Rev. Acad. Canar. Cienc., XVI (Núms. 1-2), 175-203 (2004) (publicado en julio de 2005)

LA ERGODICIDAD

Nácere Hayek. Universidad de La Laguna

Abstract
The aim of this work is to spread the essentials of the ergodicity theory. In this respect, its origin, scientific concepts and related physical laws along with its evolution up to its current interpretation, are exposed.

Resumen
El tema de la ergodicidad desde un punto de vista divulgativo, es tratado. Los orígenes de la teoría ergódica, los conceptos científicos y leyes físicas básicas conexionadas, así como la evolución de la teoría hacia su interpretación actual, son expuestos.

1. Introducción: Orígenes, historia y preliminares de la ergodicidad

En este trabajo se expone una panorámica ilustrativa, lo más amplia posible, del complicado tema de la **ergodicidad**. No va dirigido especialmente a especialistas y quizás (salvo algunos puntos, en particular el parágrafo **5**) para los lectores científicos les sea suficiente alguna base matemática del análisis y una idea del esquema elemental de la física moderna. Confiamos en que sea útil en general, para quienes sientan curiosidad en conocer los fundamentos de esta interesante área científica. Anteponemos acto seguido, un sucinto resumen histórico de conceptos básicos conexionados, así como de los orígenes del término y de la problemática de su desarrollo.

La termodinámica representa una parte de la física que se ocupa de los principios generales que rigen la evolución de sistemas macroscópicos formados por gran número de moléculas. Trata el estudio de la energía, y de su transformación en manifestaciones diversas, como el calor, y de su capacidad para producir trabajo. Se encuentra en íntima conexión con la mecánica estadística clásica, de la que se pueden derivar numerosas relaciones termodinámicas. Si bien la termodinámica estudia los sistemas físicos a nivel macroscópico, la mecánica estadística en cambio, se propuso hacer una descripción en términos de los componentes microscópicos (átomos o moléculas) de esos sistemas. Hay que tener en cuenta que los fundamentos de aquella termodinámica clásica y los de la posterior termodinámica estadística son esencialmente diferentes: la primera, es de índole fenomenológica, mientras que la segunda representa un formalismo que procede de la mecánica. Sería luego un objetivo esencial de la teoría ergódica acudir a la mecánica

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

estadística (cuya característica fue el uso de conjuntos), para determinar las condiciones según las cuales los métodos estadístico-mecánicos se pudiesen utilizar para describir sistemas dinámicos.

Las bases de la termodinámica clásica vienen constituidas por sus dos leyes fundamentales, las cuales permiten describir la mayor parte de los sistemas[1] en la muy extensa área de la física[2]. La termodinámica clásica se ha ocupado principalmente del estudio de los sistemas cerrados. La desaparición de esta limitación, ha sido un aspecto sobresaliente del desarrollo posterior de la termodinámica, habiéndose podido generalizar sus métodos a los sistemas abiertos. La primera de las leyes de la termodinámica postula la conservación de la energía en todos los sistemas; el aumento de energía dentro de un sistema es igual a la energía que recibe. La segunda de dichas leyes afirma que un sistema aislado evoluciona espontáneamente hacia un estado de equilibrio que corresponde a una *entropía* máxima, lo que equivale a decir, al mayor desorden. Así, el concepto de entropía que aparece como aditamento de esta segunda ley, representa la tendencia inexorable del universo y de todo sistema aislado que haya en él, a encaminarse a un estado de desorden creciente. Es de interés resaltar que la segunda ley se convirtió muy pronto en uno de los acontecimientos más importantes y controvertidos de la termodinámica, y la entropía se llegó a considerar el puente entre la termodinámica clásica y la termodinámica estadística.

---

[1] Conviene referirnos a "sistemas", ya que las leyes formuladas son de validez general. Recordemos algunas definiciones: Un sistema es un conjunto de materia orgánica o inorgánica, circundada por una pared o frontera (real o imaginaria). En general, un sistema macroscópico (formado por un gran número de moléculas) está acoplado a su entorno (o mundo externo) por fuerzas que actúan sobre su interior. Se denomina sistema aislado, aquel cuyas interacciones con el entorno son tales que no existe intercambio de materia ni de energía con el mundo externo. Un sistema cerrado es aquel que sólo puede intercambiar energía (pero no materia) con el mundo externo, y sistema abierto el que puede intercambiar energía y materia con el mundo externo. Los sistemas físicos que se encuentran en la naturaleza son conjuntos muy grandes de átomos: un ejemplo de sistema abierto es el cuerpo humano; la tierra, que recibe energía de la radiación solar, representa un sistema cerrado.

[2] En la naturaleza, la materia se encuentra en uno de los siguientes tres estados: sólido, líquido o gaseoso. En los sólidos, las posiciones relativas (distancia y orientación) de los átomos o moléculas son fijas. En los líquidos, las distancias entre las moléculas son fijas, pero su orientación relativa cambia continuamente. En los gases, las distancias entre moléculas son, en general, mucho más grandes que las dimensiones de las mismas. Las fuerzas entre las moléculas son muy débiles y se manifiestan principalmente en el momento en el que chocan; por esta razón, los gases son más fáciles de describir que los sólidos y que los líquidos. Pondérese que el gas que estuviese contenido en un recipiente, se encuentra formado por un número muy grande de moléculas. Por ello, cuando se intenta analizar un sistema con un número tan grande de moléculas resulta inútil (por no decir imposible) describir el movimiento individual de cada molécula, y en consecuencia, lo que se mide son magnitudes que se refieren al conjunto: volumen ocupado por una masa de gas, presión que ejerce el gas sobre las paredes del recipiente, así como su temperatura. Estas magnitudes físicas se denominan macroscópicas, en el sentido de que no se refieren al movimiento individual de cada partícula, sino al del sistema en su conjunto.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

A medida que la termodinámica evolucionaba, James Clerk Maxwell (1831-1879) y Ludwig Boltzmann (1844-1906) desarrollaron la teoría de la dinámica molecular, que describe cómo las moléculas de un gas perfecto se desplazan, golpeándose unas con otras, de modo semejante a unas bolas de billar, y arremetiendo contra la superficie que contiene al gas. Al comienzo de 1860, Maxwell logró establecer las propiedades de un gas a partir de la difusión estadística de las velocidades moleculares dentro del mismo gas. El método estadístico utilizado sería luego reconocido como un hito filosófico [3]. En la década de los 1870, Maxwell y otros (Kelvin, ...) parecieron haber entendido que la segunda ley no podía ser formalmente deducida de la física microscópica. En respuesta a objeciones concernientes a la reversibilidad, Boltzmann asumió luego que en un gas aparece un mayor número de estados aparentemente más aleatorios que ordenados, y esto le condujo más tarde a argumentar que la entropía debía ser proporcional al logaritmo del número de estados posibles del sistema. La denominada "entropía estadística" se originó justamente cuando Boltzmann ideó una formulación probabilista de la entropía, ampliando el método estadístico de Maxwell para llegar a una interpretación mas general de la entropía[4] concibiéndola como una medida de la cantidad de azar presente en un sistema cerrado. Boltzmann pudo demostrar que la entropía se define en términos de la evolución de una población de moléculas, calculando la entropía en la forma

$$S = k. \log_e W \qquad (1)$$

donde k es una constante universal (a la que se daría el nombre de constante de Boltzmann = $3{,}2983 \times 10^{24}$ ... cal/º C) y W el número de maneras en que el

---

[3] Fue trascendental que el método sustentara que las leyes de la termodinámica resultaran ser más bien generalizaciones estadísticas que principios en sentido absoluto.

[4] El creador del concepto de entropía fue el físico alemán Rudolf Clausius (1822-1888). Su principio de crecimiento de la entropía, se sustentó en una distinción clara entre procesos reversibles e irreversibles, según se clasifican tradicionalmente los fenómenos. En un proceso reversible, si un sistema experimenta un cambio, puede regresar termodinámicamente, al punto exacto donde comenzó. Ejemplos simples son, el gradual estiramiento y contracción de un resorte o cualquier cambio que se produzca al alterar la disposición de unos naipes cuando se baraja. Los procesos irreversibles, por contra, se mueven en una sola dirección, y termodinámicamente no se pueden reconstituir; por ejemplo, el estado de una vajilla que se ha roto en mil pedazos y es irrecomponible, o la restitución de la vida humana a una etapa anterior. En general, los procesos reversibles suelen ser suaves y no experimentan movimientos bruscos ni violentos. Con los irreversibles ocurre al revés; vienen siempre acompañados de un creciente desorden, al que los científicos les gusta identificar por entropía, al decir, cuando se descompone un sistema, que el desorden (o entropía) del mismo aumenta. Desde una óptica más actual, según escribe Ilya Prigogine (véase N.K. Hayles, La evolución del caos, Ed. Gedisa, Barcelona, 1993, pág 23): "Sería difícil aceptar una visión del mundo que excluyera una categoría de fenómenos en favor de la otra...y el problema estriba en apreciar la importancia que se atribuya a cada una de las categorías... Hoy, los procesos reversibles y deterministas (médula de la descriptiva clásica) se nos evidencian como idealizaciones desmesuradas. Lo artificial es hoy determinista y reversible. Lo natural contiene elementos esenciales de azar e irreversibilidad.
La gran idea del método de Boltzmann fue la de expresar la entropía en términos de una probabilidad.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

sistema debía ser ordenado para producir un estado especificado. La fórmula anterior es sin duda, una de las de mayor importancia de la física teórica. En los sistemas aislados, la entropía aumenta porque aumenta la probabilidad. En el equilibrio termodinámico, se alcanza un desorden completo, siendo máxima la probabilidad.
A tenor del trabajo que desarrolló Boltzmann con Maxwell para la teoría cinética de gases, las dificultades en la comprensión de la irreversibilidad sobresalieron claramente en la concepción clásica del primero, quien consideró a la entropía como la cantidad básica que, conforme a la segunda ley de la termodinámica, aumenta en los sistemas aislados como resultado de procesos irreversibles. El problema, esencialmente de índole física, se refiere a que la irreversibilidad del comportamiento termodinámico de un sistema macroscópico (crecimiento de la entropía para un sistema aislado) choca con la reversibilidad del comportamiento dinámico del mismo sistema (por la invariancia respecto a la inversibilidad del tiempo – como será confirmado mas adelante – de las ecuaciones que gobiernan el movimiento de los sistemas aislados)[5] . Ello condujo a controversias, que propulsaron desde entonces a la noción de ergodicidad.

Es ocasión de anticipar que la ergodicidad proporciona un medio de estudiar el comportamiento estadístico de un sistema dinámico, cuando este sistema evoluciona conforme a las leyes de la probabilidad. La versión simple de la teoría ergódica como rama de la matemática se concreta en el estudio de transformaciones que conservan la medida[6] en espacios que son llamados "de probabilidad"; y como en su más amplia interpretación, esa teoría representa el estudio de las propiedades cualitativas de acciones de grupos sobre espacios, conviene antes de seguir la exposición, recordar algunos conceptos elementales sobre transformaciones.

