INTRODUCCION DEL CONCEPTO DE DISTANCIA Y PRODUCTO ESCALAR MEDIANTE LA FORMA CUADRATICA LONGITUD DE UN VECTOR.

Por MANUEL GONZALEZ DAVILA

Uno de los problemas centrales de la enseñanza de la Geometría elemental es el paso de la Geometría vectorial o afín a la Geometría euclídea, es decir, la introducción del concepto de distancia en el plano.

El método usualmente empleado para desarrollar la Geometría afín, consiste en la construcción del espacio vectorial W de los vectores fijos del plano y después el plano afín sobre él. Sin entrar a discutirlo ahora, lo que no cabe duda es que las mayorías de las definiciones y conceptos que allí se introducen son aceptados por el alumno como "naturales", bien por su utilización en Física (operaciones entre vectores, ...), bien por su visualización gráfica sencilla (bases, coordenadas, ecuaciones de la recta, ...). De este modo, la Geometría aparece como lo que es; como algo "natural" y hasta cierto punto experimental. Se ven las razones de todas las reglas del juego.

Por el contrario, para introducir el concepto de distancia, el método usualmente empleado es hablar primero del producto escalar: Un concepto que no cumple ninguno de los requisitos anteriores. Es una operación "extraña" (v.w es un número real) con algunas propiedades difíciles de aceptar o visualizar ($v.v>0$) y, sobre todo, se pierde el tono llevado hasta ese momento, pues para el alumno ya empiezan a aparecer "cosas raras". No se pueden negar las enormes ventajas de este enfoque, pero hay que eliminar sus inconvenientes pedagógicos. Lo que debemos pretender es construir toda la Geometría elemental a base de saltos lo más pequeños posibles y tratando siempre de justificar al máximo. Lo que creemos es que hay que evitar las definiciones por "Real decreto" y "porque ya se verá en el futuro lo útil que es" o, por otra parte, los engaños con premeditación y alevosía "porque los muchachos no lo entenderían de otra forma". Si como decía H. Lebesgue, "la única enseñanza que un profesor puede dar es pensar delante de los alumnos", no nos queda más remedio que hacerlo BIEN, delante de ellos, lo que implica su participación con claridad y rigor (rigor de pensamiento, no necesariamente de exposición). En definitiva, con respeto a su capacidad intelectual en formación.

El método que proponemos pretende solucionar estos inconvenientes, llegando al producto escalar y a la distancia, sin que aparezcan cosas (excesivamente) raras. Suponemos que el alumno opera mínimamente en el plano vectorial, (básicamente el concepto de bases y coordenadas).

Lo que se pretende ahora es encontrar una fórmula de MEDIR longitudes de vectores. Es decir, definir L(v) (longitud de un vector). Es "natural" que L(v) cumpla tres propiedades:

(1) $L(v) \in R$

(2) $L(v) > 0,\ v \neq 0$

(3) $L(\lambda v) = |\lambda| L(v),\ L(\vec{0}) = 0$

Por (1) debemos asociar a un vector v un número real; la única relación que hay hasta ahora entre W y R es el empleo de coordenadas. Supongamos que v tiene de coordenadas (x,y) respecto de la base $\{v_1, v_2\}$. Se trata entonces de definir L(x,y). Naturalmente buscamos la función más sencilla que cumpla las propiedades y para ello buscamos entre los polinomios. Los polinomios ctes. no sirven por (1). De (3) se deduce que $L(-v) = L(v)$ y por ello tampoco sirven los de primer grado. Probamos con un polinomio de grado 2 (sin términos lineales, por lo mismo de antes): $L(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

$L(v_1) = L(1,0) = a > 0$; igualmente $c > 0$. Además, si $(x,y) \neq (0,0)$, entonces $L(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 > 0 \Leftrightarrow \text{Discriminante} < 0 \Leftrightarrow 4ac - b^2 > 0$.
Por tanto, a, b, c deben cumplir $a > 0$, $4ac - b^2 > 0$ (esto implica $c > 0$).
Sólo falta comprobar (3): $L(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 ax^2 + \lambda^2 bxy + \lambda^2 cy^2$
$|\lambda|\ L(x,y) = |\lambda| (ax^2 + bxy + cy^2)$. Por tanto, como longitud de un vector sirve la función:

$$L(v) = \sqrt{ax^2 + bxy + cy^2};\ L(v) \text{ se suele denotar } \|\vec{v}\|.$$

Nótese que también serviría:

$$L(v) = a\sqrt{x^2} + b\sqrt{xy} + c\sqrt{y^2} = a|x| + b\sqrt{xy} + c|y|.$$

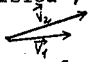
Si se quiere tratar esto, la forma sería dibujar circunferencias:

$$\{\vec{v} \mid L(\vec{v}) = 1\}.$$

En el caso primero aparecen cónicas, en el segundo cuadrados (rombos).
Por tanto, dada una base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, una norma es una función $\| \ \|: W \to R$ tal que si $v = (x,y)$ $\|\vec{v}\| = \sqrt{ax^2 + bxy + cy^2}$ (1).

