NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 85, marzo de 2014, páginas 145-156

Tiempo de espera y algunas cosas más
Problemas Comentados XXXVI

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen

El artículo consta de tres partes: en la primera exponemos los problemas planteados en la Primera Fase del Torneo de Matemáticas para 2º de la ESO y resolvemos alguno de ellos; en la segunda parte enunciamos los ejercicios propuestos en el Torneo de Primaria; y por último planteamos varios problemas de diferentes fuentes, uno de la colección de "Problemas de los abuelos". Solucionamos el que nos ha llegado como propuesto en una Oposición para ser resuelto sin aplicar un método algebraico, resolución que debía ser entendible por alumnos de niveles elementales. Para las soluciones hemos aplicado ecuaciones, gráficos del parte-todo o tablas de doble entrada, como ya es habitual, orientando al provecho que se puede obtener en el aula con las diversas metodologías.

Palabras clave

Torneos de problemas de matemáticas para Primaria y Secundaria. Métodos de resolución sin álgebra.

Abstract

The article consists of three parts: first we present the problems encountered in the first phase of the Tournament Math 2nd year of ESO and solve any of them, in the second part we state the exercises in the Tournament of Elementary School, and finally propose several problems from different sources, one of the collection of "problems of grandparents." We solve that has come to us as an "Oposición" proposed to be solved without applying an algebraic method, resolution should be understood by students of elementary level. For solutions we applied equations, graphs of part-whole or crosstabs, as usual, guiding the advantage that you can get in the classroom with various methodologies.

Keywords

Tournament math problems for Primary and Secondary. Resolution methods without algebra.

En nuestro anterior artículo decíamos textualmente "Con estas dos pruebas de los Torneos de Secundaria y Primaria tenemos, pues, abundante entretenimiento para nuestra próxima cita en la revista".

¿Y qué tal les ha ido? No hemos recibido ningún correo con soluciones, dudas, ideas o aplicaciones en clase. ¿Necesitan más tiempo para pensarlos?

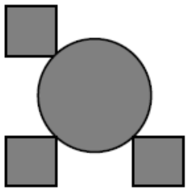
Pues les vamos a dar un poco de tiempo más antes de poner nuestras soluciones. Bueno, haremos algún comentario sobre algunos de ellos y daremos alguna solución o aproximaciones a las mismas en otros casos.

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

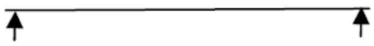
Los problemas de la **Segunda Fase del Torneo de Secundaria**:

Problema nº 1. La magia del espejo

A continuación tienes un dibujo y la representación de un espejo (las flechas señalan la superficie reflectante).



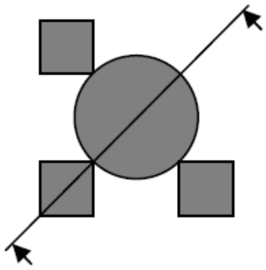
DIBUJO



ESPEJO

Si colocamos el espejo sobre el dibujo en la posición que dibujamos a continuación la imagen que se ve a través del espejo junto con lo que queda fuera, es la misma que la anterior.
Encuentra todas las posiciones en que puedes colocar el espejo para ver:

a) el círculo completo y 3 cuadrados
b) el círculo completo y 2 cuadrados
c) sólo 1 cuadrado
d) sólo 2 cuadrados



Este problema es muy simple y sólo requiere una buena visión espacial. Está basado en una de las actividades presentes en la Exposición Matemáticas 2000 de la que ya hemos hablado. Es una manera lúdica de trabajar la geometría, muy atractiva para los muchachos y muchachas de estas edades y, naturalmente, muy educativa.

Problema nº 2. Jugando con los dados

Candelaria y Pino son dos amigas que se han inventado un juego de dados con las siguientes reglas:
Lanzan dos dados sucesivamente y calculan la resta de puntos entre el mayor y el menor.

- Si resulta una diferencia de 0, 1 ó 2 entonces Candelaria gana una ficha.
- Si resulta 3, 4 ó 5 es Pino quien gana una ficha.

Comienzan con un total de 20 fichas y el juego termina cuando no quedan más.
¿Te parece que en este juego tienen las mismas posibilidades de ganar?
Si tuvieras que jugar, ¿qué jugador preferirías ser?

