un nivel de calidad rechazable, p_β .

Los planes de muestreo por atributos se agrupan en muchos de los sistemas de muestreo de aceptación como son los estándares MIL-STD-105 (versiones A hasta E, [6], [7], [8], [9], [10]), la versión comercial derivada de éstas, ANSI/ASQC Z1.4 [1] y la norma internacional ISO 2859-1 [4], integrada en la ISO 2859. Asimismo, las

tablas "Dodge-Romig" [2] representan otra de las conocidas referencias en sistemas de muestreo por atributos.

1.2 Modelo del número de defectos de un plan por atributos

La variable D se puede describir a partir de una distribución hipergeométrica, puesto que permite modelizar el número de defectos presentes en una muestra de tamaño n extraída de un lote de tamaño n_L , en el cual hay d_L unidades defectuosas:

$$\text{Prob}(D = r; n, d_L, n_L) = \frac{\binom{d_L}{r} \binom{n_L - d_L}{n - r}}{\binom{n_L}{n}}, \quad (1)$$

El uso de la distribución hipergeométrica se justifica en casos donde el tamaño de los lotes es bastante pequeño o cuando el tamaño muestral es una proporción alta del tamaño del lote; también se utiliza para comparar el comportamiento de un determinado plan de muestreo en el supuesto de diferentes tamaños de lote o cuando se desea estudiar aproximaciones dadas por otras funciones de probabilidad y realizar comparaciones. La distribución hipergeométrica se encuentra tabulada en Lieberman y Owen [5].

En los casos en que n_L es suficientemente grande, para $p = d_L/n_L$ constante, la distribución hipergeométrica se aproxima bastante bien a la distribución binomial:

$$\text{Prob}(D = r; n, p) = \binom{n}{r} p^r (1 - p)^{n-r}, \quad (2)$$

Esta aproximación es bastante precisa en el caso de que $n_L \gg n$ (e.g., $n/n_L \leq 0.1$) y para un valor de p relativamente alto (mayor que 0.1) aunque la convergencia es muy razonable en el resto de casos. La distribución binomial está tabulada en [12], [14], [3] y [11].

La probabilidad de aceptación del lote se puede obtener, utilizando el modelo binomial (2), como:

$$\varphi_{n,c}(p) \equiv \varphi(n, c, p) = \text{Prob}(D \leq c; n, p) = \sum_{d=0}^c \binom{n}{d} p^d (1 - p)^{n-d}, \quad (3)$$

cuya representación gráfica se conoce como *curva característica de operación* o *curva OC*.

A continuación, se estudiará el efecto que tiene sobre la curva característica una variación tanto en el tamaño muestral como en el número de aceptación, con objeto de poder entender mejor como se ve afectada aquella por las variaciones en estos parámetros del plan.

2. Expresiones de cambio en los parámetros del modelo

2.1 Cambio en el número de aceptación

A partir de la ecuación (3) se puede deducir la expresión que mide el efecto del cambio en la curva característica cuando se produce un incremento en el valor de c . Dicha expresión viene dada por:

$$\varphi_{n,c+1}(p) = \text{Prob}(D \leq c + 1; n, p) = \varphi_{n,c}(p) + \text{Prob}(D = c + 1; n, p), \quad (4)$$

de donde se deduce fácilmente que:

$$\varphi_{n,c+k}(p) - \varphi_{n,c}(p) = \sum_{i=1}^k \binom{n}{c+i} p^{c+i} (1-p)^{n-c-i}.$$

Estos resultados generalizan un estudio particular llevado a cabo por Stephens [13]. En la Figura 1 se observan los planes de muestreo para $n = 100$ y $c = 0, 1, 3, 7$, donde p es la proporción de disconformes. Para otros valores de n , se obtienen curvas con la misma forma relativa (sólo cambia la escala de las abscisas). A medida que c aumenta, la curva OC va desplazándose a la derecha (en todo el rango de probabilidades de aceptación). El efecto es el de un incremento en la probabilidad de aceptación no necesariamente igual al aumento en el valor de p , como se ve en la Figura 1.