Téngase presente que si deseamos estudiar un conjunto o espacio cualquiera M que no posea estructura alguna, es claro que de antemano estaríamos condenados a una tarea banal. Para analizar matemáticamente un sistema, es preciso dotar al espacio M de alguna estructura (por ejemplo, topología, estructura diferenciable, espacio de medida) y quizás ciertas restricciones suplementarias, con el fin de obtener alguna información.
Consideremos en principio un sistema dinámico, imaginándolo como una transformación T de un conjunto en sí mismo, y en el que cada punto x del

---

5 Todo esto se produjo al querer ajustarse los físicos a una teoría puramente dinámica, con unas hipótesis preferentemente dinámicas (mas bien que estadísticas), en la que se requería que hechos termodinámicos pudieran ser cumplidos(I.E. Farquhar, Ergodic Theory in Statistical Mechanics, Interscience Publishers of J.Wiley, London, 1964)

6 Una medida sobre un espacio matemático es un modo de asignar pesos a partes diferentes del espacio; el volumen es una medida sobre el espacio euclídeo ordinario tridimensional.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

conjunto nos indica cierto *estado* o configuración del sistema. La colección de todos los estados del sistema constituye un espacio M, y la transformación T señala, a partir de un estado x en el tiempo 0, cual será el estado en el siguiente intervalo 1 de tiempo, esto es, T(x). Así, $T^2(x)= T(T(x))$ nos indica el estado en que nos encontraremos dos unidades de tiempo después. El conjunto de los puntos que se obtienen al aplicar reiteradamente la transformación a ese punto, recibe el nombre de **órbita** o trayectoria del punto x, dada por $\{x, T(x), T^2(x), \ldots\}$. Es posible que al estudiar las órbitas de un determinado sistema dinámico, exista cierto p de M tal que T(p)= p. A este tipo de puntos se les llama puntos fijos. Puede que ocurriera también que $p \neq T(p)$, $T^2(p) \neq p$, , ..., $T^{k-1}(p) \neq p$, y sin embargo $T^k(p) = p$, en cuyo caso p es un punto periódico de período p [7]. Si se prefiere una variable continua para el tiempo, cabe considerar una familia uniparamétrica $\{T_t: t \in R\}$ de aplicaciones de M en sí mismo. Y cuando las leyes que gobiernan el comportamiento del sistema no cambian con el tiempo, la **órbita** o transformación $\{T_t: t \in R\}$ que representa la evolución del sistema (es decir, cuando x es un punto en el espacio de estado representativo del sistema en el tiempo t_0 , T_t x denota el punto de dicho espacio en el tiempo $t+t_0$) es una transformación del espacio [8] tal que $T_0 = 1$ y $T_{t+s} = T_t$ o T_s. En otras palabras, $t \rightarrow T_t$ es una acción del grupo R sobre el espacio de estado M, o bien, T_t $(t \in R)$ es un **flujo (flow)**; más concretamente, la teoría se enfoca a entes matemáticos llamados sistemas dinámicos abstractos o flujos que preservan medidas.

La ergodicidad aparece en el estudio de grupos uniparamétricos de estas transformaciones denominadas flujos. En general, conforme a la estructura que se haya introducido sobre el espacio que se considere y, por consiguiente, sobre las transformaciones, el espacio podría ser, por ejemplo, una variedad regular o analítica, o un espacio métrico compacto. En contraste con un sistema determinista, un sistema ergódico es independiente de su posición inicial. Además es indicativo de reversibilidad.

La **ergodicidad** se remonta a los primeros tiempos de la mecánica estadística[9]. La mecánica estadística es una rama de la física matemática que se propone deducir el comportamiento macroscópico de sistemas de gran número de

---

[7] Ejemplo: M = R y $T: R \rightarrow R$, es T(x)= - x . El punto x=0 es un punto fijo, y si x es distinto de cero, entonces x es un punto de período 2 ($T^2(x) = x$).

[8] En el caso uniparamétrico puede asumirse que T es una transformación que *preserva la medida* para todo $t \in R$, la aplicación $(x,t) \rightarrow T_t$ x medible de X x R a X, T_0 es la identidad, y $T_{s+t} = T_s T_t$ para todo $s,t \in R$.

[9] Durante la primera mitad del siglo XX se hizo corriente el empleo del término mecánica clásica, para designar la rama de la física que fue denominada mecánica analítica, o simplemente mecánica. Fue el tema del movimiento de los cuerpos materiales de las primeras investigaciones físicas, lo que dió origen a la mecánica (o dinámica) analítica.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

partículas, desde la física microscópica que describen las partículas interactuantes. Entre los padres fundadores de la mecánica estadística figuran los antes citados Boltzmann y Maxwell, quienes propulsaron un concepto de *conjunto* (que consolidaría mas tarde Gibbs, como luego veremos) para describir sistemas macroscópicos de equilibrio y no-equilibrio. Precisamente, intentando justificar el uso de esos conjuntos y para determinar si los mismos evolucionaban como se esperaba desde el no-equilibrio al equilibrio, se introdujeron varias nociones como *ergodicidad, mixing, spectrum, entropía, coarse training,* ..., acudiendo a la teoría métrica de sistemas dinámicos para describir el comportamiento de la mayor parte de las órbitas.

La palabra *ergódica* fue introducida por Boltzmann[10] en la teoría de las partículas de gas y proviene de la yuxtaposición de dos vocablos griegos: *ergon* (trabajo, que aquí debiera ser entendido como "energía") y *odos* (camino). En esa época Boltzmann, así como también Maxwell, estudiaban la teoría cinética de los gases a partir de un sistema dinámico (un flujo) en la que, en particular el primero, creía que las órbitas típicas de dicho sistema dinámico "llenaban completamente" las superficies de energía constante. Boltzmann quiso describir una hipótesis acerca de la acción de la órbita $\{T_t(x)|\ t\in R\}$ sobre una superficie de energía $H^{-1}(e)$ cuando el hamiltoniano H es del tipo que se origina en mecánica estadística[11]. Para su descripción esperaba que cada órbita $\{T_t(x)|t\in R\}$equivaldría a la superficie de energía entera $H^{-1}(e)$ y llamó a este planteamiento <u>hipótesis ergódica</u> [12]. De esta manera, la mecánica estadística de los sistemas de partículas debida a Maxwell y Boltzmann, comenzó a desarrollarse dentro de un contexto más general, que acto seguido esbozaremos.

Tras la introducción del término ergódico por Boltzmann, Maxwell constató dicho término de la siguiente manera: "La única hipótesis necesaria para una prueba directa - [de la solución general del problema del equilibrio de la energía cinética entre un número finito de puntos materiales] – es que el sistema, si permanece en su estado actual de movimiento, pasará, más pronto o más tarde, a través de cada punto fase compatible con su energía total"[13]. Quería expresar así que "sólo una trayectoria pasa a través de cualquier punto

---

[10] L. Boltzmann, J. Reine Angew Math. **100**, 201 (1887).

[11] Debido a que este hamiltoniano H es constante (como se verá más tarde en el estudio de sistemas hamiltonianos) a lo largo de las curvas solución de las correspondientes ecuaciones, cada superficie de energía $H^{-1}(e)$ es invariante para la transformación T_t, de modo que se obtiene una acción de R sobre cada superficie de energía.

[12] Una explicación de la irreversibilidad sustentada en una idea de Boltzmann fue conocida como *hipótesis ergódica.* Data de 1871 y estuvo basada en la evolución temporal de un sistema complejo de partículas. La idea era que el sistema debería realizar en el transcurso del tiempo, todas las configuraciones posibles (de velocidades y posiciones de las partículas) desde el punto de vista energético.

[13] Debe interpretarse que "fase" significa <u>estado dinámico</u> y que la hipótesis ergódica "original" da a entender que si $\underline{y}$ y $\underline{x}$ son dos puntos cualesquiera sobre la superficie de energía S_E, entonces $y=\varphi_t(x)$ para algún t.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

en el espacio de fases, de modo que si el sistema es ergódico la superficie de energía apropiada consiste en una única trayectoria".

El hecho de postular el comportamiento de las trayectorias de los sistemas físicos del modo señalado, condujo al siguiente planteamiento clásicode la "hipótesis ergódica": Al ser necesario y de gran importancia en mecánica estadística, considerar la media a largo plazo $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(T_k x)$ de un gran número N de observaciones sucesivas (para toda función f integrable con medida μ en el espacio M), "el límite (para $N\to\infty$) de la expresión anterior (el cual se presupone sería cierta función f*), ha de coincidir con el promedio de espacio dado por la integral $\int_M f\, d\mu$ ". A principios de 1900 el físico norteamericano J.W. Gibbs (1839-1903)[14], consideró que los observables (se llamaron *observables* a las funciones φ: $M\to R$, cuyos valores reales son, p. ej., temperatura y presión) podían probar a partir de la "hipótesis ergódica", que las medias temporales coincidían con el promedio en el espacio [15]. Una vez que los físicos intentaron aferrarse a esta conclusión (errónea y desafortunada), se le ocurrió a los matemáticos analizar la cuestión de la existencia de estas medias (o promedios), ponderando su convergencia, o sea, la de saber si existía, en algún sentido, aquel límite (para $N\to\infty$), en cuyo caso representaría una cierta función f*(x), que habría de igualar "casi por todas partes" al promedio de espacio $\int_M f\, d\mu$, es decir: $f^*(x) = \int_M f\, d\mu$.

En principio, se creyó que lo dicho fuera la razón para propugnar que un teorema ergódico que expresara como condición necesaria y suficiente, la igualdad de medias temporales y de fases, tendría que seguir a la hipótesis ergódica[16]. Sin embargo, esto no fue así, ya que la conjetura de Boltzmann que

---

14 Gibbs afirmaría incluso que la entropía (para sistemas cerrados) representa una propiedad de estado solamente, y que siempre aumentaba; si bien, en sus trabajos recientes de física I. Prigogine rechaza la interpretación subjetiva formulada por Gibbs y afirma haber hallado una fundamentación objetiva de la irreversibilidad temporal.

15 En el caso de existir f*(x), podría ser interpretado como un equilibrio o valor central de la variable física f, de forma que coincidiese con su media con peso, sobre todos los estados posibles del sistema (Véase K. Petersen, "Ergodic Theory", Cambridge Univ. Press, 1983, pág 3).

Para mayor claridad, anticipamos que, por definición, una transformación f: $M\to M$ medible con medida μ de f, sería llamada ergódica, si el sistema (f,μ) satisface la hipótesis ergódica, esto es, si las medias temporales coinciden con las medias espaciales, para toda función integrable en μ-casi todo punto $x\in M$. [Téngase en cuenta que una propiedad es válida para **casi todo punto**, o dicho de otro modo, **casi por todas partes,** si el conjunto donde dicha propiedad no es válida tiene medida cero (**μ-casi todo punto,** da a entender " casi todo punto respecto de μ ")].

