Introducción a la derivada en un contexto tecnológico-variacional

Resumen

En el siguiente escrito se describe una propuesta didáctica para introducir a los estudiantes al concepto matemático de la derivada. Esta propuesta se basa en la idea de variación la cual es representada en contextos numéricos, físicos y gráficos. La representación y manipulación de las ideas matemáticas en juego durante el desarrollo de la propuesta se ven apoyadas en el uso de dispositivos tecnológicos tales como calculadoras gráficas y un sensor de movimiento.

Introducción

El concepto de derivada es un concepto fundamental para el estudio del cálculo, sin embargo el tratamiento que se le da a este concepto en la escuela generalmente se enfoca principalmente en el manejo y la aplicación de fórmulas y recursos algebraicos, esta situación puede provocar deficiencias en los estudiantes para reconocer y manipular este concepto matemático en contextos no algebraicos como las reportadas en Cantoral y Farfán (1998). En este escrito se describe una propuesta didáctica apoyada en el uso de calculadoras gráficas y un sensor de movimiento, que se ha utilizado con estudiantes mexicanos para introducirlos al concepto matemático de derivada en un contexto variacional. La propuesta pretende mostrar a los estudiantes la esencia del concepto matemático en un contexto numérico y además generar en los estudiantes significados físicos que motiven e ilustren la utilidad del estudio de dicho concepto.

La propuesta

La propuesta didáctica se basa en la idea de *diferencia* o *variación*, esta idea es entendida como una cuantificación del cambio de un sistema, cuerpo u objeto (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005). Se ha tomado como componente central a la idea de diferencia porque esta idea subyace al concepto de derivada y además ha aparecido constantemente durante la génesis del cálculo como una herramienta de análisis como se muestra en la figura 1.

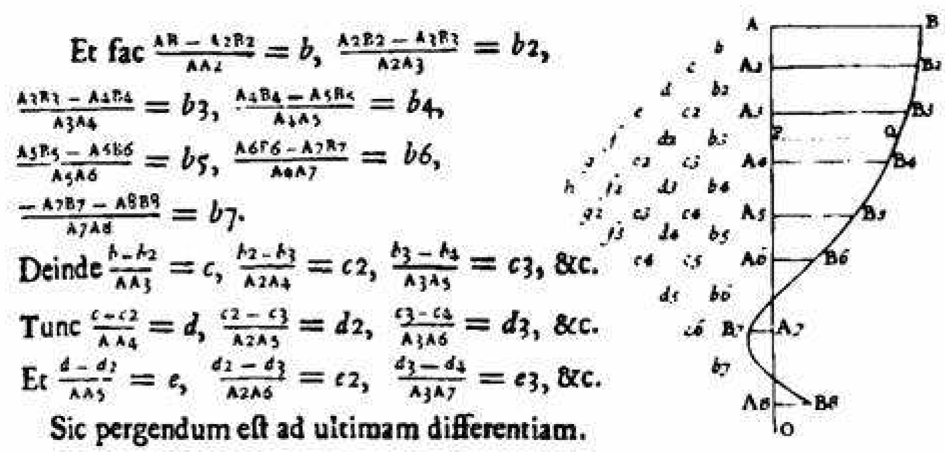


Figura 1. Escrito original de Isaac Newton

La primera parte de la propuesta tiene como objetivo inducir a los estudiantes al método de las diferencias finitas (Dale y Shedd, 1981), esto se logra mediante una actividad especialmente diseñada para ese propósito. La actividad se describe a continuación:

ACTIVIDAD 1

A continuación se presentan tres tablas numéricas (figura 2).

a) Determina cuál de estas tablas corresponde a una función lineal, cuál a una función cuadrática y cuál a una función cúbica.

b) Una vez que hayas determinado a qué tipo de función corresponde cada una de las tablas numéricas, encuentra la expresión algebraica de cada una de estas funciones.