El ejemplo más sencillo es $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ que es una norma que se puede definir en cada base.

Es preciso insistir, cara al alumno, en que hay infinitas normas (infinitas formas de medir longitudes) y que desde el punto de vista matemático no hay ninguna privilegiada. En efecto, todas las definidas cumplen la desigualdad triangular y son, por tanto, normas en sentido topológico , aunque algunas den resultados que chocan a la "intuición física"; por ejemplo:



$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ entonces $\|\vec{v}_1\| = 1$ y $\|\vec{v}_2\| = 1$ (Por esto es preferible llamar norma en lugar de longitud).

Precisamente, comprender que la aparente "anormalidad" de estos resultados se debe a que se tiene una forma prefijada de medir (que se podría representar como $\llcorner\!\!\rightarrow$ $\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}$), es distinguir lo que es accesorio de lo que es esencial, es decir COMPRENDER. Hay que tener en cuenta que al decir que los dos vectores no pueden medir igual se está implícitamente diciendo "respecto a la medida física". Pero es que ésta es una más y no tiene nada de especial desde el punto de vista matemático. En general, la unidad de medida que resulta no es una unidad de longitud física. O dicho de otra forma, no hay manera de decir que la unidad de longitud de un eje es igual a la unidad de longitud del otro. Además, el hecho de que haya infinitas "longitudes" plantea una diferencia clara con lo afín, donde sólo hay una forma de sumar vectores, etc. Es decir, sólo hay una Geometría afín del plano y hay infinitas euclídeas, aunque todas ellas las estudiemos conjuntamente. Cada concepto introducido depende, pues, de la norma (o del producto escalar) introducida. La métrica no es algo inherente al plano sino algo que añadimos para estudiarlo. Con la noción de ortogonalidad ocurre igual: hay infinitas, y la noción natural de $+$ es sólo un ejemplo de ellas. El alumno debe comparar esta situación con la noción de paralelismo en el plano afín.

El problema que se plantea ahora es la introducción del concepto de producto escalar a partir de lo hecho. Pero es preciso insistir en que el producto escalar no es una idea natural,sino un concepto algebraico que simplifica enormemente los cálculos. Por tanto, es a la hora de operar donde debe aparecer. En general, las consideraciones geométricas deben servir para colocar el problema en una buena situación, y los cálculos para acabar de resolverlo.

Indicamos a continuación varios métodos posibles con algunas de sus ventajas e inconvenientes. Estos métodos se pueden clasificar en dos tipos: unos, conducen, sin hablar antes de producto escalar, a la existencia de bases donde la norma se expresa como $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (métodos últimos); otros, los que introducen antes el producto escalar, a partir del cual se puede continuar con el desarrollo típico de estas cuestiones.

METODO DEL CAMBIO DE BASE

Definida la norma respecto a una base $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$, surge naturalmente el problema de cómo calcular $\|\vec{v}\|$ si sus coordenadas vienen dadas respecto a otra base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$, conociendo las coordenadas de estos últimos respecto a la base inicial. Sean $\vec{v} = (x,y)$, $\vec{w}_1 = (x_1,y_1)$, $\vec{w}_2 = (x_2,y_2)$ respecto a $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$.
Expresando el vector v en función de $\{v_1,v_2\}$, aplicando (1) y operando, sale $\|\vec{v}\|^2 = \bar{x}^2\|w_1\|^2 + \bar{y}^2\|w_2\|^2 + 2\bar{x}\bar{y}\left[a(x_1x_2) + \frac{b}{2}(y_1x_2 + x_1y_2) + cy_1y_2\right]$ y para simplificar, se llama a la expresión del corchete $\vec{w}_1.\vec{w}_2$ (que, por supuesto, también está definida cuando $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$ no son base).