16 Como se sabía que ni las funciones fases ni los valores previstos, podían representar por sí mismos, los resultados de las medidas termodinámicas efectuadas sobre un sistema macroscópico, el problema consistía en determinar cómo aquellas funciones y valores podrían proporcionar caracterizaciones adecuadas de los observables termodinámicos. Al ser imposible conocer el estado dinámico de un sistema macroscópico (ni incluso discernir acerca de su número de partículas) en cualquier instante, resultaba ya impracticable una evaluación de las cantidades de tiempo. No obstante, se pensó que si se pudieran hallar las condiciones para que el promedio de tiempo fuese

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

preveía que cada órbita "cubre completamente" el espacio fase (en su caso, una superficie de energía constante), no tardaría mucho en adivinarse que era un supuesto topológicamente imposible [17]. En consecuencia, esa hipótesis hubo de ser sustituida por otra denominada hipótesis cuasiergódica[18] que formularía que "cada órbita (o trayectoria) es densa (en lenguaje de la teoría de conjuntos) en cada superficie de energía constante", lo cual involucraba cierto concepto de *minimalidad*. No obstante, a pesar de los muchos intentos que se hicieron, esta hipótesis más débil no llegó a ser suficiente para que implicara la igualdad de medias de espacio y medias de tiempo [19]. Se tuvo que esperar hasta el año 1927 en que sería demostrado por G.D. Birkhoff (1884-1944) que la cuasiergodicidad tenía que ser reemplazada por una nueva versión, representada por cierta apropiada hipótesis de transitividad métrica. Y puesto que la más básica de las condiciones necesarias y suficientes para la igualdad de las medias de espacio y las medias de tiempo señalaba a la de una transitividad métrica[20], se consideró entonces que esta propiedad asumiera el papel de definición de

---

igual al valor medio de la función fase (o al valor previsto calculado sobre cierto *conjunto estacionario*), entonces, siempre que estas condiciones fuesen satisfechas por el sistema macroscópico en cuestión, este promedio de conjunto podría ser tomado como un valor teóricamente determinado del observable termodinámico. De esa manera, quedaba justificado que el promedio de conjunto podría evaluar sin dificultad la comparación de valores teóricos con los experimentales, haciendo factible que las medias de conjunto fuesen consideradas como representación de valores experimentales (este promedio de conjunto que volveremos a tratar más adelante, representa sin embargo, el valor del observable que se obtiene cuando el sistema se encuentra en equilibrio termodinámico). Hay que dejar sentado, por último, que para los matemáticos puros, es la existencia de promedios de tiempo lo que constituye realmente el teorema ergódico, ya que, en cambio, para los físicos, el teorema ergódico debe expresar la equivalencia de promedios de tiempo y promedios de conjunto (debido a que, en mecánica cuántica, la existencia de medias de tiempo es un problema trivial, siendo su mayor obstáculo la determinación de condiciones para que dichas medias puedan ser reemplazadas por medias de conjunto) (Farquhar, **ibíd,** cap. 2, págs. 14-17).

[17] A. Rosenthal y M. Plancherel probaron en 1913, que la hipótesis ergódica al representar una conjetura que prevé que el promedio de tiempo de una función fase tomado a lo largo de una sola trayectoria y el promedio de fases de aquella, han de ser iguales, es *falsa*, si sucede que S_E tiene dimensionalidad mayor que uno. La falsedad de la hipótesis antes formulada, se basa en que la propiedad que el flujo necesita cumplir para la igualdad de medias temporales y medias espaciales, era precisamente lo que ahora se llama ergodicidad (P. Walters, "An Introduction to Ergodic Theory", Springer-Verlag, 1982); dicho de otra manera, para un flujo la referida igualdad sólo vale cuando la acción es μ-ergódica, lo que condujo precisamente a la definición de una acción ergódica.

[18] P. and T. Ehrenfest, "The conceptual foundations of the statistical approach in Mechanics", Cornell Univ. Press, Ithaca (1959). Esta nueva hipótesis reemplazaría "cada fase" del planteamiento de Maxwell por "cada región R sobre S_E de área finita", con la ulterior calificación de ser esto cierto para *casi todos* los sistemas dinámicos". De cualquier forma y en realidad, nunca fue probado que la cuasiergodicidad bastaba para resolver el problema ergódico.

[19] Esto se desprendía del hecho (probado por Markov) de que un sistema mínimo no requiere solamente ser ergódico (Nemytskii y Stepanov, 1960). Véase K. Petersen, **ibíd.,** pp. 41 y sigs., para detalles.

[20] Para sistemas métricamente transitivos, la igualdad de medias de tiempo y de fase, sería bien establecida, ya que la ergodicidad resulta ser equivalente a la superficie de energía "métricamente transitiva".

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

ergodicidad [21]. Hay que advertir además, que a menudo el término de "transitividad métrica", se intercambia con el de "indescomponibilidad métrica" (que se aplica a una parte V del espacio de fases invariante y de medida finita, si V no puede subdividirse en dos partes invariantes de medida positiva)[22] . Las anteriores elucubraciones, supuestos y discusiones fueron lo que realmente dio lugar al nacimiento de la teoría ergódica.

Más en general, supongamos ahora que el espacio M que en un principio fue considerado, se tratase de un espacio dotado de topología. De ésta nos interesa entonces la noción de entornos o de conjuntos abiertos, porque es necesaria para poder hablar de convergencia de sucesiones y de funciones continuas. Habrán de surgir así preguntas como ¿donde se acumulan las órbitas? ¿son densas en el espacio? ¿convergen para $n \rightarrow \infty$? Y, claro está, si M presentara otra estructura, posiblemente los interrogantes serían distintos. Ahora bien, tres casos son importantes[23]: a) M es una variedad diferenciable y T un difeomorfismo: caso de dinámica diferenciable; b) M es un espacio topológico y T un homeomorfismo: caso de dinámica topológica; c) M es un espacio topológico medible y T es una transformación que *preserva* la medida: este es el **caso que nos ocupa**, es decir, si se dota al espacio M de una familia de conjuntos medibles y una medida, o sea, un espacio de medida, nos adentramos en el área de la *teoría ergódica*. Téngase en cuenta, no obstante, que los tres casos se solapan extensamente, y hasta un simple ejemplo puede ser contemplado desde diversos ángulos, y de hecho, algunos de los problemas más interesantes conciernen a conexiones entre los tres campos señalados.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

[21] Un sistema dinámico (M,μ) con una medida μ, es ergódico, si y solo si satisface la siguiente propiedad "cualquier subconjunto medible invariante A de M, necesariamente cumple $\mu(A)=0$ o $\mu(A)=1$" (es usual llamar a esta propiedad transitividad métrica). Para los físicos no es fácil verificar esto en la práctica. G. Sinai en 1963, fue capaz de probar (una versión simplificada de) la ergodicidad del sistema fundamental de más interés en mecánica estadística, el del gas de una esfera (hard sphere). Véase, J.L. Lebowitz and O. Penrose, "Modern Ergodic Theory", Physics Today, 1973.

[22] I.E. Farquhar, **ibíd.**, p. 61.

[23] Algunos conceptos incluidos en estos casos, se aclararán luego al definir el espacio de probabilidad.

2. Teoría ergódica

Como se acaba de decir, en la teoría ergódica se estudia el movimiento en un espacio de medida, representado por un espacio abstracto M, que habrá de ser el que denominaremos más adelante, espacio de fases de un sistema dinámico. Todos los sistemas físicos que se han de discutir, obedecen a la mecánica clásica; además, se encuentran confinados a una región finita del espacio y poseen un número finito de grados de libertad. La razón de restringirse generalmente a espacios finitos, radica en el conocimiento escaso de las propiedades ergódicas de los sistemas infinitos; si bien, en lo relativo a cuestiones de irreversibilidad (y ecuaciones cinéticas), sólo puedan ser formuladas especialmente para sistemas infinitos.

Un artículo de Boltzmann publicado en 1872, incluye un notable resultado llamado "teorema H ", un teorema que dio la primera expresión probabilística explícita de la entropía de un gas ideal, y que es proporcional al funcional de Boltzmann[24]. El artículo consta de 87 páginas y contiene además la ecuación del transporte llamada "ecuación de Boltzmann".

Pondérese asimismo que muchos sistemas dinámicos *preservan la medida*, lo que significa que la imagen de un conjunto bajo la aplicación, siempre posee la misma medida que el espacio original. Ciertos conjuntos pueden ser invariantes, esto es, ser los mismos que sus imágenes. Un sistema dinámico *ergódico* es tal que, con respecto a alguna distribución de probabilidad, todos los conjuntos invariantes, o tienen medida 0 o tienen medida 1. Las distribuciones de probabilidad representan medidas, tales que la mayor medida de cualquier conjunto es 1 [25].

En la teoría ergódica, el espacio de estado y la medida de probabilidad son a menudo prefijados, y se investigan las propiedades ergódicas del sistema dinámico (M,μ,φ_t) en relación con varias elecciones del grupo φ_t . Por otra parte, en mecánica estadística, también se estudia, como luego veremos, la

---

[24] Cierta noción de "conjunto", que para R.H. Fowler (1936) estaba desprovista de lo que se entiende como realidad física en el planteamiento de Boltzmann, y que recibió después más atención por parte de R.C. Tolman (The Principles of Statistical Mechanics, Oxford Univ. Press, London, 1938) al reclamar su uso debido a las limitaciones de la medición física, llegaría a difundirse plenamente unos años más tarde. A pesar de que esto implicaba el manejo de un solo conjunto que representara a casi todos los conjuntos que se comportaban de forma similar e involucrara un problema de irreversibilidad, la cuestión se acometió recurriendo al teorema H, teorema que daba una expresión de la característica irreversibilidad de los sistemas macroscópicos en términos de una cantidad que es una análoga microscópicade la entropía generalizada negativa de un sistema termodinámico en no-equilibrio(Farquhar,**ibíd.**, p. 9).

[25] En teoría de la medida, en un espacio M una "distribución de probabilidad" se define como una función de medida μ normalizada tal que $\mu(M)= 1$, de modo que un acontecimiento o suceso puede ser considerado como un conjunto de medida en el espacio M y la probabilidad de un suceso E sería de medida $\mu(E)$ (Farquhar, **ibíd.**, pág. 56).

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

ergodicidad de un sistema dinámico respecto de algunas elecciones de medidas de probabilidad.

La igualdad del promedio de tiempo y el promedio de espacio dado por una integral, que tratamos con anterioridad al hablar de la introducción del término ergódico por Boltzmann y Maxwell, dio lugar a un trascendental resultado debido a Birkhoff, que sería la mayor contribución de la época (los 1930) en teoría ergódica y que fue generalmente conocido como *teorema* ergódico, el cual puede enunciarse así: "Sea T una transformación del espacio M que preserva una medida finita m y $f \in L^1(m)$. Si la media temporal de f en x dada por $\left[\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(T_i x)\right]$ converge casi por todas partes a una función $f^* \in L^1(m)$ (de existir el límite) y de igual forma $f^* \circ T = f^*$, entonces $\int f^*\, dm = \int f\, dm$ ". Hablando en términos amplios, esto lleva aparejado que el teorema implica que el promedio de tiempo de f en x, y el promedio de espacio definido por la integral $\int_M f(x)\, dm$, son iguales casi por todas partes para todo f integrable (Lebesgue), si y solo si T es ergódica[26]. Se evidenció así la importancia de verificar la ergodicidad de ciertas transformaciones que se originan en física.

La teoría desplegada a raíz de ese teorema de Birkhoff sería de enorme influencia en la dinámica misma, no sólo porque resolvía en principio uno de los fundamentales problemas que se originaron en la teoría de gases, sino porque también proporcionó resultados básicos de la teoría ergódica en la mecánica estadística clásica, en las teorías de la probabilidad y de grupos, y en el análisis funcional. En realidad, hubo un primer teorema ergódico en dinámica general que fue debido a J. von Neumann (1903-1957)[27], aunque su teorema no sería publicado hasta después de la aparición del teorema más fuerte de Birkhoff[28], a quien Neumann había comunicado ya su resultado. Si bien la convergencia de las medias (o promedios) de las sucesiones implicadas había sido ya probada para algunos casos especiales, se realizó un detenido análisis de aquella, y de este modo la convergencia general en media en el sentido (L^2), sería demostrada por von Neumann y la convergencia casi por todas partes por Birkhoff, ambos en 1931. Sus resultados son actualmente conocidos como **el teorema ergódico medio** y **el teorema ergódico (o teorema ergódico**

---

[26] En realidad, para el caso de un flujo uniparamétrico $\{T_t\}_{t\in R}$ de transformaciones que preservan una medida, asegura la igualdad citada de dichos promedios, si el flujo $\{T_t\}$ es ergódico y (M,***B***,m) representa un espacio de probabilidad (como se apreciará más adelante).