Observando la curvatura en la concavidad de la parte alta de las curvas para $c = 0$, $c = 1$ y $c = 3$, se aprecia que dicha curvatura es menor para $c = 1$ que para $c = 3$ y es nula para $c = 0$. Del mismo modo, excepto para $c = 0$, es posible ver que todas las curvas tienen un punto de inflexión que difiere de una a otra, caracterizándose las curvas por una "caída" más o menos acentuada (caída drástica de la probabilidad de aceptación). Una medida de esa "caída" puede expresarse

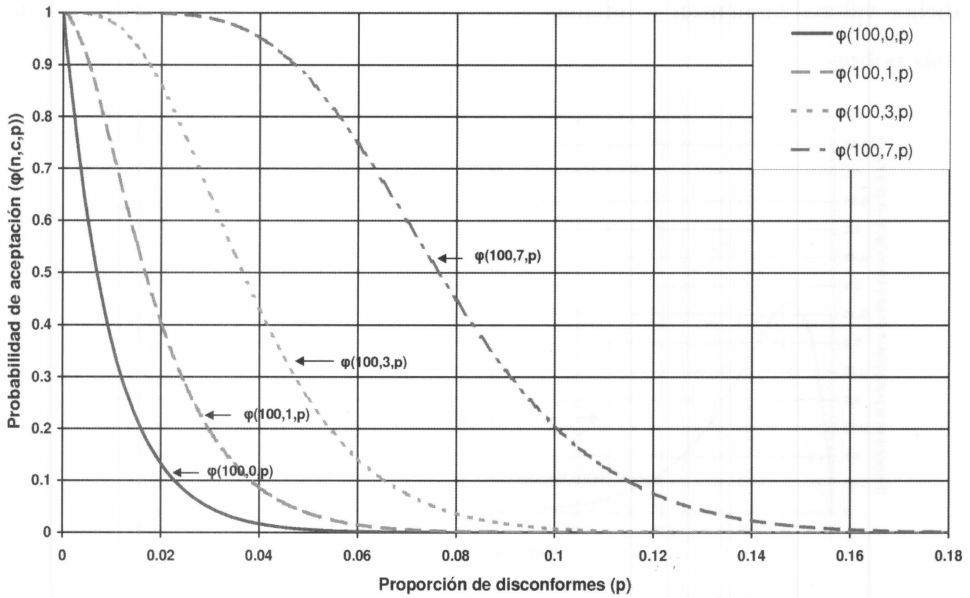


Figura 1: Curvas características para $n = 100$ y $c = 0, 1, 3$ y 7

mediante el cociente de los valores np para dos probabilidades de aceptación. Por ejemplo, para $\varphi_{n,c}(p) = 0.10$ y $\varphi_{n,c}(p) = 0.90$, se obtienen los resultados de la Tabla I.

c	$np(\varphi_{n,c}(p) = 0.90)$	$np(\varphi_{n,c}(p) = 0.10)$	Cociente
0	0.1	2.3	23
1	0.5	3.9	7.8
2	1.8	6.6	3.7

Tabla I: Cocientes de fracciones p para $c = 0, 1, 2$.

Se observa en la Figura 1 que una probabilidad de aceptación baja para niveles altos de calidad se puede mejorar incrementando el número c . La Figura 2 muestra el incremento en la probabilidad de aceptación mencionado anteriormente.

La diferencia entre planes de muestreo a medida que aumenta el valor del número de aceptación c también aumenta de forma progresiva y es tanto mayor cuanto más grande sea la distancia entre los valores de c a comparar. Sin embargo, se observa en la Figura 3 que la diferencia entre valores consecutivos de c es mayor a medida que

dichos valores aumentan y, además, se va trasladando hacia los niveles de calidad más pobres.