Este método tiene la ventaja de que aparecen directamente las fórmulas del cambio de base para la norma, y de que dada una base $\{\vec{w}_1,\vec{w}_2\}$, la norma se expresa como:

$$\|\vec{v}\|^2 = \bar{x}^2\|\vec{w}_1\|^2 + \bar{y}^2\|\vec{w}_2\|^2 + 2\bar{x}\bar{y}\ \vec{w}_1.\vec{w}_2.$$

La condición $\|\vec{v}\| > 0$ (o sea, $4ac - b^2 > 0$) se escribe ahora:

$4\ \|w_1\|^2\ \|w_2\|^2 - 4\ |w_1.w_2|^2 > 0$; es decir, $|w_1.w_2| \leq \|w_1\|\ \|w_2\|$, que es la desigualdad de SCHWARTZ (si w_1 y w_2 no son base se demuestra aparte).

A continuación se estudiarían las propiedades del producto escalar y se vería que, recíprocamente, un producto escalar define una norma.

Este método tiene la ventaja de que permite ver la importancia del concepto de ortogonalidad. Una base será "buena" cuando la norma venga expresada de una forma sencilla, es decir, cuando $\vec{w}_1.\vec{w}_2 = 0$. Una base ortogonal diagonaliza la forma cuadrática al anular el factor x.y, y una ortonormal la convierte en $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Surge naturalmente la cuestión de existencia de bases ortonormales, que se traduce en las ecuaciones:

$$ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 = 1 \qquad (\|w_1\| = 1)$$
$$ax_2^2 + bx_2y_2 + cy_2^2 = 1 \qquad (\|w_2\| = 1)$$
$$ax_1x_2 + \frac{b}{2}(x_1y_2 + y_1x_2) + cy_1y_2 = 0 \qquad (w_1.w_2 = 0)$$

Se comprueba que estas ecuaciones siempre tienen solución y, por tanto, una norma se puede siempre expresar en cierta base de la forma más sencilla. Nótese la importancia de este resultado, que dice que todos los productos escalares se pueden tratar de la misma forma (con las mismas fórmulas), aunque los resultados "físicos" sean distintos.

METODO DE LA FORMA POLAR DE LA FORMA CUADRATICA

Se sabe que en un espacio euclídeo se puede obtener v.w a partir de la norma mediante: $\vec{v}.\vec{w} = \frac{1}{2}(\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2)$

Esto es el proceso de polarización de la forma cuadrática y su traducción en Geometría clásica es el teorema del coseno. Pero, por supuesto, la fórmula anterior sigue sin tener nada de "natural" y no puede justificarse como definición de producto escalar. Este método pretende ser una justificación de tal fórmula.

Hasta ahora se tiene: $\|\vec{v}\|^2 = \|(x,y)\|^2 = ax^2 + bxy + cy^2$ con $a = \|\vec{v}_1\|^2$, $c = \|\vec{v}_2\|^2$.
Es decir, a y c están estrechamente relacionados con $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$; conocidas sus normas se conocen a y c. ¿Ocurre algo parecido con b? Veamos:

$$\|(1,1)\|^2 = \|\vec{v}_1+\vec{v}_2\|^2 = a + b + c \Longrightarrow b = \|\vec{v}_1+\vec{v}_2\|^2 - \|\vec{v}_1\|^2 - \|\vec{v}_2\|^2.$$

Esta expresión aparece en muchos cálculos y por eso se simplifica dándole el nombre de producto escalar a $\vec{v}.\vec{w} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2\right)$.
Por supuesto, esta definición vale si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no son base.

A partir de aquí se puede hacer un desarrollo parecido al del método anterior, encontrando la expresión del producto escalar y de la norma respecto a una base cualquiera, justificando el concepto de ortogonalidad como antes y planteando la existencia de bases ortonormales.

<u>METODO DE DIAGONALIZACION DIRECTA</u>

Este método conduce directamente a la expresión $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Si los alumnos conocen y manejan las "fórmulas del cambio de base", se puede intentar directamente diagonalizar la forma cuadrática, es decir, buscar una expresión más sencilla de $\|\vec{v}\|^2 = ax^2 + bxy + cy^2$, tratando de completar cuadrados (recuérdese que $a > 0$ y $4ac - b^2 > 0$):

$$ax^2 + bxy + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)y^2$$

y con el cambio de base $\bar{x} = x + \frac{b}{2a}y$, $\bar{y} = y$ resulta que:

$$\|\vec{v}\|^2 = a\bar{x}^2 + \left(c-\frac{b^2}{4a}\right)\bar{y}^2.$$

Una base (o un sistema de ejes) se dice ortogonal cuando la forma cuadrática $\|\vec{v}\|^2$ se expresa de esta forma (sin término xy), es decir, cuando es "diagonal". Queda probada la existencia de bases ortogonales, y naturalmente se ve después que una base es ortogonal cuando su producto escalar es 0.