[27] Proc. Natl. Acad. Sci. U.S. **18**, 70, 263 (1932).

[28] Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. **17**, 656 (1931).

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

puntual), respectivamente[29]. El trascendental resultado que dio Birkhoff representa un teorema de *existencia*, que prueba “la existencia de medias de tiempo (infinito)”, y que se suele denotar por $<F(x_0)>$ (nótese que su valor puede depender de su estado inicial). Algunas generalizaciones y varias mejoras de tales resultados irían apareciendo de forma continuada desde 1932.
La investigación de las condiciones en virtud de las cuales es válida la igualdad de medias temporales y espaciales, así como también incluso conclusiones más fuertes, requirió un importante estudio de las llamadas *propiedades de recurrencia* (que involucran el comportamiento cualitativo de las órbitas) en la teoría ergódica. A veces se ha argumentado que no se puede tener una aproximación correcta al equilibrio para cualquier sistema mecánico finito, a causa de un teorema debido a H. Poincaré (1854-1912) que asegura que ”un tal sistema eventualmente regresa de forma arbitrariamente cercana a su estado inicial”[30]. En caso de que el espacio de estado del sistema dinámico sea compacto, se puede invocar directamente el teorema de Poincaré, al constatar que en cualquier entorno U de un punto cualquiera de ese espacio y en un tiempo arbitrario T a largo plazo, existe siempre un punto que retornará a U después de un tiempo T mayor que S “.
Una versión avanzada de la hipótesis ergódica de Boltzmann permite afirmar que “los sistemas hamiltonianos (restringidos a un conjunto nivel de energía) que modelan sistemas grandes de partículas interactuantes son ergódicos”, cuyas implicaciones y validez , de acuerdo con algunos autores, pueden ser discutidas. Asumimos que el mundo microscópico está gobernado por la mecánica hamiltoniana.

Desde otro punto de vista, en la teoría ergódica existen dos tipos interesantes de problemas. El primero concierne a problemas internos, donde intervienen las transformaciones que preservan una medida, para decidir cuando dos transformaciones son isomorfas. Una de las notables propiedades de las que gozan estas últimas transformaciones que preservan una medida es la de las antes citadas de *recurrencia*. Esa propiedad, entre otras, ayuda a comprender la manera en la cual una transformación que preserva la medida mueve puntos y conjuntos a través del espacio sobre el que actúa, y su ausencia o presencia proporciona una primera prueba de que un par de transformaciones sean isomorfas.

---

29 Ambos, von Neumann y Birkhoff, trataron cierta sucesión $X_n\left(P_{t_0} t_0\right) = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1} x_k(P_{t_0} t_0)$, para la cual Birkhoff establecía la existencia de una integral como límite de esa sucesión para $n \to \infty$, mientras von Neumann probaba el resultado más débil de que la sucesión converge en media.

30 Se dice que un punto x es recurrente, si su órbita regresa arbitrariamente próxima á x , cuando el tiempo t tiende a ∞ . A finales del siglo XIX, H. Poincaré afirmaría que “casi todo punto es recurrente, respecto de cualquier medida finita e invariante del sistema dinámico” .

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

El segundo tipo se refiere a las aplicaciones de la teoría ergódica de medidas, para saber cómo puede emplearse dicha teoría en los problemas de otras ramas de la matemática o de la física. Los problemas que pueden abordarse utilizando la teoría ergódica, cabe formularlos en términos de una transformación T de un espacio M, cuando incluye el estudio de las propiedades asintóticas de T (por ejemplo, T_n para n grande). Si el espacio M posee alguna estructura (es decir, fuese un espacio topológico o una variedad) y T preserva esta estructura (o sea, es un homeomorfismo o un difeomorfismo), entonces se hace preciso hallar una medida sobre M que sea preservada por T y además sea útil para el problema que se trate. Así, si T es una aplicación del intervalo unidad (o de una variedad uniforme), sería deseable una medida invariante para que tuviese los mismos conjuntos nulos que la medida de Lebesgue (o los mismos que los de una medida uniforme), de tal forma que las conclusiones fuesen válidas para casi todos los puntos relativos a una medida de Lebesgue. Y en las aplicaciones es necesario encontrar una medida conveniente, según cual fuere el problema particular que se afronte. Por ejemplo, en el caso de los sistemas mecánicos hamiltonianos que se abordan seguidamente, cuando se considera una familia uniparamétrica $\{T_t\}_{t \in R}$ de difeomorfismos de cierta variedad M, el teorema clásico de Liouville (que nos ocupará luego) daría una medida preservada para cada transformación[31].

3. Sistemas hamiltonianos

Debido a que las dos mayores fuentes de la teoría ergódica se encuentran en la física matemática (muy en concreto, en mecánica estadística y en dinámica hamiltoniana), así como en la teoría de procesos estocásticos estacionarios, en estos contextos vienen contenidos muchos ejemplos de transformaciones que preservan la medida y flujos.
A este respecto, adelantemos ahora una visión de la teoría ergódica en algunas de las interesantes aplicaciones de la mecánica estadística clásica.
Si en mecánica clásica los sistemas dinámicos tienen n grados de libertad, desde un punto de vista geométrico cabe pensar en sus posibles estados dinámicos como puntos de un espacio de 2n dimensiones, con n coordenadas de posición y n coordenadas de momentos de cada partícula (como seguidamente veremos), de tal modo que puede ser imaginado como un cierto espacio llamado de fases donde cada punto representa una fase, y que permite describir las propiedades dinámicas del movimiento para los sistemas aislados no

[31] Véase P. Walters, **ibíd.**, pp. 23-24.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

dependientes del tiempo. Un caso importante es el que se refiere al conocido **sistema hamiltoniano**[32]:

Como es sabido el estado dinámico en el tiempo t de un sistema holonomo conservativo de partículas, está especificado por n coordenadas generalizadas q_i y n momentos generalizados p_i. Asimismo el comportamiento en el tiempo del sistema viene gobernado por las ecuaciones hamiltonianas del movimiento

$$dq_i/dt=\partial H/\partial p_i, dp_i/dt=-\partial H/\partial q_i \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

siendo $H(q_i, p_i) = H(q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n)$ el hamiltoniano del sistema. La tasa (o ritmo) de cambio del hamiltoniano viene dado por:

$$dH/dt = \sum_{i=1}^{n} (\partial H/\partial q_i\, dq_i/dt + \partial H/\partial p_i\, dp_i/dt) + \partial H/\partial t$$

En los textos de Mecánica Analítica se muestra que para un sistema aislado, $H(q_i, p_i)$ no depende explícitamente del tiempo, con lo que $dH/dt = 0$; y así, al ser el hamiltoniano una integral (de las ecuaciones) del movimiento del sistema, se tendrá $H(q_i, p_i) =$ constante[33], relación que indica que, a lo sumo, sólo (2n-1) de las q_i y p_i pueden ser independientes[34]. Se prueba además que, si las coordenadas q_i se han derivado de un conjunto (de inercia) de coordenadas cartesianas, mediante una transformación que no depende explícitamente del tiempo, y de igual forma el potencial no es dependiente de la velocidad, el hamiltoniano es igual a la energía total (la cual equivale a la energía cinética más la energía potencial del sistema). Asumiendo que ambas condiciones sean satisfechas, se infiere entonces que

$$H(q_i, p_i) = \text{constante} \equiv E = E(q_i, \dot{q}_i),$$

donde $E(q_i, \dot{q}_i)$ denota la energía del sistema.

Ahora bien, es también conocido que las ecuaciones hamiltonianas del movimiento se infieren en realidad, de una formulación de ecuaciones debida a Lagrange (*formulación lagrangiana)*, para la cual se parte de la consideración del estado instantáneo del sistema suponiendo pequeños desplazamientos en un entorno de aquel; aunque también es posible deducir aquellas de un principio que tenga en cuenta el movimiento completo del sistema entre los tiempos t_1 y t_2, pero en el que debe quedar bien claro <u>lo que se entiende por movimiento del sistema entre los tiempos t_1 y t_2.</u> La configuración instantánea del sistema está determinada por los valores de n coordenadas generalizadas $q_1, q_2, \ldots, q_n$, que

[32] Resultados importantes que luego aparecen de la dinámica general, son válidos para sistemas más generales que los hamiltonianos. Para el repaso de los conceptos que siguen y para más detalles, véase I.E. Farquhar, **ibid,** cap.3.

[33] Véase, por ejemplo, H. Goldstein, "Classical Mechanics", Addison-Wesley, Cambridge (1953). En esta obra se desarrolla la estructura de la mecánica clásica, esbozando algunas aplicaciones a la mecánica teórica actual.

[34] En particular, en el caso de un sistema de osciladores armónicos, el hamiltoniano es una forma cuadrática y las superficies de energía constituyen elipsoides de (2n-1)- dimensiones.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

corresponden a un punto particular de un hiperespacio cartesiano en el que las q_i forman los n ejes coordenados. Este espacio n-dimensional suele denominarse "espacio de configuración". El estado del sistema varía con el tiempo y el punto que lo representa describirá, por lo tanto, en el espacio de configuración, una curva llamada *trayectoria del movimiento del sistema"*. La expresión "movimiento del sistema" se refiere pues, al movimiento del punto representativo a lo largo de esa trayectoria en el espacio de configuración.[35]

Por otra parte, existen transformaciones (las denominadas canónicas) que se definen como aquellas que conservan las ecuaciones hamiltonianas del movimiento. Una cuestión de interés es plantearse si existen otras expresiones que sean invariantes respecto de las transformaciones canónicas. Poincaré halló un conjunto de ellas que llamó invariantes integrales[36].

Por analogía al espacio de configuración de la formulación lagrangiana, en la mecánica analítica clásica se suele utilizar una descripción geométrica del movimiento de un sistema, introduciendo el concepto de **espacio fase (o de fases)** del sistema. La descripción dinámica completa de un sistema mecánico viene dada entonces por un punto en tal espacio que se especifica por un par de vectores (**q**, **p**) donde el vector **q** = $(q_1, \ldots, q_n)$ (coordenadas generalizadas) y el vector momento lineal (o impulso) **p** de componentes $(p_1, \ldots, p_n)$ pertenecen a R^n, en cuyo caso el espacio fase es R^{2n}. Las coordenadas generalizadas y los momentos pueden tratarse sobre una misma base, poniendo $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$, $\ldots$, $q_n = x_n$, $p_1 = x_{n+1}$, $p_2 = x_{n+2}$, $\ldots$, $p_n = x_n$, y las 2n cantidades x_i que se refieren al tiempo t, representan las coordenadas de un **punto P_t** en un espacio cartesiano Γ de 2n dimensiones. Este punto **P_t** se denomina la **fase** del sistema, y especifica el estado del sistema en un tiempo t. Ahora bien, en virtud de las ecuaciones del movimiento, el estado del sistema en un instante determina únicamente el estado en cualquier otro instante, subsiguiente o precedente, por lo cual la fase P_t en el tiempo t queda determinada por la fase inicial P_{t_0} en el tiempo t_0, y de la integración de las ecuaciones del movimiento sigue

$$P_t = T_{t-t_0} P_{t_0} \qquad (2)$$

Si bien, en principio, el movimiento puede ser discontinuo, al ser solamente las trayectorias continuas las que tienen interés físico, resulta que el comportamiento dinámico del sistema ha de quedar representado por una curva continua, llamada **trayectoria de fase**, en el espacio de fases Γ. Por consiguiente, puesto que las ecuaciones del movimiento determinan una

[35] El tiempo es formalmente un parámetro de la curva que representa sus variaciones; a cada punto de la trayectoria hay asociado uno o más valores del tiempo. Se debe destacar que no existe relación alguna entre el espacio físico tridimensional y el espacio de configuración, del mismo modo que las coordenadas generalizadas no son coordenadas de posición. Véase Goldstein, **ibíd.**, pág 38.