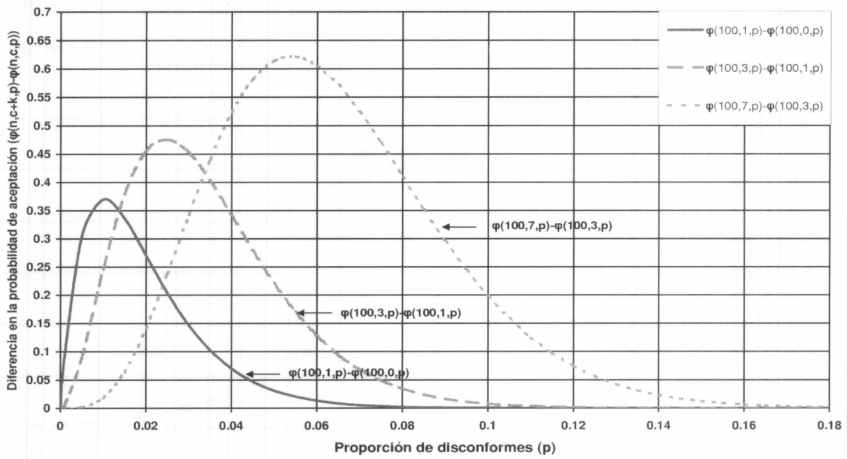


Figura 2: Diferencia entre las curvas características para $n=100$ (I)

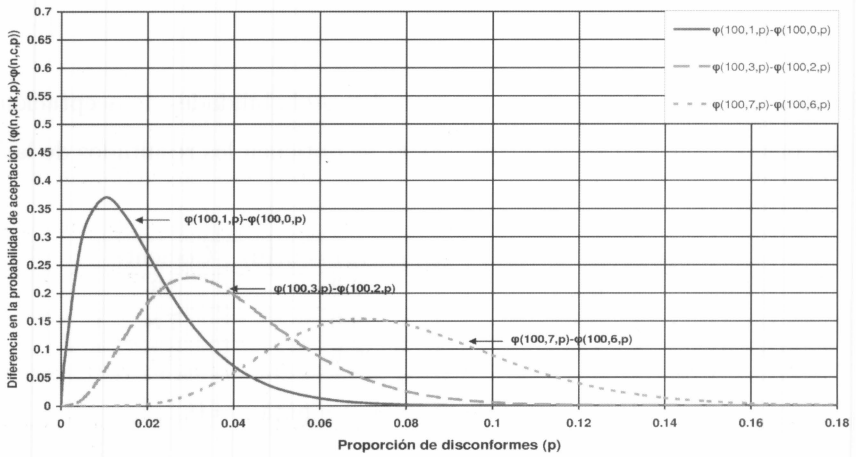


Figura 3: Diferencia entre las curvas características para $n=100$ (y II)

2.2 Cambio en el tamaño muestral

De forma similar a (4), también existe una expresión para medir el efecto del cambio frente a un incremento en el valor de n :

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1,c}(p) &= \text{Prob}(D \leq c; n+1, p) \\ &= (1-p)\text{Prob}(D \leq c; n, p) + p\text{Prob}(D \leq c-1; n, p) \\ &= \varphi_{n,c}(p) - p\text{Prob}(D = c; n, p)\end{aligned}$$

A partir de la expresión anterior se obtiene que:

$$\varphi_{n+k,c}(p) = \varphi_{n,c}(p) - p \sum_{i=0}^{k-1} \text{Prob}(D = c; n+i, p)$$

donde $\text{Prob}(D = c; n+i, p)$ se puede expresar, a su vez, como:

$$\text{Prob}(D = c; n+i, p) = \sum_{j=0}^{\min(c,i)} \binom{i}{j} p^j (1-p)^{i-j} \text{Prob}(D = c-j; n, p).$$

En la Figura 4 se muestra un conjunto de curvas OC para $n = 10, 20, 80$ y 100 y $c = 1$, la cuales presentan una cierta concavidad en lo alto de las curvas. A medida que el tamaño muestral aumenta, existe un movimiento significativo hacia la izquierda, acercándose cada vez más las curvas entre sí. Con tamaños muestrales grandes, el movimiento es menos significativo y su "pendiente" aumenta cada vez más. Esta pendiente, sin embargo, es diferente de la "caída" en la curva mencionada en el estudio anterior, como se puede apreciar en la Tabla I, la cual muestra unos cocientes de fracciones de disconformes bastante similares entre sí, independientemente del tamaño muestral.