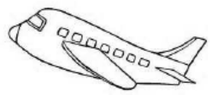
También es muy simple. Constituye una primera aproximación al estudio del azar y al cálculo de probabilidades. Si tabulamos los resultados posibles y puesto que en el enunciado no se estipula que intervenga el orden de los lanzamientos en el cálculo de la diferencia (cosa que se recalca al decir que se calcula la resta de puntos entre el mayor y el menor), hay 36 posibles resultados:

		Primer dado					
		1	2	3	4	5	6
Segundo dado	1	0	1	2	3	4	5
	2	1	0	1	2	3	4
	3	2	1	0	1	2	3
	4	3	2	1	0	1	2
	5	4	3	2	1	0	1
	6	5	4	3	2	1	0

12 de los resultados favorables a Pino y 24 favorables a Candelaria. De ahí se concluye fácilmente que el juego no da la misma

posibilidad de ganancia a los dos jugadores. De tener que jugar, evidentemente la opción es jugar en el puesto de Candelaria.

Problema nº 3. Aterriza como puedas



Miguel de la Peña, es un piloto novato de Canarias Airlines, y se encuentra en un avión a 5000 metros de altura y, para aterrizar, está descendiendo a razón de 200 metros cada 5 kilómetros, que es justo la trayectoria exacta para aterrizar en el aeropuerto internacional de San Borondón.

a) Dibuja, haciendo una gráfica, el itinerario de bajada hasta llegar al aeropuerto.
b) ¿A qué distancia se encuentra el avión del citado aeropuerto?
c) ¿A partir de qué distancia del aeropuerto se podrían construir edificios de 30 metros de altura, para que, con un margen superior de 10 metros, el avión de Miguel no choque con ellos?

Este problema parece adolecer de alguna información importante, que debe suponer el alumno. ¿Cuál? Pero lo realmente interesante es analizar cómo proceden nuestros alumnos ante una situación como ésta. ¿Qué piensan ustedes?

Problema nº 4. La tarjeta de crédito

Los dieciséis dígitos de una tarjeta de crédito están escritos en sus casillas de modo que la suma de tres cifras contiguas cualesquiera del número es 18. ¿Podrías averiguar el número completo si sólo recordamos los dos dígitos que aparecen a continuación?

		7										8			

No parece tampoco especialmente difícil y el número de soluciones diferentes se presenta abundante. ¿O no?

Problema nº 5. Albóndigas

En cinco platos se han repartido cien albóndigas. Los platos 1º y 2º tienen en total 52; entre el 2º y el 3º hay 43; el 3º y el 4º suman 34; mientras que en los platos 4º y 5º hay 30. ¿Cuántas albóndigas hay en cada plato?

Podrá ser resuelto mediante aritmética, utilizando un diagrama partes/todo, o con el uso del álgebra.

Veamos la solución algebraica:

Si llamamos A, B, C, D y E a la cantidad de albóndigas contenidas en los platos en el orden mencionado, tendremos dos informaciones relevantes que podremos expresar así:

$$A + B + C + D + E = 100$$

$$(A + B) + (B + C) + (C + D) + (D + E) = 52 + 43 + 34 + 30 = 159$$

es decir:

$$A + 2B + 2C + 2D + E - (A + B + C + D + E) = 159 - 100 = 59$$

De la combinación de ambas obtenemos B + C + D = 59

Y combinando esta última con cada una de las cuatro informaciones simples dadas por el problema vamos obteniendo las cantidades de cada plato.

$$\left.\begin{array}{l} B+C+D=59 \\ B+C=43 \end{array}\right\} D=16 \qquad \left.\begin{array}{l} A+B=52 \\ B=25 \end{array}\right\} A=27$$

$$\left.\begin{array}{l} B+C+D=59 \\ C+D=34 \end{array}\right\} B=25 \qquad \left.\begin{array}{l} D+E=30 \\ D=16 \end{array}\right\} E=14$$

El valor de C puede salir de cualquier combinación a partir de las informaciones existentes y se obtiene que C = 18.

<u>Solución</u>: las cantidades de albóndigas en los platos serían las siguientes:

A = 27, B = 25, C = 18, D = 16 y E = 14

Nos quedaría comprobar los resultados, primero las sumas de albóndigas en los pares de platos, y luego el total de ellas.

27 + 25 = 52; 25 + 18 = 43; 18 + 16 = 34; 16 + 14 = 30

27 + 25 + 18 + 16 + 14 = 100

Añadiríamos, además de ¡buen provecho!: ¡¡buenos platos para contener tantas albóndigas!!

Y estos son los problemas del **Torneo de Primaria:**

Problema 1. Juego de monedas alternadas.

Alex colocó seis monedas sobre una regla, de manera que hacia arriba quedan tres caras y tres cruces de forma alternada.

Objetivo: Coloca las tres caras juntas y las tres cruces juntas.