[36] Un teorema de Poincaré afirma que la $\iint_S \sum_i q_i p_i$ es invariante respecto de las transformaciones canónicas de las integrales que se calculen sobre una superficie arbitraria S bidimensional.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

trayectoria única para cada fase inicial P_{to} , no podrá pasar más de una trayectoria a través de cualquier punto del espacio fase[37].

Para cada tiempo inicial prefijado t_0 , la familia de transformaciones T_{t-to} generada por el único parámetro t constituye un grupo continuo de transformaciones, ya que satisface las relaciones $T_u\ T_v = T_{u+v}$, $T_0 = 1$. De esta manera, el espacio de fases así considerado, participa en el movimiento y no juega un papel pasivo. Comoquiera que los teoremas ergódicos deberán ser afrontados mediante la teoría de conjuntos, el espacio de fases de un sistema debería interpretarse como un concepto matemático que ha sido introducido con propósitos computacionales. El procedimiento usual (como se ha dicho antes) fue escoger un espacio euclídeo de 2n dimensiones, en el que cada uno de sus puntos viene definido por un conjunto ordenado de 2n números reales. Al espacio se le asigna la métrica

$$p(u,v) = \left[\sum_{j=1}^{2n} \left(u_j v_j\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

definida en términos de dos puntos cualesquiera $u \equiv (u_1,u_2,\ldots,u_{2n})$ y $v \equiv (v_1,v_2,\ldots,v_{2n})$ del espacio. Esta elección se suplementa con otra que apunta a que el conjunto ordenado de 2n números reales antes introducido –y que representaba coordenadas generalizadas y momentos- represente el de coordenadas que describen el espacio euclídeo.

La razón de esta doble elección radicó en que lo que se conoce como *teorema de Liouville*[38], podía así interpretarse de ambas maneras. La forma del teorema de Liouville probablemente mejor conocida por los físicos es que el mismo

---

[37] El físico se imagina al espacio fase como el espacio absoluto en el sentido newtoniano, dentro del cual las trayectorias son descritas; el matemático, en cambio, considera al espacio fase como un conjunto de puntos que constituyen el espacio, en lugar de que el espacio contenga esos puntos. Cada punto del espacio es imaginado como si fuera una fase, ya que cada punto experimenta la transformación dada por (2), con lo que el espacio entero de fases es transformado en sí mismo (**ibid,**Farquhar,p.47).

[38] Se considera como uno de los teoremas fundamentales de la mecánica estadística. Aunque en la mecánica clásica el movimiento exacto de cualquier sistema queda completamente determinado por las condiciones iniciales, en el caso de sistemas complejos generalmente resulta imposible hallar la solución exacta, ya que en muchos casos solo se conocen dichas condiciones de manera incompleta. Se puede afirmar, por ejemplo, que en el instante t_0 una masa dada de gas posee cierta energía, pero no es posible determinar las coordenadas y velocidades iniciales de cada molécula. Por tanto, la mecánica estadística no pretende dar una solución completa para aquellos sistemas que contienen muchas partículas. Su objeto es el de predecir ciertas propiedades *medias* mediante el examen del movimiento de gran número de sistemas idénticos. Se calculan entonces los valores de las magnitudes deseadas hallando valores medios respecto de todos los sistemas de este *conjunto*. Como cada sistema está representado por un solo punto en el espacio de fases, el conjunto de sistemas corresponde a una especie de enjambre de puntos en dicho espacio, con lo que se satisface automáticamente la condición de equilibrio El teorema de Liouville dice que "la densidad de sistemas en el entorno de cierto sistema dado en el espacio de fases es constante en el transcurso del tiempo". H.Goldstein, **ibid.**,(pág. 315).

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

constata la invariancia en tiempo de la densidad (en el entorno de una fase móvil) de las fases del sistema que comprenden un conjunto representativo; en otras palabras, la invariancia a lo largo de una trayectoria de fases de una función de distribución estadística local. Esto se refiere naturalmente al método de mecánica estadística, basado en probabilidades "a priori", en el cual una colección de fases, nó una única fase, designa el estado instantáneo del sistema (el cual se conexiona con el método de sistema único de la teoría ergódica)[39]. Una exposición alternativa del teorema de Liouville apropiada para la teoría ergódica, además de acoplarse al concepto del espacio de fases como un conjunto de puntos, requiere la definición de *volumen* de un conjunto arbitrario de puntos expresada en términos de la medida de ese conjunto[40]. La elección de un espacio de fases euclídeo facilita en grado sumo, la posibilidad de que una medida particular como la denominada *medida de Lebesgue*, pueda ser definida. Y precisamente, esta medida es la que proporciona la medida apropiada del teorema de Liouville. El flujo hamiltoniano $\{T_t\}$ preserva la medida de Lebesgue sobre el espacio de fases R^{2n}.

Conviene agregar en este parágrafo algunas precisiones y hechos sobre el espacio de fases, que permiten una mayor aclaración para hilvanar adecuadamente ciertos conceptos de importantes resultados (entre ellos el que se acaba de indicar de Liouville, como asimismo el concepto de medida) de la teoría ergódica que luego serán tratados. Ante todo hay que advertir que el espacio de fases no representa el conjunto de todas las fases posibles de un sistema aislado dado, puesto que dicho espacio de fases contiene puntos que corresponden a todos los valores de la energía hamiltoniana $H(q_i, p_i)$, y no meramente al valor particular $H(q_i, p_i) = E$, perteneciente al sistema dado. Por otra parte, ha sido asumido que el valor E puede ser fijado inicialmente de manera arbitraria; y análogamente, cualquier punto del espacio de fases que satisfaga la condición $H(q_i, p_i) = E$, puede ser considerado como una posible elección de la fase inicial de un sistema con energía prefijada E. Así, un subconjunto del espacio de fases que corresponda a la energía prefijada $H(q_i, p_i) = E \equiv$ constante, constituye una región invariante del espacio de fases, que se transforma en sí misma, durante el movimiento del espacio de fases; y se la denomina *superficie de energía*. Es supuesto generalmente, que el sistema

[39] Véase Farquhar, **ibid.** pp. 47-49, para más detalles. Cuando el conjunto de sistemas está en *equilibrio estadístico*, el número de ellos que se encuentra en un estado dado debe ser constante con el tiempo, lo cual significa que la densidad de puntos representativos en el entorno de un punto dado ha de ser constante. Para sistemas conservativos la densidad D puede ser cualquier función de la energía. Como ejemplo, el conjunto microcanónico corresponde a D=constante para sistemas con una energía dada, que puede ser nula (Goldstein, **ibid,** p. 318).

[40] Es harto conocido que una de las mayores dificultades para que la teoría ergódica pueda ser asimilada de forma conveniente por los físicos, es que esa teoría hace un exhaustivo uso de la teoría de la medida. Los conceptos de medida (de un conjunto de puntos) e integral de Lebesgue, dificultan que una breve exposición baste al no iniciado.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

aislado queda limitado a un volumen finito del espacio físico, y que su superficie de energía en el espacio de fases es una (hiper) superficie cerrada que incluye un dominio simplemente conexo (las definiciones de los términos superficie cerrada, simplemente conexo y dimensión deben ser dadas dentro del marco de la teoría de conjuntos; sin embargo, bastaría atribuir a estos términos su usual significado geométrico, sin considerar al espacio de fases como un conjunto de puntos). Esta superficie de energía que forma una región de 2n-1 dimensiones en el espacio de 2n dimensiones, y la familia de superficies de energía descritas por el parámetro E, cubren todo el espacio Γ (de esta manera una superficie de energía puede ser considerada como topológicamente equivalente a una esfera).

Una primera visión de ergodicidad se manifiesta en los siguientes dos ejemplos. Uno de ellos, representado por el más elemental de los sistemas especiales que puede ilustrarla, es el del oscilador armónico simple, cuyo hamiltoniano (con elección de unidades adecuadas), es $H(p,q)= \frac{1}{2}\, \omega\, (p^2+q^2)$ donde ω denota la frecuencia angular. La transformación (una función dependiente del tiempo) para este sistema, es una rotación de ángulo ω_t en el plano (p,q), y las trayectorias son círculos que coinciden con las superficies de energía. El otro ejemplo, mediante el círculo unidad del plano complejo (con longitud de arco normalizada), donde la ergodicidad se traduce en que la multiplicación por un número prefijado c de módulo 1, no debe ser una raíz de la unidad[41]. Otros sistemas dinámicos ergódicos sencillos son la *baker transformation* (que se la denomina transformación del panadero, debido a que rememora el amasamiento de una pieza de pasta) y la *Arnold transformation* (o transformación del gato), en las que una y otra actúan sobre un *espacio de fases* (un espacio en el que, como ya se ha dicho, están representadas todas las variables dinámicas del sistema) bidimensional (la región [0,1] x [0,1]) transformando el punto (x,y) sobre el cuadrado unidad, en un punto (x',y') mediante una aplicación que conserva la medida en el espacio de fases. La primera transformación al actuar sobre el cuadrado unidad, contrae la dirección **y** en un factor ½ y expande la dirección **x** en un factor 2. La transformación de un punto (x,y) es el (x',y') donde

$$x' = 2x \pmod 1 \quad , \quad y' = y/2 \ \text{ si } x < 1/2 \ , \text{ o bien } y/2 + 1/2 \ \text{ si } x > 1/2$$

Puede probarse de manera sencilla que esta transformación conserva el área del espacio.

[41] La diferencia simétrica de dos conjuntos A y B se define así: $A \Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$. Si A y B ∈ ***B*** difieren en un conjunto de medida cero, esto es, tales que $\mu(A \Delta B)=0$, se dice que ellos son iguales módulo 0, denotándose A = B mod 1, o simplemente A=B.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

Su representación como una operación *shift* es ampliamente conocida[42]. I. Prigogine y colaboradores han demostrado cómo la baker-transformada y el sistema dinámico a tiempo discreto correspondiente a la misma, puede ser usado para construir procesos irreversibles. Este sistema dinámico puede definirse con los números reales no negativos como espacio de estado. Para representarla gráficamente, se reduce el cuadrado a la mitad de su altura original y se duplica su anchura original, cortándose luego el rectángulo resultante, para finalmente situar su mitad derecha sobre la de su mitad izquierda (véase **figura 1).**

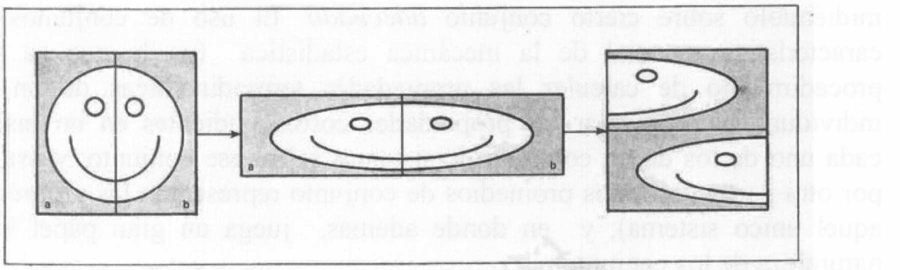

Figura 1 . La transformación del panadero (*The baker transformation* **)**

Según D.S. Ornstein[43], la baker-transformada representa un paradigma que es usado para explicar la posibilidad del caos determinístico, esto es, el de los sistemas que evolucionan conforme a las leyes de Newton y que, sin embargo, aparentan ser aleatorios.