n	$p_{0.10}$	$p_{0.90}$	$p_{0.10}/p_{0.90}$
10	0.2056	0.01048	19.6
20	0.10875	0.005255	20.7
80	0.02837	0.001316	21.6
100	0.02276	0.001053	21.6

Tabla II: Cocientes de fracciones p para $n = 10, 20, 80, 100$.

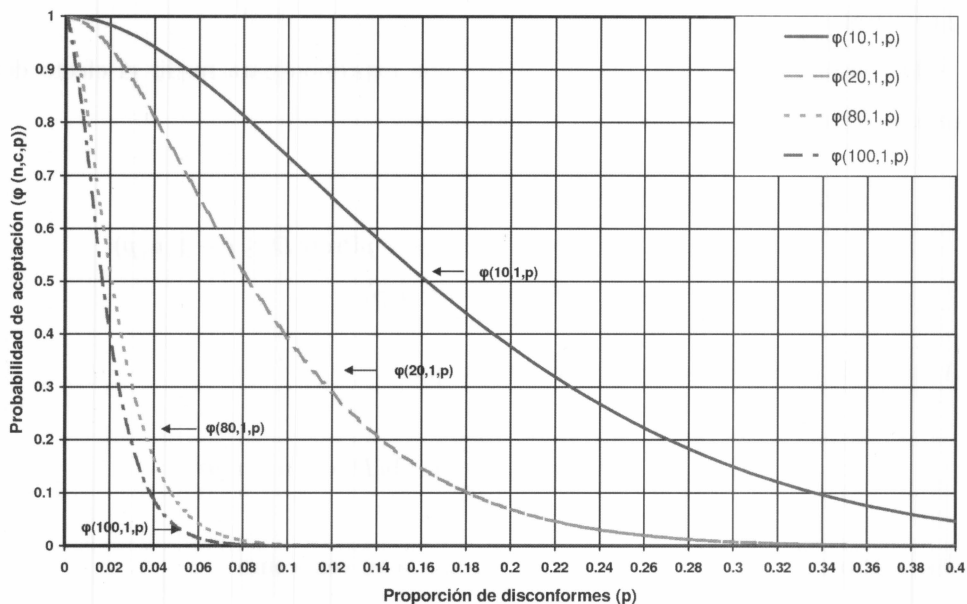


Figura 4: Curvas características para $c=1$

La Figura 5 presenta las diferencias en las probabilidades de aceptación de los planes de muestreo con distintos tamaños muestrales ($n = 10, 20, 50, 80$ y 100) para un valor fijo del número de aceptación ($c = 1$).

Se advierte claramente la distinción que existe entre planes de muestreo con tamaños muestrales relativamente bajos, y como esta diferencia se va reduciendo progresivamente y trasladando hacia niveles de calidad altos (valores bajos de p) a medida que los tamaños muestrales de los planes de muestreo a comparar van aumentando. Esto significa que en el caso de tener un plan de muestreo con una alta probabilidad de aceptación para un nivel pobre de calidad, se puede conseguir una mejora incrementando el tamaño muestral.

Naturalmente, es posible variar tanto el tamaño muestral como el número de aceptación para determinar planes de muestreo que alcancen un propósito particular. Es posible disminuir la probabilidad de aceptación para fracciones de disconformes altas (incrementando el tamaño muestral) o aumentarla para valores bajos de la fracción de disconformes (aumentando el número de aceptación). En este último