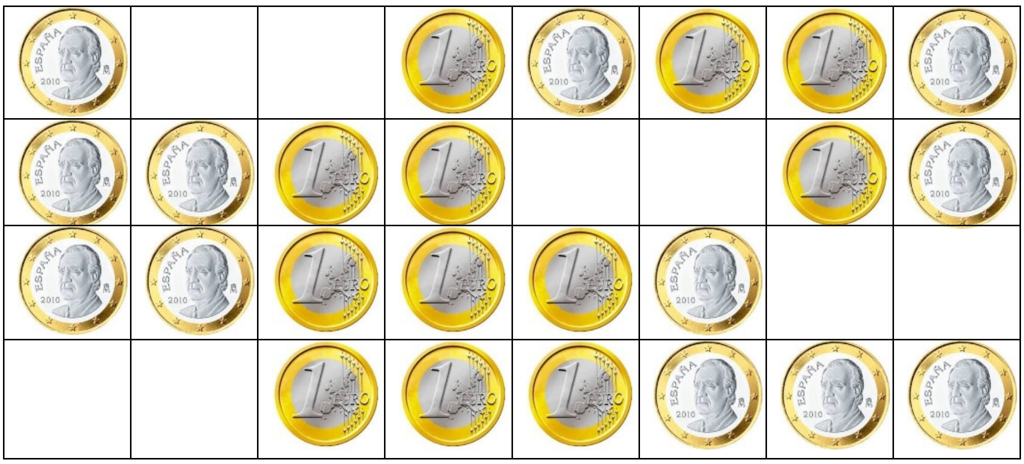
Reglas: Sólo puedes mover las monedas de dos en dos, y además deben estar juntas sin intercambiar el orden en el que se encuentran.

Ejemplo:

Mi amiga Lola dice que es capaz de ganar el juego en sólo cuatro movimientos. ¿Serás tú capaz de realizar la misma hazaña? ¡PUES ADELANTE!

A partir de la posición inicial:

Los cuatro movimientos necesarios son los siguientes:

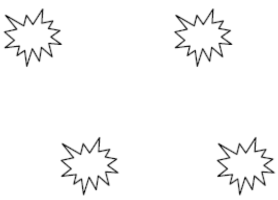


Estos problemas de intercambio son muy conocidos; sus grandes divulgadores fueron Dudeney y Loyd. Tanto en la Exposición Matemáticas 2000 como en el Komando Matemático de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas, aparecen en sus distintas versiones (tres o cuatro piezas por bando) y presentaciones (monedas, fichas, vasos, etc.).

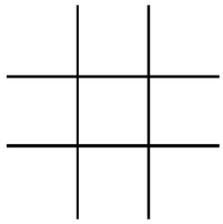
Problema 2. Amarrando triángulos

El abuelo Isidro, tiene cuatro árboles sembrados en dos líneas, y se dispone a amarrar una cuerda alrededor de tres de ellos. ¿De cuántas formas puede hacerlo? ¡A POR ELLO!

¿Y si fueran seis árboles? ¿Y si fueran ocho?



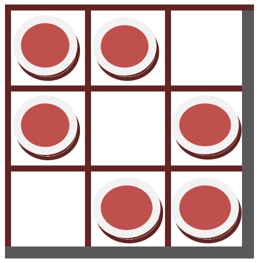
Problema 3. Ninguna en tres en raya



El tres en raya es un juego aburrido si estas sólo, pero usando el mismo tablero, ¿cuántas fichas del mismo color, serás capaz de colocar sin hacer ningún tres en raya, ni en las filas, ni en las columnas, ni en las diagonales? ¡VAMOS!

Es muy fácil quedarse corto si se parte de la situación de tablero vacío y se van añadiendo las fichas. Resulta más sencillo iniciar el razonamiento a partir del máximo de fichas colocadas.

No pueden ser 9, porque habría tres en raya por todos lados. No pueden ser 8, porque en el mejor de los casos habría cuatro posiciones de tres en raya.



¿Serán 7? Si se colocan de manera que los dos espacios vacíos sean contiguos habrá tres posiciones de tres en raya; y si se colocan en espacios separados habrá dos posiciones de tres en raya.

Habrá, pues, que colocar 6 fichas sin hacer tres en raya.

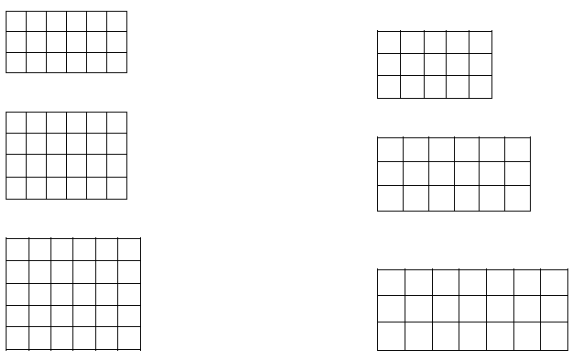
¿Habrá más soluciones?