La transformación de Arnold es de una clase algo más complicada de transformaciones. Se trata de transformaciones lineales del cuadrado unidad en sí mismo con condiciones de contorno periódicas, definidas a través de una matriz T que transforma el punto (x,y) en el (x',y') así:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{mod}1)$$

La matriz T debe tener determinante 1, esto es det T $=t_{11}\,t_{22} - t_{12}\,t_{21} = 1$, lo cual nos garantiza que dicha transformación conserva el área en el espacio, toda vez

---

[42] Para investigar las propiedades de la aplicación unidimensional $(x_{n+1}) = \sigma(x_n) = 2\,x_n$ mod. 1 ; n=0,1,2,..(que genera una sucesión de iteradas x_0, $x_1 = \sigma(x_0)$, $x_2 = \sigma(x_1) = \sigma(\sigma(x_0), \ldots)$, se puede escribir x_0 en representación binaria $x_0 = \sum_{v=1}^{\infty} a_v\, 2^{-v} \equiv (0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ donde a_v tiene el valor cero o uno.

Para $x_0 < ½$ se tiene $a_1 = 0$, y $x_0 > 1/2$ implica $a_1 = 1$. Por tanto, la primera iterada $\sigma(x_0)$ puede ser escrita así: $\sigma(x_0) = \{2x_0$ para $a_1 = 0$ y $2x_0 - 1$ .para $a_1 = 1\} \equiv (0, a_2, a_3, a_4, \ldots)$; esto es, la acción de σ sobre la representación binaria $\sigma(x)$ consiste en suprimir el primer dígito y desplazar la sucesión restante a la izquierda. A este cambio u operación, se le denomina *Bernoulli shift*.

[43] "Mathematics and the Unexpected", University of Chicago Press, Chicago (1988).

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

que el determinante es el jacobiano de la transformación (x,y) →(x',y'). Para que esta transformación sea ergódica, es necesario que los autovalores de T sean reales y diferentes de 1, por lo que se suele exigir que los elementos de T sean enteros positivos.
I. Ekeland[44] llamó gato de Arnold a la baker transformación.

4. La teoría del equilibrio, los conjuntos y otros tópicos.

El mayor éxito de la teoría de conjuntos fue su aplicación a la teoría del equilibrio, calculándose el valor del equilibrio de cualquier función dinámica, midiéndolo sobre cierto conjunto *adecuado*. El uso de conjuntos es una característica esencial de la mecánica estadística (en la que se sigue el procedimiento de calcular las propiedades termodinámicas de un sistema individual, al promediar las propiedades correspondientes en un instante de cada uno de los de un conjunto de sistemas sobre ese conjunto; y asumiendo, por otra parte, que estos promedios de conjunto representan las propiedades de aquel único sistema); y en donde además, juega un gran papel la propia naturaleza de los conjuntos.
Desde el ángulo descriptivo, se ha tratado en diferentes textos la conocida relación de la mecánica estadística y la termodinámica. Y es sabido que existen tres niveles de descripción en mecánica estadística clásica: la dinámica microscópica, la estadística macroscópica y la termodinámica (donde el concepto de equilibrio es bien usado). Lo destacable es que la mecánica estadística intentó situar al equilibrio al nivel macroscópico en el planteamiento de Boltzmann y a nivel estadístico en el planteamiento de Gibbs[45]. Intrigado en resolver cómo los conjuntos estadísticos podían evolucionar en el tiempo desde el estado de noequilibrio al de equilibrio conforme a las leyes de la probabilidad, Gibbs introdujo la noción de *conjunto,* como una colección de muchos estados posibles de un sistema, a cada uno de los cuales se asignaba una cierta probabilidad. Un conjunto de Gibbs pudo ser interpretado entonces como una colección hipotética infinitamente grande de sistemas, en la que todos ellos tienen el mismo hamiltoniano, pero no necesariamente el mismo estado dinámico[46]. Son considerados solamente conjuntos cuyos sistemas

[44] "Ergodic Theory, Randomness and Chaos", Science (1989), vol. 243, 182-187.
[45] Hay que decir también que la mecánica estadística ha sido solo usada para sistemas en equilibrio termodinámico y que sus métodos son ahora extendidos a sistemas que no están en equilibrio.
[46] J.L. Lebowicz and O. Penrose, **ídem**, pág. 24. Una vez aceptada la descripción dinámica como la básica, el problema de la teoría ergódica se concentró en investigar las condiciones para que el sistema dinámico exhibiera aquellas propiedades termodinámicas que pudieran ser representadas por promedios de conjuntos. El proceso general de la mecánica estadística asociado al nombre de Boltzmann concierne a un sistema dinámico que usa métodos estadísticos para hacer cálculos que pertenecen a tal sistema; Gibbs trató, por otra parte, con colecciones de sistemas similares, junto con una función de distribución apropiada y calculando promedios sobre tales conjuntos. Algunos

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

tienen todos la misma energía, de modo que sus estados dinámicos se encuentran distribuidos de algún modo sobre alguna superficie de energía S. Puede suceder que esta distribución fuese descrita por una densidad de conjunto; ello significaría que una función real ρ sobre S tal que una partición finita de miembros del conjunto cuyos estados dinámicos se encuentran en alguna región R sobre S sea $\int_R \rho(x)\,dx$, donde dx representa el área con peso. La más simple densidad de conjunto sobre S se expresa por $\rho(x)= C$ (para todo x en S), donde C es una constante que puede ser determinada por la condición de normalización $\int \rho(x)dx=1$. Este es el llamado conjunto microcanónico sobre S. La densidad del conjunto microcanónico es la del conjunto invariante - esto es, la única que satisface $\rho[\varphi_t(x)]= \rho(x)$ en S - , si y solo si, es ergódico[47].
Los sistemas que constituyen el conjunto evolucionan con el tiempo, de modo que la densidad de conjunto dependerá del tiempo. Para asegurar que los promedios calculados son independientes del tiempo, se utiliza un conjunto *invariante*, es decir, un conjunto en el que toda partición finita de sus miembros en cada región R sobre la superficie de energía S sea independiente del tiempo. Ahora bien, si ya tenemos conocimiento de un conjunto invariante, el microcanónico, cuya densidad de conjunto es precisamente uniforme sobre S, conviene no obstante, y aunque se pueda confiadamente usar para calcular valores de equilibrio (y fluctuaciones), asegurarse de que se trata del único conjunto invariante. La única densidad invariante es la densidad microcanónica, lo que permite inferir que el oscilador armónico es ergódico[48] Existen dos cuestiones que merecen plantearse. La primera de ellas es si hay algunos conjuntos invariantes que no posean una densidad de conjunto. El hecho excepcional de que exista algún conjunto invariante, queda limitado a una región de "área" cero sobre S y por tanto, no tiene densidad de conjunto, lo que equivaldría a adoptar un movimiento físicamente imposible. La segunda cuestión incita a conocer si pueden existir algunos conjuntos invariantes sobre S que tengan una densidad pero difieran del conjunto microcanónico; es decir, sea equivalente al llamado *problema ergódico*, en el cual se comparan las medias temporales de una función dinámica f, o sea:

$$f^*(x) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T f(\varphi_t(x))dt$$

con su promedio de conjunto microcanónico $\langle f\rangle = \int_S f(x)\,dx \,/ \int_S dx$.

---

científicos, entre ellos Einstein, le dieron importancia al concepto de conjunto por su significado físico (Farquhar, **ibíd.** , cap. I)..

[47] Todavía pueden hallarse en algunos artículos publicados en 1884 por Boltzmann, el conjunto canónico y el microcanónico de Gibbs, si bien bajo las denominaciones de *holode y ergode*. Boltzmann introdujo también la noción de distribución de probabilidad *estacionaria* sobre el espacio fase de N partículas contenidas en un recipiente de volumen V y llamó a una familia de tales probabilidades un *monode*, generalizando así la de "sistema monoclínico".

[48] Lebowitz y Penrose, **ibíd.**, p. 26.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

Por ello, un sistema se llama ergódico sobre su superficie de energía S, si las medias temporales son en general iguales a las medias de conjunto, o sea, si $f^*(x)= \langle f \rangle$ (2) para casi todos los puntos x sobre S [49]. Otra manera de definir la ergodicidad es la de que cualquier función integrable invariante sea constante casi por todas partes[50]

La teoría ergódica mantiene importantes conexiones con las aplicaciones de la física, de modo notable con la mecánica celeste, con la teoría de la comunicación en ingeniería, así como con la teoría del equilibrio en la física estadística, tras el planteamiento de Gibbs al analizar la evolución en el tiempo de los conjuntos. Lo que se pretende enfatizar ahora y en particular, es que para asegurar que los conjuntos se aproximan al equilibrio, fue necesaria una condición más fuerte que la ergodicidad, lo que propulsó a que, entre las diversas propiedades que pudieran poseer los sistemas dinámicos, destacara la denominada **mixing.** La definición matemática de mixing fue introducida por J. von Neumann[51] y desarrollada por E. Hopf[52], si bien, de hecho, hay que retrotraerse a Gibbs, quien la discutió mediante una analogía [... el efecto de agitar un líquido incompresible...][53]
Considerado un sistema dinámico (M,μ,φ) como un espacio de estado M dotado de una medida μ y de un grupo de transformaciones φ_t: $M \rightarrow M$ (t tiempo variable) que preserva μ, la condición mixing requiere que el límite para $t \rightarrow \infty$ de $\mu[\varphi_t(A \cap B)]$ sea igual a $\mu(A).\mu(B)$ para todo par de conjuntos medibles A,B (definición que será reconsiderada en el parágrafo siguiente). Debido a que todo sistema dinámico isomorfo a un sistema mixing es también mixing, se infiere que mixing es una propiedad invariante para los sistemas dinámicos.
Entre la ergodicidad y mixing existe otro concepto de interés, que es asimismo invariante para dichos sistemas, que es el de weak-mixing, cuya definición también nos ocupará luego.

---

49 "Casi todo" significa que si M es el conjunto de puntos de puntos x para el cual la ecuación (2) es falsa se tiene: $\int M \, dx = 0$. Véase J.L. Lebowitz and O.Penrose (loc. cit., Nota pie 19), pp. 24-25), para más detalles.

50 Es decir, si una función integrable f satisface la condición indicada antes por la densidad del conjunto microcanónico, para todo x en S, existe entonces una constante c tal que $f[\varphi(x)]= f(x)$ es igual á c para casi todo x (o sea, el conjunto de puntos x en el que f(x) no iguala á c). Farquhar, **ibíd.,** p. 25.