x	y
-3	-78
-2	-57.75
-1	-40.5
0	-26.25
1	-15
2	-6.75
3	-1.5

x	y
-3	624
-2	404.25
-1	243
0	131.25
1	60
2	20.25
3	3

x	y
-3	-29.25
-2	96
-1	221.25
0	346.5
1	471.75
2	597
3	722.25

Figura 2. Tablas de la Actividad 1

Algunas estrategias de solución

Las estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver este problema son variadas. En el caso de la primera pregunta, aproximadamente el 64% de los estudiantes trazan las gráficas correspondientes a cada una de las tablas numéricas, sin embargo, como se puede apreciar en la figura 3, la actividad está diseñada para inhibir este tipo de estrategias de solución, ya que es difícil discernir a partir de las gráficas, cuál corresponde a una función cuadrática y cuál corresponde a una función cúbica. Usando esta estrategia gráfica es fácil determinar que la tercera tabla corresponde a una función lineal.

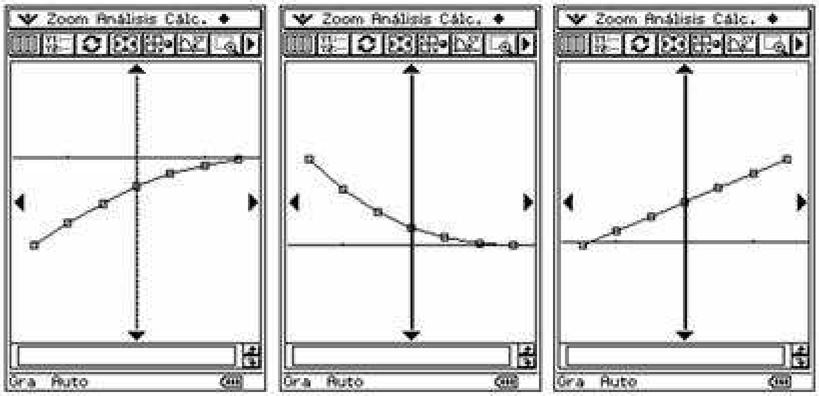
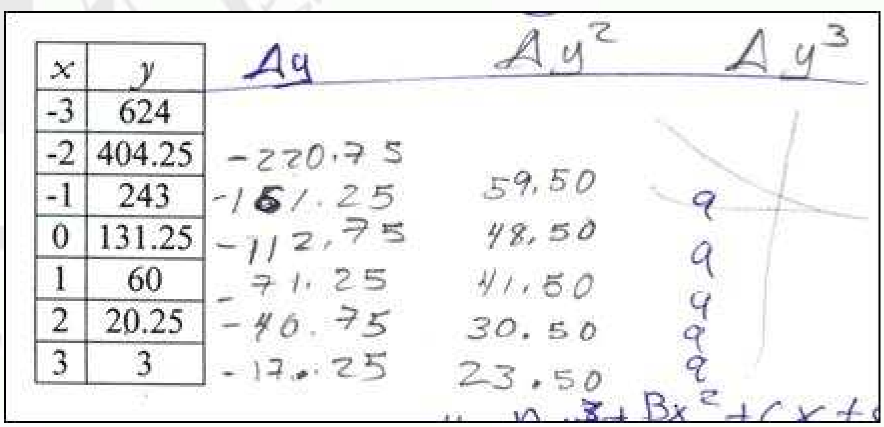


Figura 3. Gráficas correspondientes a las tablas de la Actividad 1

Es importante comentar que aproximadamente el 4% de los estudiantes afirman que la primera tabla (ver figura 2) no corresponde a una función cuadrática, debido a que todos los valores de y son negativos, esto parece indicar una concepción errónea sobre la representación numérica de una función cuadrática.

Otra de las estrategias utilizadas para resolver el primer cuestionamiento es la aplicación de la técnica de las diferencias finitas (ver figura 4).



x	y
-3	624
-2	404.25
-1	243
0	131.25
1	60
2	20.25
3	3

Figura 4. Técnica de las diferencias finitas

Cuando esta técnica es sugerida por alguno de los estudiantes, se le pide que la explique en forma detallada para toda la clase, esto debido a que el objetivo de la Actividad 1 es que, de alguna manera, la idea de diferencia entre dos números consecutivos, expresada como $\Delta y = y_{i+1} - y_i$ surja de las estrategias de solución de los estudiantes.