Problema 4. No tengo cambio

En esto, que se encuentran dos profesores de Matemáticas:
-¿Tienes cambio de un euro? – le dijo Déniz a Manolo
- Deja ver, tengo bastante suelto…pues mira no tengo. – Le contesta Manolo.
-¿Cómo va a ser eso?, déjame ver… – dice Déniz – es verdad, no tienes cambio… es más, no se puede tener mayor cantidad de dinero en calderilla, sin tener cambio de un euro.
Si para Déniz, la calderilla son las monedas más pequeñas de un euro (50, 20, 10, 5, 2 y 1 céntimo). ¿Cuánto dinero tenía Manolo?
¡¡¡ADELANTE!!!

Problema 5. Pintando baldosas

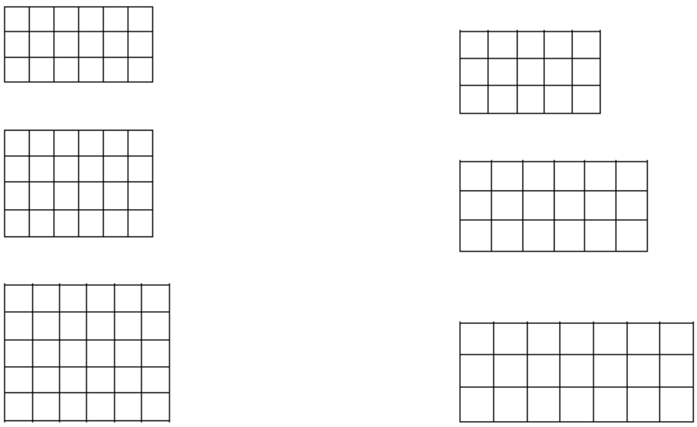
El patio del colegio donde estudia mi amiga Avelina es rectangular, y el piso está cubierto de baldosas cuadradas (todas iguales). Avelina las tiene contadas, el patio mide 120 por 40 baldosas. Lo sabe porque jugando el otro día pintó una línea recta de una esquina a la opuesta, y luego la maestra le hizo limpiar todas las que había marcado. ¿Cuántas baldosas tuvo que limpiar Avelina por hacer ruindades?



PISTA: Se sabe que para un mismo problema siempre hay varias formas de llegar a la solución, pero si quieres un consejo, primero cuenta las que marcarías en unos ejemplos pequeños antes de aventurarte a buscar la solución del grande. ¡ÁNIMO!

Problema 5.- Pintando baldosas

El patio del colegio donde estudia mi amiga Avelina es rectangular, y el piso está cubierto de baldosas cuadradas (todas iguales). Avelina las tiene contadas, el patio mide 120 por 40 baldosas. Lo sabe porque jugando el otro día pintó una línea recta de una esquina a la opuesta, y luego la maestra le hizo limpiar todas las que había marcado. ¿Cuántas baldosas tuvo que limpiar Avelina por hacer ruindades?
PISTA: Se sabe que para un mismo problema siempre hay varias formas de llegar a la solución, pero si quieres un consejo, primero cuenta las que marcarías en unos ejemplos pequeños antes de aventurarte a buscar la solución del grande. ¡¡¡ÁNIMO!!!



Ahora a completar lo presentado y hacer lo que no hemos tocado.

¡Ah! Y no tarden mucho. ¡Ya se están preparando los Torneos del año 2014!

Nosotros, mientras, les hemos preparado un par (o dos) de problemas nuevos para pensar y resolver.

El primero es de nuestra habitual serie **"Los problemas de los abuelos"**. Y dice así:

Los LEDs

A la entrada del colegio de Mario y Andrea hay una pantalla como ésta, con trece LEDs (*Light-Emitting Diode:* 'diodo emisor de luz') que se encienden para dibujar las cifras desde el 0 hasta el 9 (podemos ver cómo se ilumina el 4 – Figura1).
A cada LED corresponde un interruptor con el mismo número del LED. Un alumno, al pasar por los interruptores apaga todos los LEDs. Un segundo alumno pulsa todos los interruptores pares, cuyas luces quedan