51 Annals of Math. **33**, 587 (1932)

52 J. Math. and Phys. **13**, 51 (1934)

53 Gibbs apreció claramente que la densidad de conjunto ρ_t de un sistema **mixing** no se aproxima a un límite en la usual locución "fine-grained" o en el sentido puntual de que ρ_t se acerca a un límite cuando $t \rightarrow \infty$ para cada x prefijado; sino más bien en el de "coarse-grained", o sea como límite débil en el cual la media (promedio) de ρ_t sobre una región R de S se aproxima a un límite cuando $t \rightarrow \infty$ para cada R prefijado (una distinción similar a la que se aplica al definir la entropía). J.L. Lebowitz y O. Penrose, **ibíd.,** p. 27.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

Sólo unos pocos sistemas físicos han probado hasta ahora, ser mixing. El más importante de ellos, es el de la esfera dura de gas (hard-sphere gas). La prueba de que este sistema es ergódico fue debida a Sinai, y dicha prueba dio también el resultado más fuerte de que el sistema es mixing. En términos amplios, el método usado por Sinai, fue el de mostrar que el sistema hard-sphere es inestable en un sentido tal, que conduce a cierta clase de irreversibilidad.
Ciertos sistemas dinámicos conocidos como "sistemas de Bernoulli", tienen conexión con un tipo de sistemas estudiados por Andrei Kolmogorov. Por sistema dinámico de Bernoulli se entiende, en cierto sentido que luego matizaremos, como un sistema que resulta ser equivalente a una sucesión infinita de giros de un disco de ruleta adecuadamente diseñada. Para precisar esta equivalencia, se considera una *partición finita* de la superficie de energía S del sistema que se trata, definiéndola como una colección finita de n regiones $R_1,R_2,\ldots,R_{n-1}$ que no se solapan y tal que la unión de todas ellas cubren S. Se supone además que se dispone de algún artificio, que permita determinar en cuál de estas regiones se encuentra el punto fase, aunque no diera información acerca de la parte de la región en que está. Sentado esto, es asombroso comprobar que para una cierta clase de sistemas dinámicos, sea posible escoger las regiones $R_1,R_2,\ldots,R_{n-1}$ de modo que las observaciones efectuadas no están correlacionadas (como el caso de los números mostrados en diferentes tiempos, por el disco de una ruleta), y al mismo tiempo, las regiones así escogidas proporcionen bastante información para discriminar entre estados dinámicos por ejemplo lo siguiente: si dos sistemas tienen diferentes estados dinámicos en algún tiempo, entonces las observaciones hechas sobre ellos no pueden dar idénticos resultados para las observaciones en cualquier otro tiempo. Precisamente, en el caso en que tales regiones puedan ser escogidas de esa manera, al sistema considerado se le denomina **sistema de Bernoulli.** Recientemente, D.S. Ornstein y B.Weiss demostraron que la clase de sistemas de Bernoulli incluye un tipo de sistema dinámico (constituido por el flujo geodésico sobre un espacio de curvatura negativa constante) cuyas propiedades ergódicas son muy similares a las del sistema hard-sphere que estudió Sinai, siendo probable que este último sistema fuese también un sistema de Bernoulli. Igualmente, el modelo de transformación baker es también sistema de Bernoulli[54]

Un modelo sencillo del movimiento inercial con choques elásticos en la frontera, que permite analizar propiedades ergódicas de sistemas dinámicos en dimensiones mayor que uno, es el de los denominados **billares** , los cuales representan raros ejemplos de sistemas *físicos*, para los cuales la ergodicidad ha sido establecida. El estudio de estos billares se remonta a Gibbs, quien usó

---

[54] Véase J. Lebowitz y O. Penrose, **ibid,** p. 28, en el que aparecen estos párrafos referidos a sistemas de Bernoulli. Véase también V.I. Arnold y A. Aves, **ibíd.**, para más detalles.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

estos sistemas como modelos de gases. Sea Q un subconjunto compacto de R^k y supongamos que su frontera ∂Q es regular a trozos, y que en el interior de Q sea dada una masa puntual que fuera de la frontera se mueve libremente con velocidad constante y colisiona elásticamente con la frontera, de forma que el ángulo de incidencia iguala al ángulo de reflexión. Puesto que la velocidad no cambia, el estado de este sistema viene determinado por la posición de la masa puntual junto con la dirección de la velocidad. Hay que advertir que el sistema de tiempo continuo caracterizado de esta manera no es continuo en el espacio fase, ya que las reflexiones en la frontera producen discontinuidades en la dirección en que se mueve la masa puntual. Por ello, y en sentido estricto, los billares no forman parte de la clase de sistemas hamiltonianos. Sin embargo, los billares sí se encuentran en cambio, incluidos en el campo de los sistemas conservativos (simplécticos) al pasar al tiempo discreto. Ciertamente, la aplicación retorno de Poincaré en la sección que engloba todos los vectores de longitud unidad con puntos base en ∂Q (y apuntando hacia dentro), constituye una aplicación regular que preserva orientación y área.
El conocido como "billar estadio" es un dominio conexo cuya frontera consiste de dos semicírculos idénticos y unidos mediante segmentos paralelos (formando una especie de elipse) y fue el primero de los billares con frontera conexa, que se probó que era ergódico. No obstante , a causa de discontinuidades en la frontera, un billar cuyo dominio Q está acotado por una curva "suficientemente" regular no es ergódico. Un gran número de sistemas hamiltonianos resultan ser no ergódicos[55] .
Los billares suelen dar con frecuencia, los modelos más visibles de sistemas dinámicos no uniformemente hiperbólicos. En general, las propiedades caóticas de los sistemas dinámicos de origen físico son generados por hiperbolicidad, la cual la mayoría de las veces se refiere a la dependencia de las condiciones iniciales. Ello significa que trayectorias próximas divergen exponencialmente en un espacio fase. Los primeros sistemas dinámicos clásicos con comportamiento fuertemente caótico que se estudiaron rigurosamente, fueron los sistemas hamiltonianos generados por flujos geodésicos sobre superficies de curvatura constante [56]. El más simple ejemplo de una transformación ergódica es la rotación irracional sobre el círculo con respecto a la medida de Lebesgue.

---

[55] Existe una paradoja conocida como *paradoja ergódica* que plantea: ¿por qué la hipótesis ergódica resulta tan afortunada en la explicación de ciertos fenómenos, y en cambio, muchos sistemas hamiltonianos <u>no</u> son ergódicos?.

[56] En 1935 Hedlund probó la ergodicidad del flujo geodésico sobre el haz tangente unidad de una superficie de curvatura negativa constante, y en 1940 Hopf extendió este resultado probando la ergodicidad del flujo sobre variedades arbitrarias con curvatura por secciones negativa.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

5. Una sucinta exposición de los fundamentos de la moderna teoría ergódica.

Sentado lo anterior, expongamos finalmente una escueta visión más rigurosa del caso c) (que atañe a la teoría ergódica) y que representa el más importante de los tres casos citados.

En general, la teoría ergódica se interpreta como el estudio estadístico de grupos de movimientos de un espacio, físico o matemático, dotado de una estructura medible.

Para plantear de modo matemático la teoría, se parte de un espacio M que representa todos los posibles estados de un sistema que cambia con el tiempo bajo la acción de fuerzas conocidas, y en el cual a un punto x de M corresponde un estado del espacio. La estructura medible se compone de una colección de conjuntos medibles sobre M junto con una medida μ de probabilidad. Esta medida μ es una función que asocia a cada conjunto B de la colección un número comprendido entre 0 y 1, número que representa la medida de B y que se escribe $\mu(B)$. Una medida de probabilidad tiene la propiedad de que $\mu(B)= 1$.

En lugar de seguir el camino de cada objeto del sistema, se estudia las propiedades estadísticas del movimiento.

Es preciso tener presente ahora algunos conceptos y definiciones de la teoría de la medida: Supuesta definida una topología a partir de una familia de subconjuntos (los conjuntos abiertos del espacio M), se puede determinar, mediante otra familia, cuales son los conjuntos que "se pueden medir". En estas condiciones, diremos que:

El par (M, $\boldsymbol{B}$) es un espacio medible, si: 1) $M\in\boldsymbol{B}$; 2) Si $A\in\boldsymbol{B}$ entonces $A^c = (M \setminus A)\in\boldsymbol{B}$ y 3) Si $A_i \in\boldsymbol{B}$, $i\in N$, entonces $U_{i\in N} A_i\in\boldsymbol{B}$.

A una familia de subconjuntos que cumplen estas tres propiedades se le llama **σ-álgebra.** Lo de "álgebra" se refiere a las operaciones "diferencia" y "unión" de conjuntos; y se antepone σ, porque la condición 3) considera una cantidad numerable de elementos (que en el caso de ser una cantidad finita, se la llama sólo álgebra de subconjuntos).

Al igual que las funciones continuas respetan la topología (la preimagen de un abierto es un abierto), a las funciones que respetan los conjuntos medibles se las denomina *funciones medibles*[57]. Un *espacio de medida* es un espacio medible junto con una medida, es decir, una función μ: $\boldsymbol{B}\rightarrow[0, +\infty]$ que cumple las siguientes propiedades:

1) $\mu(\Theta)= 0$; 2) $\mu\left(U_{j=1}^{\infty}A_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu\left(A_j\right)$, para cualesquiera $A_j \in\boldsymbol{B}$, $j\in N$, disjuntos por pares.

---

57 Dados dos espacios medibles (M, $\boldsymbol{B}$) y (M', $\boldsymbol{B}$'), una función entre ellos, $f(M,\boldsymbol{B}) \rightarrow(M,\boldsymbol{B}')$ es medible si para cualquier elemento $B'\in\boldsymbol{B}'$ se tiene que $f^{-1}(B')\in\boldsymbol{B}$.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

Si se requiere además que $\mu(M) = 1$, a la medida (ya normalizada) se la llama *probabilidad* y en este caso, $(M,\boldsymbol{B},\mu)$ constituye un ***espacio de probabilidad***[58].
En un espacio de probabilidad $(M,\boldsymbol{B},\mu)$, una transformación medible $T: M\rightarrow M$, se dice que *preserva* la medida μ, si se cumple que $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para cualquier subconjunto $A\in\boldsymbol{B}$, lo que se expresa igualmente como <u>μ es T-invariante.</u>
Un teorema llamado de "aproximación", constata: Si $(M,\boldsymbol{B},\mu)$ es un espacio de probabilidad **y** $\boldsymbol{B_0}$ un álgebra que genera la σ-álgebra ***B***, se tiene: para todo $\varepsilon>0$ y para todo $B\in\boldsymbol{B}$ existe $B_0\in\boldsymbol{B}_0$ tal que $\mu(B\Delta B_0)<\varepsilon$.
La construcción de medidas a partir de familias tan grandes como las σ-álgebras resulta algo complicado, por lo que se pueden definir a partir de un álgebra que genere la σ-álgebra. A este respecto es útil el denominado "teorema de extensión" que afirma que en un álgebra $\boldsymbol{B}_0$ de subconjuntos de M donde $\mu_0 : \boldsymbol{B}_0\rightarrow [0, +\infty]$ representa la función de medida para elementos de $\boldsymbol{B}_0$, existe una única función $\mu:\boldsymbol{B}\rightarrow [0,+\infty]$ que es una extensión de μ_0 a la σ-álgebra generada por $\boldsymbol{B}_0$. Además, si $\mu_0(M)= 1$, entonces μ es una probabilidad.
Sea $\{T_t\}$ un grupo uniparamétrico de automorfismos del espacio de medida $(M,\boldsymbol{B},\mu)$, $T\in R^1$, esto es, $T_{t+s}= T_t(T_s(x))$ para todo $t,s\in R^1$ y $x\in M$. En estas condiciones, $\{T_t\}$ se llama <u>flujo</u>, si para cualquier función medible f(x) sobre M, la función $f(T_tx)$ es medible sobre el producto cartesiano $M \times R^1$.
Sea $\{T_t\}$ un semigrupo uniparamétrico de endomorfismos del espacio de medida $(M,\boldsymbol{B},\mu)$, $t\in R^1_+ =\{s: s\geq 0\}$, o sea, $T_{t+s}\ x = T_t(T_sx))$ para cualesquiera $t,s\in R^1_+$, $x\in M$. Entonces $\{T_t\}$ se llama <u>semiflujo</u> si, para cualquier función f(x) sobre M, la función $f(T_t\ x)$ es medible sobre el producto cartesiano $M \times R^1_+$.