En la segunda pregunta, algunos estudiantes construyen sistemas de ecuaciones lineales para responderla (ver figura 5), sin embargo, en el caso de la función lineal, otros estudiantes utilizan la fórmula

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ que implícitamente involucra la idea de diferencia en el cálculo de la pendiente. (Ver figura 6)

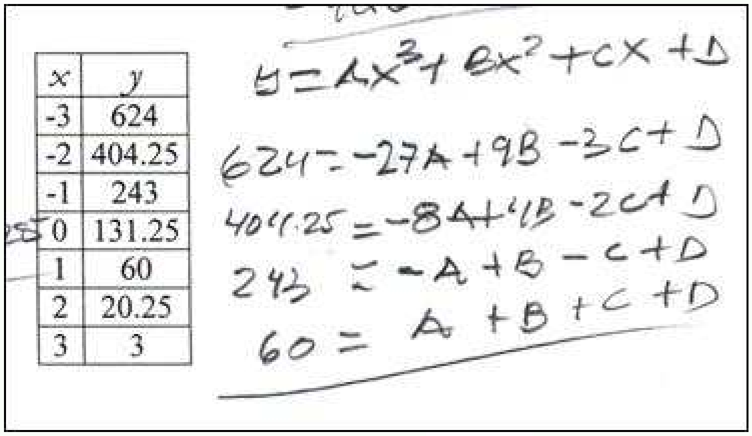


Figura 5. Formulación de un sistema de ecuaciones lineales

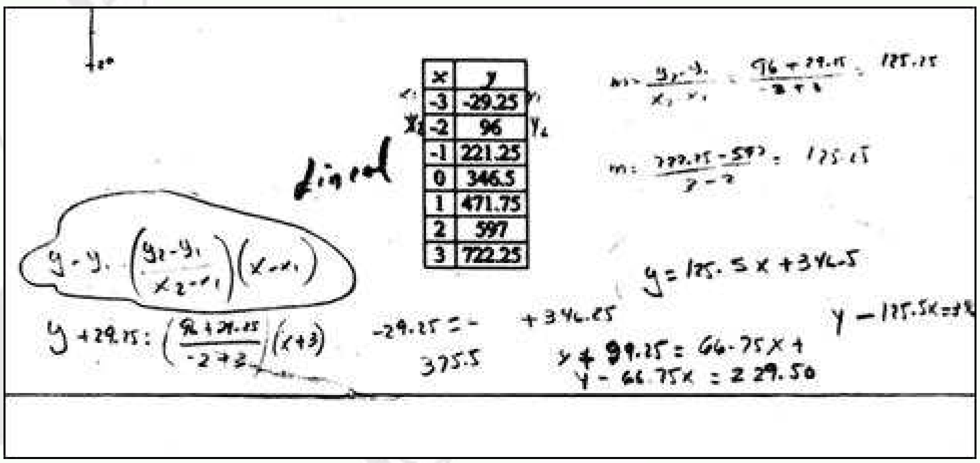


Figura 6. Determinación de la fórmula de la función lineal

La experiencia muestra que la idea de diferencia siempre aparece en alguno de los métodos de solución de los estudiantes, pero… ¿Por qué es tan importante la idea de diferencia?

Porque esta idea juega un papel muy importante en la segunda parte de la propuesta didáctica, donde el concepto de derivada es introducido con la ayuda de dispositivos tecnológicos.

Fase de experimentación

La segunda parte de la actividad comienza con un experimento. Este experimento consiste en balancear un péndulo (construido con una botella de plástico y una cuerda) frente a un sensor de movimiento conectado a un sistema analizador de datos que registra la distancia en la cual se encuentra localizado el péndulo en diferentes instantes en el tiempo (ver figura 7).

Figura 7. Realización del experimento

El sistema analizador de datos está configurado para registrar la posición del péndulo cada 0.02 segundos; en total se toman 250 muestras. Este sistema analizador de datos se encuentra conectado a una calculadora graficadora y la calculadora a su vez a un dispositivo de proyección que permite mostrar las mediciones resultantes a la clase completa. Cuando el experimento ha finalizado, la calculadora muestra una representación gráfica del experimento similar a la mostrada en la figura 8. El eje X representa al tiempo (en segundos) y el eje Y representa la posición (en metros). En este momento se discute con los estudiantes por qué esta gráfica representa el experimento del péndulo.