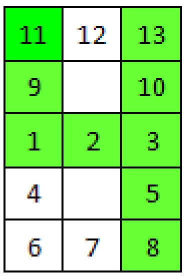


Figura 1

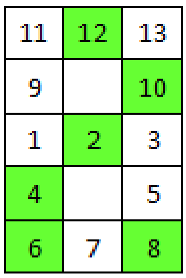


Figura 2

encendidas (tal como se ve en la figura 2, no se aprecia ninguna cifra). Igualmente, un tercer alumno pasa y pulsa todos los interruptores múltiplos de 3, encendiendo los LEDs apagados y apagando los encendidos. Así continúan pasando hasta un total de 13 alumnos y cada uno pulsa los interruptores múltiplos de su ordinal. Después de que pase el decimotercero, **¿qué cifra es la que dibujan los LEDs encendidos?**

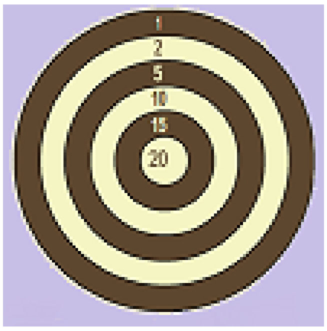
El segundo está tomado del libro "Pitagoras si diverte. 77 giochi matematici", a cargo de Gilles Cohen y editado por Bruno Mondadari:

Las cifras

Un número de dos cifras multiplicado por el producto de sus cifras da como resultado 336. ¿De qué número se trata?

Y el tercero, tomado de la sección "El problema de este número" a cargo de José Paulo Viana, de la revista portuguesa "Educaçao e Matemática" (nº 119, de septiembre/octubre de 2012), nos indica lo siguiente:

Tiro al blanco



En el Gran Concurso de Tiro de Torres Nuevas, cada concursante disparaba cinco veces. Acertar en el centro daba derecho a 20 puntos, mientras que las restantes zonas del blanco valían 15, 10, 5, 2 y 1.
Las cuatro mejor clasificadas quedaron empatadas con 61 puntos. Por casualidad, sabemos que:
El último tiro de Marcia valió 15 puntos.
Cuatro de los cinco tiros de Inés acertaron en la misma zona del blanco.
Ninguna de ellas falló un tiro, excepto Sofía que falló el blanco en el primer disparo.
El primero y el último tiro de Carolina fueron en el centro.
Por suerte, fue posible ordenar a las cuatro tiradoras aplicando una norma del reglamento que decía: «En caso de empate, tiene ventaja quien acertara más veces en el centro.»
¿A quién fueron atribuidas las medallas de oro, plata y bronce?

Y rematamos con este último que tiene una curiosa historia. Llegó vía teléfono móvil a uno de nuestros amigos, Luis Ángel Blanco Fernández, asesor del Centro de Profesores del Norte de Tenerife y colaborador de nuestras tareas de resolución de problemas en el **Proyecto Newton**, con la indicación de ser un problema que había aparecido en una Oposición. Pero se indicaba expresamente que debería ser resuelto de manera comprensible para alumnos de Primaria y, a ser posible, de manera gráfica. Dice así:

Solteros y casados

En un pueblo, los 2/3 de los hombres están casados con los 3/5 de las mujeres. Sabiendo que no hay nadie casado fuera del pueblo, **¿qué fracción de personas está soltera?**

Desde luego, el problema es políticamente incorrecto. Su redacción debe ser de la época preconstitucional. Supone que todos los matrimonios son heterosexuales y que no existe el divorcio la separación, la viudedad y las segundas nupcias. Pero es válido para su resolución matemática y, sobre todo, para un debate en la clase sobre las circunstancias anteriormente señaladas.

Este problema presenta una seria dificultad para los alumnos debido al mal aprendizaje de las fracciones, los ejercicios descontextualizados que aparecen en los libros de texto y la abundancia de problemas mal contextualizados que no incluyen nunca referentes distintos para las fracciones involucradas.

Resolución algebraica:

Datos: Hay H hombres y M mujeres

Objetivo: ¿Qué fracción de personas está soltera?

Relación: Los 2/3 de H están casados con los 3/5 de M

No hay nadie casado fuera del pueblo.

Diagrama: Utilizaremos como herramienta lógica el lenguaje algebraico.

La ESTRATEGIA a utilizar es la ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN

Plantearemos:

Habitantes del pueblo: $M + H$

Casados: $\frac{2}{3}H + \frac{3}{5}M$

Solteros: $\frac{1}{3}H + \frac{2}{5}M$ luego $\frac{2}{3}H = \frac{3}{5}M$, de donde $H = \frac{9}{10}M$

La fracción pedida es:

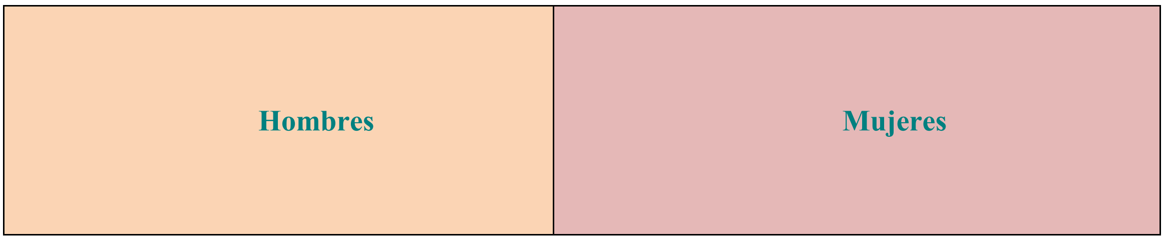
$$F = \frac{solteros}{habitantes} = \frac{\frac{1}{3}H + \frac{2}{5}M}{M+H} = \frac{5H+6M}{15(M+H)} = \frac{\frac{9}{2}M + 6M}{15\left(M + \frac{9}{10}M\right)} = \frac{\frac{21}{2}M}{15\left(\frac{19}{10}M\right)} = \frac{21}{67} = \frac{7}{19}$$

Solución:

Los habitantes solteros del pueblo suponen un **7/19** del total de habitantes.

Resolución gráfica:

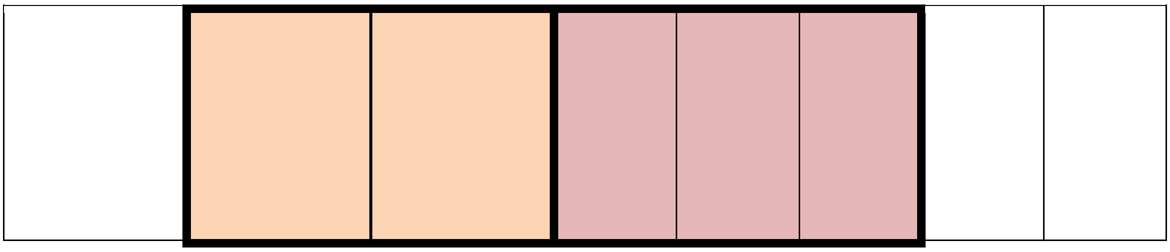
Representaremos la situación en un diagrama PARTES/TODO, muy adecuado cuando se trabaja con fracciones.



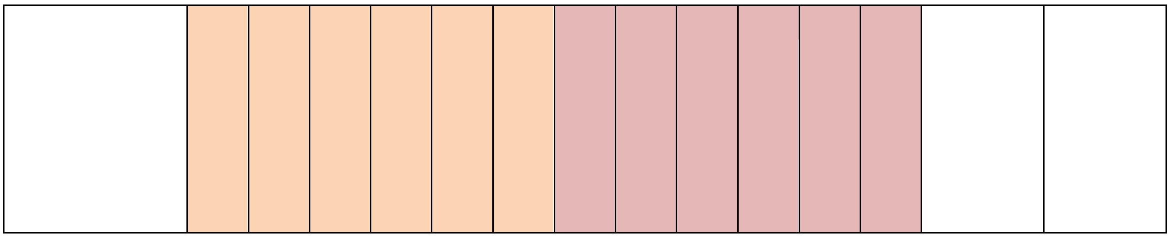
(Nota: Aunque parezcan las dos partes iguales, son diferentes; ligeramente superior la de las mujeres. Para que no resulte confuso deberá dibujarse sobre un papel cuadriculado.)

Ahora representaremos solamente los hombres y mujeres casados, modificando las dimensiones de los rectángulos de tal manera que la superficie que representa los hombres casados sea la misma que la de los rectángulos que representan a la fracción de mujeres casadas:

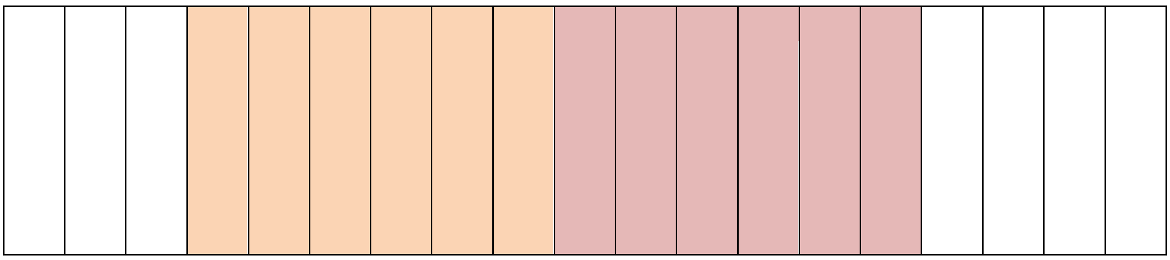
2/3 de los HOMBRES están casados   3/5 de las MUJERES están casadas