Se puede obtener también la existencia de bases ortonormales escribiendo $\|\vec{v}\|^2 = (\sqrt{a}\bar{x})^2 + \left(\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}\,\bar{y}\right)^2$ y tomando $\bar{\bar{x}} = \sqrt{a}\bar{x}$, $\bar{\bar{y}} = \sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}\,\bar{y}$, con lo cual se llega a que para estas bases (que existen): $\|\vec{v}\|^2 = x^2+y^2$.

Este método justifica el estudio de aplicaciones del tipo:

$$\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

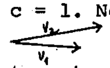
es decir, el estudio somero de las matrices y las aplicaciones lineales que se necesita si se quiere introducir el producto escalar como en el método siguiente, aunque ahora se podría hacer por otro método llegándose a $\vec{v}.\vec{w} = x_1 x_2 + y_1 y_2$; $\vec{v} = (x_1, y_1)$, $\vec{w} = (x_2, y_2)$.

No parece muy útil en este método hablar de la matriz de la forma cuadrática respecto a una base y quizás sea muy complicado.

METODO DE LA SIMETRIA

Este método pretende justificar directamente la introducción de la norma como $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2}$. Matemáticamente esto está justificado, pues sabemos que siempre existen bases ortonormales; ahora se trata de justificar, mediante consideraciones geométricas de simetría bastante sencillas, su introducción directa que ahorra mucho tiempo.

Para desarrollar este método se comienza, como en la introducción, buscando una función polinómica que sirva como "longitud de un vector". Los términos lineales se eliminan como allí y entonces $L(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Se trata ahora de justificar la eliminación del término bxy.

Parece natural que entre los cuadrantes que define la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ no haya ninguno privilegiado. Si un punto del primero es (x,y), entonces sus puntos simétricos en los otros tres son $(-x,y)$, $(-x,-y)$ y $(x,-y)$. Por la propiedad (3) se cumple que $L(x,y) = L(-x,-y)$ y $L(-x,y) = L(x,-y)$. Para que los cuatro cuadrantes sean iguales "exigimos" $L(x,y) = L(-x,y)$. Es decir, que la simetría $(x,y) \rightsquigarrow (-x,y)$ sea una isometría.
Dicho de otra forma, que al cambiar x por -x se obtiene un vector de igual longitud que el primero, quiere decir que los cuatro cuadrantes son "iguales" para nosotros, y esa es precisamente la definición que da Euclides de perpendicularidad: "Cuando una línea recta colocada sobre una línea recta forma ángulos adyacentes e iguales el uno al otro, cada uno de los ángulos iguales es recto y la línea recta colocada sobre la otra se llama perpendicular a aquélla sobre la que está colocada". Es decir, en el proceso se introduce la ortogonalidad directamente, pues la simetría $L(x,y) = L(-x,y)$ lleva en cierto sentido implícita la idea de que los ejes son ortogonales (pues esta simetría sólo se ve "dibujándola" cuando se pintan los ejes perpendiculares). Dos rectas o dos vectores serán ortogonales cuando se encuentren en la misma posición relativa entre ellos que en la que se encuentran los ejes dados. Entonces resulta $ax^2 + bxy + cy^2 = ax^2 - bxy + cy^2 \Rightarrow b = 0$, y queda $L(x,y) = ax^2 + cy^2$. Como $L(x,y) > 0$, $(x,y) \neq (0,0)$, la única condición que deben cumplir a y c es ser > 0. Luego se puede tomar $a = c = 1$. Nótese que esta elección supone tomar $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ aunque 

.
Pero nótese que el problema de encontrar vectores que aparentemente no

"miden" lo mismo y tienen la misma longitud algebraica (o ángulos que aparentemente no son iguales y son algebraicamente el mismo) aparece con cualquier forma cuadrática (excepto $\sqrt{x^2+y^2}$ y) aunque con este método en lugar de "aparecer", se afirma su existencia desde el comienzo, y se enfrenta antes al alumno con la aparente incongruencia de que uno puede elegir unidades arbitrarias de longitud sobre los ejes (al escoger a y c) y de ángulos (al escoger la base $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$) cuando se está definiendo una distancia en el plano.