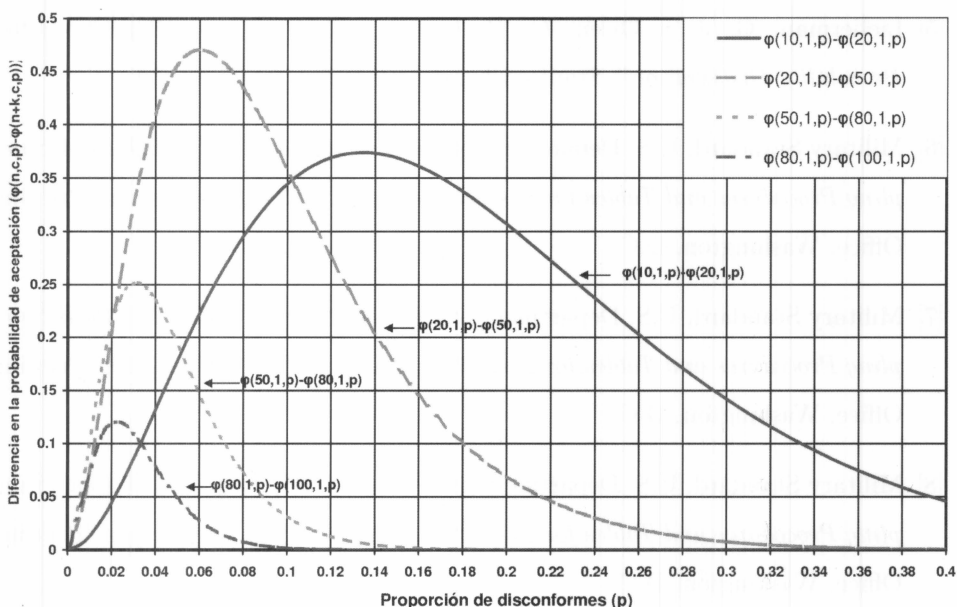


Figura 5: Diferencias entre las curvas características para $c=1$

caso, además, para compensar el incremento de la probabilidad de aceptación para valores altos de p , se puede aumentar el tamaño muestral conjuntamente con el número de aceptación.

Bibliografía

- [1] American Society for Quality (1993). "ANSI/ASQC Z1.4 Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes", ASQC, Milwaukee.
- [2] Dodge, H. F. y Romig, H. G. (1944/1959). "Sampling Inspection Tables", second ed., John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [3] Harvard University Computing Laboratory (ed.) (1955). "Tables of the Cumulative Binomial Probability Distribution", Harvard University Press, Cambridge, MA.
- [4] International Organization for Standards (1989). "ISO-2859-1 Sampling Procedures for Inspection by Attributes-Part 1: Sampling Plans Indexed by Acceptable Quality Level", ISO, Geneva.

- [5] Lieberman, G. J. y Owen, G. B. (1961). *"Tables of the Hypergeometric Probability Distribution"*, Stanford University Press, Stanford, CA.
- [6] Military Standard, U.S. Department of Defense (1950). *"MIL-STD-105A Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes"*, Government Printing Office, Washington, D.C.
- [7] Military Standard, U.S. Department of Defense (1958). *"MIL-STD-105B Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes"*, Government Printing Office, Washington, D.C..
- [8] Military Standard, U.S. Department of Defense (1961). *"MIL-STD-105C Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes"*, Government Printing Office, Washington, D.C.
- [9] Military Standard, U.S. Department of Defense (1964). *"MIL-STD-105D Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes"*, Government Printing Office, Washington, D.C.
- [10] Military Standard, U.S. Department of Defense (1989). *"MIL-STD-105E Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes"*, Government Printing Office, Washington, D.C.
- [11] Robertson, W. H. (1960). *"Tables of the Binomial Distribution Function for Small Values of p "*, Sandia Corporation Monograph, SCR-143.
- [12] Romig, H. G. (1947). *"50-100 Binomial Tables"*, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [13] Stephens, K. S. (2001). *"The Handbook of Applied Acceptance Sampling: Plans, Procedures and Principles"*, American Society for Quality Press (ASQC), Milwaukee.
- [14] United States Department of Commerce (ed.) (1950). *"Tables of the Binomial Probability Distribution"*, Applied Mathematics Series 6, National Bureau of Standards, Washington, DC.