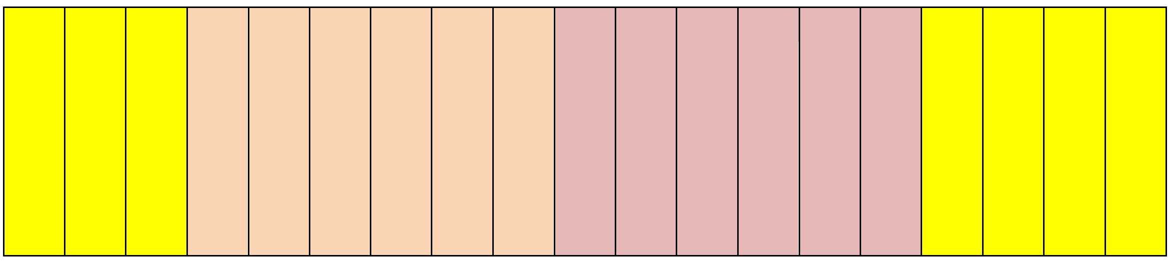
Al estar la superficie de los hombres casados dividida en dos y la de las mujeres casadas en tres, tenemos un m.c.m. de seis. Las partes de hombres casados han de subdividirse en tercios y las partes de mujeres casadas en medios para poder operar con ellos, obteniéndose así fracciones que pueden sumarse, es decir, con un denominador común.



Pero lo que se haga con los casados ha de hacerse también con los solteros, siendo así que tenemos 19 partes en el total de habitantes del pueblo.



Lo que nos interesa es contabilizar la fracción de habitantes solteros: 3/19 + 4/19 = 7/19.



Respuesta:

Los habitantes solteros del pueblo suponen un 7 / 19 del total de habitantes.

Se nos ocurre una versión políticamente correcta, cambiando el contexto:

Tornillos y tuercas

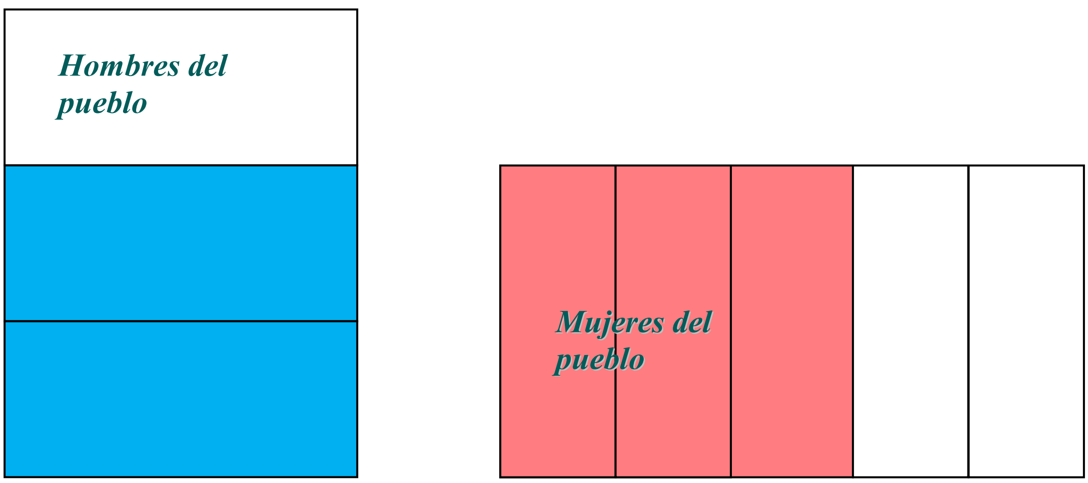
> Tenemos dos cajas con tornillería. En una hay tornillos de diferentes tipos y, en la otra, tuercas también diferentes. Hemos intentado unir cada tornillo con una tuerca adecuada y lo hemos conseguido con los 2/3 de los tornillos y los 3/5 de las tuercas. Sabiendo que no quedó ninguna posibilidad de encajar los tornillos y tuercas restantes, **¿qué fracción de tornillería está desemparejada?**

Ahora es políticamente correcta, pero… ¿no suena un tanto raro? Aunque se presta a otras consideraciones tales como que partiendo de una cantidad total de tornillos y tuercas, digamos 114: ¿cuántos tipos de tornillos diferentes hay como mínimo? ¿Y como máximo? Similares cuestiones con las tuercas. Ampliando de esta manera el problema, se abren nuevas líneas de investigación.