En esta parte de la actividad, todos los estudiantes cuentan con una calculadora graficadora, y con la ayuda de un cable de comunicación, los datos numéricos que representan las medidas del experimento son transmitidos a cada una de las calculadoras de los estudiantes. De esta manera la clase completa trabajará con los mismos datos.

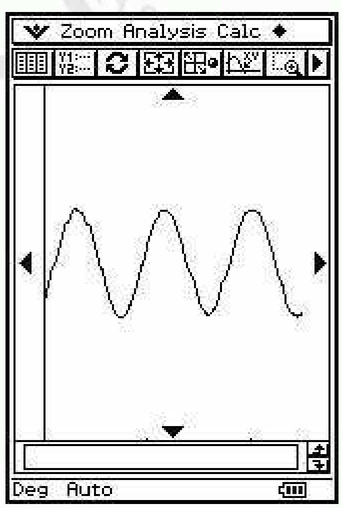


Figura 8. Representación gráfica del experimento

Análisis numérico del experimento

Los datos obtenidos a partir del experimento son agrupados en dos listas de la aplicación 'Estadística' de la calculadora, y después, la idea de diferencia que apareció en la primer parte de la actividad es aplicada a cada una de las listas de datos, esto es, se calcula la cantidad $\Delta y = y_{i+1} - y_i$ para todos los valores de las listas 1 y 2. Los resultados se colocan en las listas 3 y 4 respectivamente.

Este cálculo no se realiza manualmente, para obtenerlo se utiliza el comando ΔList incluido en la aplicación Estadística. Este comando calcula las diferencias de cualquier lista de datos. Finalmente se calcula el cociente $\frac{\text{List 4}}{\text{List 3}}$ y el resultado es colocado en la lista 5. Todos los datos se agrupan de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&\text{List 1} \rightarrow x \ (\text{tiempo}) \\
&\text{List 2} \rightarrow y \ (\text{distancia}) \\
&\text{List 3} \rightarrow \Delta x \\
&\text{List 4} \rightarrow \Delta y \\
&\text{List 5} \rightarrow \frac{\text{List 4}}{\text{List 5}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

Aunque en este momento los estudiantes no lo saben, la lista 5 contiene una aproximación a la derivada de la función formada con la relación tiempo-distancia de los datos del experimento. En términos del experimento, el significado de esta aproximación es la velocidad que lleva el péndulo en diferentes momentos de su oscilación.

Este tipo de aproximación numérica no es novedosa, podemos citar a manera de ejemplo el trabajo de Puerta (1999) donde se aproxima el valor de la pendiente de la recta tangente a un punto A de la gráfica de una función, mediante una sucesión de valores generados a partir de un cociente de diferencias.

Enseguida, se les pide a los estudiantes encontrar la 'frontera' donde los valores de la lista 5 cambian de positivos a negativos y que después encuentren el número más cercano a cero es esta área. Finalmente, se les pide que localicen los números en la lista 1 que se encuentran en el mismo renglón que los números que encontraron en la lista 5 (ver figura 9). En otras palabras, se requiere encontrar en la lista 5 un número cuyo valor es cercano a cero y posteriormente encontrar en la lista 1 el valor que corresponde al encontrado en la lista 5.

	list1	list2	list3	list4	list5
23	0.44	0.556	0.02	2.6E-3	0.1302
24	0.46	0.5586	0.02	4.8E-3	0.2419
25	0.48	0.5634	0.02	4.6E-3	0.2326
26	0.5	0.5681	0.02	6.5E-3	0.3256
27	0.52	0.5746	0.02	4.8E-3	0.2419
28	0.54	0.5794	0.02	5.2E-3	0.2605
29	0.56	0.5846	0.02	5.7E-3	0.2884
30	0.58	0.5904	0.02	1.8E-3	0.093
31	0.6	0.5923	0.02	-2E-3	-0.13
32	0.62	0.5897	0.02	-2E-3	-0.111
33	0.64	0.5874	0.02	-9E-4	-0.046
34	0.66	0.5865	0.02	-1E-3	-0.065
35	0.68	0.5852	0.02	-1E-3	-0.074
36	0.7	0.5837	0.02	-2E-3	-0.111
37	0.72	0.5815	0.02	-1E-4	-9E-3
38	0.74	0.5813	0.02	-3E-3	-0.158
Cal▸			"Δlist…	"Δlist…	"list4…