Se llega definitivamente a $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ utilizando la propiedad (3) como en la introducción: $L(\lambda v) = |\lambda| L(\vec{v})$.

Se plantea ahora la cuestión de desarrollar lo introducido y de que aparezca el producto escalar. (El desarrollo que sigue sirve también para el método anterior). Esto se podría hacer por alguno de los métodos anteriores y se llegaría a la expresión:

$$\vec{v}.\vec{w} = (x_1,y_1).(x_2,y_2) = x_1.x_2 + y_1.y_2.$$

Aquí se va a indicar otro método que tiene importantes ventajas y que, con ligeras variantes, sirve también para cualquiera de los otros métodos indicados y resuelve (aun en el caso de que se introduzca el producto escalar directamente), DE FORMA MUY SENCILLA, LOS PROBLEMAS DIDACTICOS PLANTEADOS CON LA DEFINICION RIGUROSA DE ANGULO, LA DEFINICION DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO, EL ESTUDIO Y CLASIFICACION DE LAS ISOMETRIAS DEL PLANO, SUS ECUACIONES Y RESULTADOS ELEMENTALES ("El producto de dos simetrías es una rotación", "Toda rotación es producto de dos simetrías", etc.), LAS FORMULAS DE LA TRIGONOMETRIA PLANA, etc.

Se trata de estudiar las transformaciones del plano que conservan la estructura introducida. Así, el alumno se encuentra con la primera idea de conservación y el conocimiento que se alcanza de una estructura, estudiando sus transformaciones.

Se definen las isometrías como aplicaciones biyectivas de W en W que conservan la norma ($\|f(v)\| = \|v\|$) y las operaciones (son lineales).

Cualquier punto de la circunferencia unidad $\{\vec{v} / \|\vec{v}\| = 1\}$ tiene como imagen otro punto de la circunferencia unidad (es decir, la circunferencia unidad es una órbita para las isometrías). Se observa que dada la imagen (a,b) del punto (1,0), la imagen (x', y') de otro punto cualquiera (x,y) sobre la circunferencia unidad, sólo puede tener dos valores. En efecto, $\|(x',y') - (a,b)\| = \|(x,y) - (1,0)\|$ y, de aquí, operando, resulta $ax' + by' = x$, que con $(x')^2 + (y')^2 = 1$, implica:

$$x' = ax - by \qquad \text{o} \qquad x' = ax + by$$
$$y' = bx + ay \qquad\qquad y' = bx - ay$$

o bien
$$[1]\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad [2]\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Recíprocamente, toda aplicación definida por matrices de estos tipos es una isometría. Estas ecuaciones valen para todo v (tómese $\vec{v}/\|\vec{v}\|$). ¿Cómo distinguir un caso de otro? La simetría tiene dos puntos fijos en la circunferencia unidad y la rotación ninguno. Es decir, que hay que resolver:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Resulta que [1] es una rotación y [2] una simetría.

Si se define base ortonormada como aquélla en que la forma cuadrática se expresa como $\sqrt{x^2+y^2}$ (definición equivalente a la normal) resulta que toda isometría de matriz [1] en una base ortonormada, tiene una matriz de éste tipo en cualquier otra base ortonormada y los números a y $|b|$ no dependen de la base ortonormada y sólo de la rotación. Se llama a "a" coseno de la rotación. Si el plano está orientado, entonces b tampoco depende de la base ortonormal escogida que tenga el mismo sentido que la inicial. Se llama a "b" seno de la rotación.

Despejando a en las ecuaciones de la rotación, se obtiene $a = xx' + yy'$. A lo último se le llama "producto escalar" y así resulta que $a = (x,y).(x', y')$. A partir de aquí se puede desarrollar toda la Trigonometría y el resto de las cuestiones enunciadas antes. Para un desarrollo concreto puede verse: "GEOMETRIA" Queysanne-Revuz; CECSA, (con la mayoría de las cuestiones muy simplificadas si se hace lo indicado arriba), o bien "ALGEBRA LINEAL Y GEOMETRIA" Dieudonné; Selecciones Científicas.

Con todo este bagaje es posible estudiar todas las cuestiones de la Geometría euclídea clásica o "moderna". Se pueden estudiar todas las cuestiones de la geometría del triángulo o del círculo, rigorizando las demostraciones sencillamente mediante los grupos de transformaciones adecuados y sus invariantes.