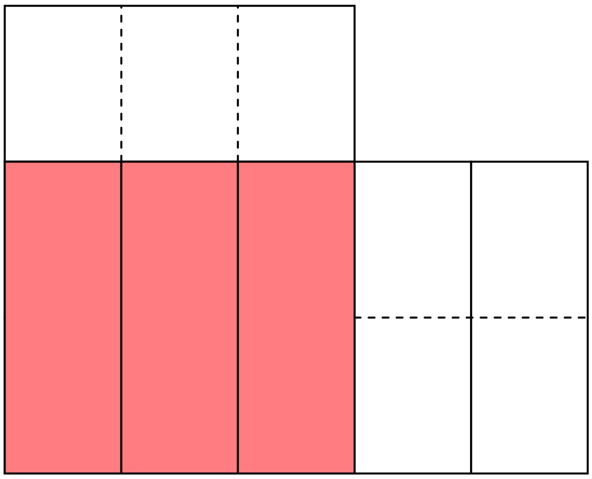
Cuando le dimos nuestra solución al amigo Luis, éste nos contestó rápidamente. Veamos sus indicaciones.

Estuve estudiando la solución al problema de solteros y casados. La solución algebraica es la misma que obtuve yo. En cuanto a la solución partes/todo, aunque es correcta da lugar a cierta confusión. El diagrama PARTES/TODO en un principio despista un poco en la medida que parece suponer que en el pueblo hay igual número de Hombres que de Mujeres al hacer las dos partes aparentemente iguales.

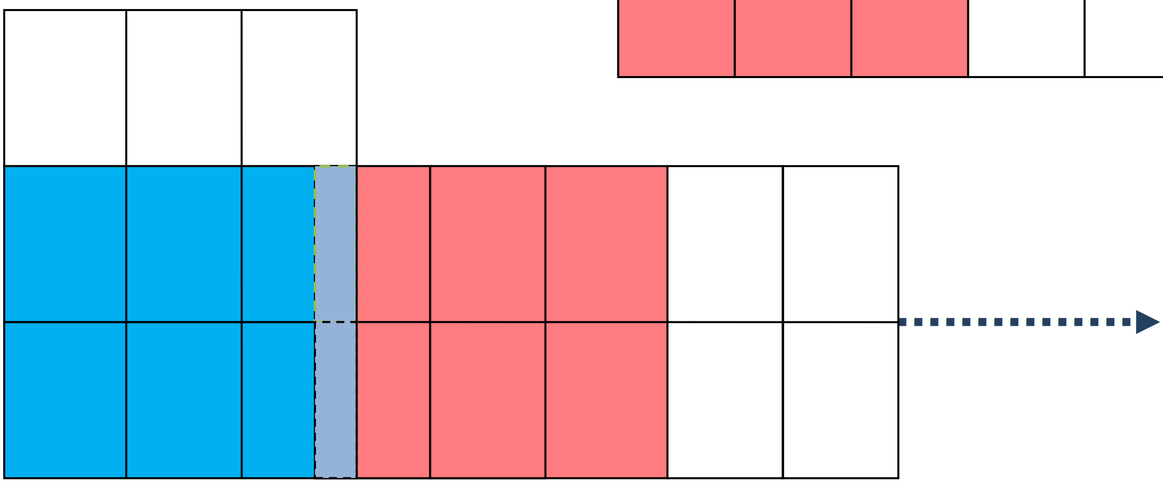
Yo lo hice de otra manera para evitar dicha confusión. Es simplemente otra forma de enfocar la resolución gráfica teniendo en cuenta que no soy un experto en matemáticas pero que procuro hacerlo de la manera más sencilla para que sea comprensible por alumnado de primaria. Represento las fracciones correspondientes teniendo en cuenta la relación de igualdad no de hombres y mujeres del pueblo sino la de hombres y mujeres CASADOS. Así evitamos la confusión de que en el pueblo parezca que hay el mismo número de hombres y mujeres.



Solapamos los hombres y las mujeres casados y prolongamos las divisiones para obtener partes iguales,



Y por último desagrupamos sabiendo que la parte no coloreada representa la fracción de personas solteras en el pueblo es decir 7/19



Maravilloso, ¿no?

Y quedamos así, como siempre, hasta el próximo artículo. Pero seguimos insistiendo: hagan como Luis Blanco, resuelvan los problemas, utilícenlos con los alumnos y, sobre todo, aporten sus comentarios a la revista, sus soluciones e, incluso, nuevas propuestas. O, simplemente, cuéntennos lo sucedido en el transcurso de la clase en que probaron el problema. Eso nos alegraría mucho y también al resto de lectores. Vamos, anímense…

Nos vemos en el próximo NÚMEROS Revista de Didáctica de las Matemáticas

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**