Figura 9. Dos valores que se corresponden

Articulación numérico-gráfica

Ahora se les pide a los estudiantes que utilicen el comando *Trace* para localizar en la representación gráfica del experimento los números que encontraron en la lista 1; los estudiantes encontrarán que estos valores corresponden aproximadamente con los puntos máximos y mínimos de la función (ver figura 10).

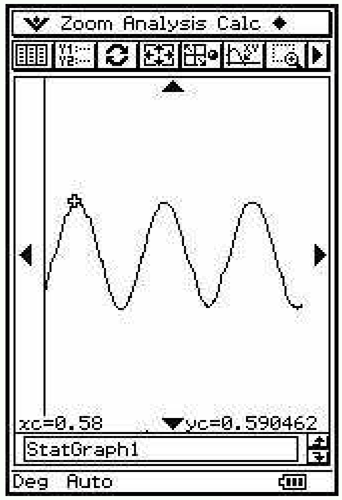


Figura 10. Localización de un máximo

Esta sección de la actividad es muy importante porque permite que el estudiante articule la información del contexto numérico con el contexto gráfico, y este contexto gráfico está directamente relacionado con el significado físico generado por el experimento. Enseguida se pregunta a los estudiantes:

¿Qué significa en términos del experimento los puntos que localizaron (el máximo y el mínimo)?

Es importante mencionar que la mayoría de los estudiantes responden a esta pregunta en términos de variaciones de primer orden, como lo es la *posición*, es decir, ellos afirman que el máximo corresponde al momento en que la botella se encuentra más alejada del sensor de movimiento; mientras que el mínimo corresponde con el momento en que la botella se encuentra más cerca del sensor. Aparentemente los estudiantes no perciben en el experimento las variaciones de segundo y tercer orden (velocidad y aceleración respectivamente) ya que sus respuestas al cuestionamiento planteado no involucran dichas variaciones. Para continuar la discusión de la actividad, se formula la siguiente pregunta:

La colección de datos de la lista 5 corresponde con una magnitud física… ¿Cuál es esta magnitud? Recuerda que en los puntos que localizaste en la gráfica (el máximo y el mínimo) esta magnitud es muy cercana a cero.

Algunos de los estudiantes pueden comprender en este momento que esta magnitud es la velocidad, porque los valores de la lista 5 corresponden a los valores del cociente $\frac{\Delta \text{ Distancia}}{\Delta \text{ Tiempo}}$. La actividad finaliza con un proceso de institucionalización en el que se explica a los estudiantes que los valores de la lista 5 corresponden a una aproximación de la derivada, que es un concepto matemático muy importante y que una de sus aplicaciones es calcular la velocidad de un cuerpo en movimiento. También se aclara que existen otros métodos (algebraicos, geométricos) para calcular la derivada.

Comentarios Finales

Otras propuestas para introducir la derivada a través de la variación han sido desarrolladas en México (ver por ejemplo Dolores, 1999), sin embargo, el diseño didáctico que se ha descrito en este escrito difiere de estas aproximaciones debido a que incluye la utilización de dispositivos tecnológicos que permiten representar y analizar las ideas matemáticas de una manera más ágil y sencilla que en un ambiente de lápiz y papel, además de que como lo señalan Cantoral y Montiel (2003) puede favorecer el establecimiento de una relación entre representaciones. Por otro lado, creemos que estas herramientas tecnológicas generan un escenario de significados que pueden ser asociados con el concepto matemático y de esta manera mostrar a los estudiantes algunas de las aplicaciones de la derivada (el cálculo de la velocidad de un cuerpo en movimiento, por ejemplo). Este diseño podría ser adaptado para mostrar el papel del límite en la definición de derivada, trabajando con la reducción de los intervalos durante el análisis numérico, y quizás también para estudiar las derivadas de orden superior. Es necesario más trabajo en esta dirección.