Sea $(M,\boldsymbol{B},\mu)$ un espacio de probabilidad completo, esto es, un conjunto M, junto con una σ-álgebra ***B*** de subconjuntos medibles de M y una función μ sobre ***B*** de conjunto nonegativa numerablemente aditiva, tal que $\mu(M)= 1$ y tal que ***B*** contenga todos los subconjuntos de medida cero. Estos espacios $(M,\boldsymbol{B},\mu)$ con una transformación T que preserva una medida μ, son los <u>sistemas fundamentales</u> en este trabajo. Si $T:M \rightarrow M$ es una transformación de esta clase, la órbita $\{T_nx:n\in Z\}$ de un punto x de M, representa una historia completa del sistema desde el pasado hasta el futuro[59]. Ya dijimos que en

[58] Para una mejor comprensión de lo que ha de seguir, es de interés reseñar algunas nociones fundamentales:
Un <u>automorfismo</u> del espacio de medida (M,B,μ) es una aplicación biunívoca T del espacio M sobre sí mismo, tal que para todo $A\in\boldsymbol{B}$, se tiene: $T A$, $T^{-1} A\in\boldsymbol{B}$ y $\mu(A)= \mu(T A)= \mu(T^{-1} A)$.
Un <u>endomorfismo</u> del espacio M es una aplicación T (no necesariamente biunívoca) suprayectiva del espacio M sobre sí mismo, tal que para cualquier $A\in\boldsymbol{B}$ se tiene $T^{-1} A\in\boldsymbol{B}$ y $\mu(A)= \mu(T^{-1}A)$ donde $T^{-1}(A)$ es la imagen inversa del conjunto A.
[59] La <u>ecuación del flujo</u> dada por $\Phi(t_1, \varphi(t_2 ,x)) = \varphi(t_1 +t_2 , x)$, que se conoce también como <u>propiedad de grupo</u> , es una importante restricción que quiere decir básicamente que cuando las

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

muchos sistemas, en lugar de seguir la pista de la trayectoria de cada elemento, se estudian las propiedades estadísticas del movimiento.[60]

Un sistema dinámico abstracto (M,μ,φ) (o bien (M,μ,φ_t)), es un espacio dotado de una medida μ sobre M y donde φ_t:M→M representa un grupo uniparamétrico de transformaciones que preserva la medida (y que depende de t).

Si f es una función integrable sobre M, se define su media de tiempo (o media temporal) f*, si existe, por la función: $f^* = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\right)\int_0^T f(\varphi_t)dt$

Asimismo, su media de espacio (de estado), si existe, se define por la función:

$$<f> = \int_M f\, d\mu \qquad (\mu(M)=1)$$

Un sistema dinámico (M,μ,φ_t) es **ergódico**, si para toda función integrable es

$$f^* = <f>$$ [61]

Como ya se adelantó en el parágrafo 4, a veces sucede que la hipótesis ergódica se reemplaza por otra condición más fuerte, que es llamada **mixing.**

Un sistema dinámico abstracto (M,μ,φ_t) es **mixing**, si:

$\lim_{t\to\infty}\mu[\varphi_t A\cap B] = \mu(A)\mu(B)$, para todo par de conjuntos medibles A y B .

Mixing implica ergodicidad. El recíproco es falso: la ergodicidad no implica mixing. Por ejemplo, puede constatarse fácilmente que el oscilador armónico simple es ergódico, pero no mixing; la rotación uniforme sobre un círculo es ergódica, pero nó mixing.

Un sistema dinámico abstracto (M,μ,φ_t) es, por definición, **weakly-mixing** (débilmente mixing) si $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left|\mu(\varphi_t A\cap B)-\mu(A)\cdot\mu(B)\right|dt = 0$ (en el caso continuo) y

---

partículas se mueven, el comportamiento en cada punto no cambia con el paso del tiempo. Varias disciplinas especiales tienen sus propios nombres para este fenómeno. Así, los procesos estocásticos que se rigen por la ecuación del flujo, se llaman **estacionarios;** y las ecuaciones diferenciales que obedecen a dicha ecuación se llaman *autónomas*; si se preserva la topología, en lugar de las probabilidades, estaríamos hablando de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales que inició Poincaré. Hay otros casos particulares que se presentan cuando la ecuación se satisface para valores reales t_1 y t_2 , situación que responde a un *semiflujo.*

[60] En la práctica, la determinación completa de las trayectorias de moléculas de los sistemas de gas, no es factible.

[61] El símbolo < > se usa para designar un promedio (o media), siendo reconocidos los diferentes tipos de promedios cuando se les adjunta un sufijo con alguna letra significativa.

Un teorema debido a G.D. Birkhoff y A. Khinchin afirma que: Si (M,μ,φ_t) es un sistema dinámico abstracto (y f es sumable L_1 sobre M), se tiene: " f(x) es sumable e invariante casi por todas partes si $f(\varphi_t x) = f(x)$ para todo t excepto quizás sobre un conjunto de medida cero independiente de t ". V.I. Arnold y A. Avez, **ibíd.,** cap. 2.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left|\mu(\varphi_k A \cap B) - \mu(A) \cdot \mu(B)\right| dt = 0 \quad \text{(en el caso discreto),}$$

para todo par de conjuntos medibles A y B.
Un sistema dinámico abstracto es, por definición, **strongly-mixing** (fuertemente mixing) si $|\mu(\varphi_t A \cap B) - \mu(A).\mu(B)| \to 0$ para todo par de conjuntos medibles A y B.

Strong mixing implica **weak mixing**, y **weak mixing** implica ergodicidad.
Ergodicidad, weak-mixing y strong-mixing, son isomorfismos invariantes de la transformación T.
Mixing puede también ser definido por endomorfismos que no son automorfismos.

La teoría ergódica y el teorema H al que nos referimos anteriormente en el parágrafo 2, pueden complementarse la una con el otro, cuando se tratan propiedades de magnitudes o cantidades que conciernan a sus respectivos ámbitos. Debe señalarse que el teorema H trata una magnitud estadística análoga a la entropía termodinámica generalizada, mientras que la teoría ergódica excluye específicamente la entropía y cualquier parámetro conexionado exclusivamente estadístico. Para analizar las discusiones que hubo en este sentido, la tendencia usual es la de reemplazar el teorema H por ciertas ecuaciones básicas a priori obtenidas que condujeron al mismo (véase W. Pauli, Probleme der Modernen Physik, Sommerfiel-Debye ed., Leipzig, 1928). Incluso también, la forma asintótica de dicha ecuación (para $t\to\infty$), en la que estuvo basado la determinación del teorema H estadístico-cuántico, proporciona una mayor información que la del propio teorema.
Como es sabido, el concepto de entropía, creado por Clausius en 1854 como una medida del desorden y que luego expresaría Boltzmann en términos de una probabilidad, se trasladó a la teoría de la información por Shannon en 1948. Diez años más tarde, con el desarrollo formal de la concepción de Boltzmann, fue iniciada la moderna teoría ergódica por Kolmogorov, que se extendió durante las décadas de los 1960 y 1970 al incluir muchas acciones diferenciales. Además de en la teoría de la información, en diversas aplicaciones de la teoría ergódica, como las de la dinámica de fluidos, la dinámica compleja y la de los autómatas celulares, se reveló la importancia de la entropía con el fructífero desarrollo de la ergodicidad, que provino de su utilidad en relación con el problema del isomorfismo para las transformaciones que preservan medidas. En este contexto, sobresalieron dos importantes teoremas: el primero de ellos, establecido por A. Kolmogorov y Ya.G. Sinai, que afirma que la entropía total de una transformación puede ser computada hallando la entropía respecto de un *generador*. Esta posibilidad de cálculo tuvo gran repercusión, ya que en una diversidad de casos, se llega a la conclusión de

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

que esquemas de Bernoulli de diferentes entropías no son isomorfos. El segundo notable resultado se debió a D. Ornstein, quien anuncia (1970) que la entropía de los esquemas de Bernoulli es un invariante completo: dos esquemas de Bernoulli son isomorfos, si y sólo si, tienen la misma entropía[62].

Citaremos, por último, que una clase de sistemas dinámicos abstractos con propiedades fuertemente estocásticas, fue introducida por A . Kolmogorov bajo la denominación de "sistemas casi regulares", que han sido conocidos como **sistemas K**.

Debido a la existencia de un tipo de problemas que aparecieron en muchos sistemas, al no cumplir algunas de las condiciones exigidas que pudieran revelar su ergodicidad, se motivó un estudio exhaustivo desarrollado por A. K(olmogorov), V.I. A(rnold) y J. M(oser), que probaron de modo riguroso la ausencia de ergodicidad (un interesante resultado para la teoría de gases), hoy denominado teorema **KAM**. Un sistema que cumpla ese teorema, se suele llamar **sistema KAM**, el cual no es ergódico. Un ejemplo de este tipo de sistemas, es la transformación baker.

Los teoremas ergódicos que más repercutieron por su importancia en los fundamentos de la mecánica estadística fueron dos corolarios del trascendental teorema de Birkhoff (al que ya hemos aludido con anterioridad). Ambos corolarios se aplican a sistemas que son métricamente transitivos, lo que implicaría que se supieran cuáles eran los sistemas físicos que poseyeran esa propiedad. En ese sentido, se desarrolló una enorme tarea de investigación, con la que se pudo apreciar la gran dificultad que suponía tal restricción, ya que la mayor parte de los sistemas de la mecánica estadística clásica no eran métricamente transitivos. El teorema KAM subrayó más bien, que la no-ergodicidad era la regla general. En la teoría KAM se parte de un sistema hamiltoniano con órbitas cuasiperiódicas[63]. El teorema muestra que las órbitas cuasiperiódicas cubren los conjuntos de medida positiva (que son llamados toros KAM). La teoría KAM asegura que los sistemas mecánicos generalmente poseen colecciones de toros invariantes, con una medida no nula en el espacio fase. Cuando el número de grados de libertad crece, las dificultades generadas por esta teoría tiene escasa influencia. Aunque existe una teoría KAM para sistemas infinitos, el dominio de validez de la misma no contiene situaciones mecánicas estadísticas típicas.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

---

[62] K. Petersen, **ibíd.**, cap. 5.

[63] La cuasiperiodicidad significa que la trayectoria de fase es una función de variables periódicas solamente; esa definición difiere de la periodicidad, porque los períodos de aquellas variables son inconmensurables. Así, los términos de perturbación (independientes del tiempo) están incluidos en el hamiltoniano.