Referencias Bibliográficas

Cantoral, R.; Farfán, R.M. (1998): “Pensamiento y Lenguaje Variacional en la Introducción al Análisis”. *Epsilon* 42, 353-369.

Cantoral, R.; Molina, J.G.; Sánchez, M. (2005): “Socioepistemología de la Predicción”. En J. Lezama; M. Sánchez; J.G. Molina (eds.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Volumen 18, pp. 463-468). CLAME, México.

Cantoral, R.; Montiel, G. (2003): “Una presentación visual del polinomio del polinomio de lagrange”. *Numeros* 55, 3-22.

Dale, S.; Shedd, M. (1981): *Diferencias Finitas: Una Técnica Para Resolver Problemas*. Compañía Editorial Continental, México, D.F.

Dolores, C. (1999): *Una Introducción a la Derivada a Través de la Variación*. Grupo Editorial Iberoamérica, México, D.F.

Puerta, F. (1999): “El rincón de la calculadora gráfica: Estimar la derivada”. *Números* 40, 55-60.

Autor: Mario Sánchez Aguilar
Centro de trabajo: Programa de Matemática Educativa, Centro de investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional (CICATA del IPN).
Dirección: Calzada Legaria # 694, Col. Irrigación, Delegación Miguel Hidalgo, C.P. 11500, México, D.F.
Teléfono, fax y correo electrónico: Teléfono (55)5729 6300, extensión 67791; Fax (55) 5395 6738; correo electrónico mosanchez@ipn.mx

RESEÑA BIOGRÁFICA

Lugar y fecha de nacimiento: Maravatio del Encinal, Guanajuato, México; 7 de junio de 1975

Títulos:

PROFESIONAL
Universidad de Guadalajara
Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierias
Departamento de Matemáticas
Licenciado en Matemáticas
1996 – 1999
http://www.cucei.udg.mx/

MAESTRÍA
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemática Educativa
M. en C. con especialidad en Matemática Educativa
2001 – 2003
http://www.cinvestav.mx

Trabajos:

MIEMBRO DEL EQUIPO DE INVESTIGACIÓN
Programa de Matemática Educativa, Centro de investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional (CICATA del IPN)
México, D.F.
Teléfono: (0155) 5729 6300, extensión 67791
De septiembre de 2004 a la fecha
http://www.matedu.cicata.ipn.mx/

MIEMBRO DEL EQUIPO DE COORDINACIÓN TÉCNICA
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
México, D.F.
Teléfono: (0155) 5747 3800 extensiones 6019 y 6008
De diciembre de 2002 a la fecha
http://www.clame.org.mx/relime.htm

Publicaciones:

Maldonado, E.S., Molina, J.G., Pérez, C.O., Romo, A. y Sánchez, M. (2003). La perspectiva latinoamericana de la investigación en Matemática Educativa. En J.R. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Volumen 16, Tomo 1, pp. 364-368). CLAME: Santiago de Chile.

Sánchez, M. y Molina, J. G. (2004). *Un Laboratorio de Ciencias con el Sistema de Análisis de Datos EA-100*. Casio Académico, México: Programa Editorial.

Sánchez, M. y Molina, J.G. (2004). Analizando la relación entre el periodo y el tiempo en el movimiento de un péndulo. *C+1*, *4*, 1-4.

Sánchez, M. y Molina, J.G. (2005). *ClassPad 300: Representación y Manipulación de objetos Matemáticos*. Casio Académico, México: Programa Editorial.

Cantoral, R., Molina, J.G. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la Predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J.G. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Volumen 18, pp. 463-468). CLAME: México.

Sánchez, M. y Farfán, R.M. (2005). Un Estudio sobre Interacciones y Comunicación en Educación Matemática a Distancia. En J. Lezama, M. Sánchez y J.G. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Volumen 18, pp. 687-692). CLAME:

México.