NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 85, marzo de 2014, páginas 91-114

Actividad de estudio e investigación para la enseñanza de nociones de geometría

Ana Rosa Corica
Elisabeth Alejandra Marin
(Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Argentina)

Fecha de recepción: 2 de noviembre de 2012
Fecha de aceptación: 25 de septiembre de 2013

Resumen

Presentamos resultados parciales del diseño e implementación de una actividad de estudio e investigación, para la enseñanza de ángulos inscriptos en una circunferencia en la escuela secundaria argentina. Con fundamento en la Teoría Antropológica de lo Didáctico se diseñó un modelo epistemológico de referencia, en el que se describieron nociones que le dan sentido al estudio de ángulos inscriptos en una circunferencia. Dicho modelo constituyó la base para el diseño de la actividad de estudio e investigación. La implementación se realizó en un curso de tercer año de la escuela secundaria. Se involucró a los estudiantes en un nuevo tipo de trabajo, que implicó modificaciones a nivel de mesogénesis, topogénesis y cronogénesis. En particular, los estudiantes resolvieron situaciones que les permitió explorar, conjeturar y validar.

Palabras clave

Escuela secundaria, Didáctica, Enseñanza, Actividad de Estudio e Investigación, Geometría, Ángulos, Circunferencia

Abstract

We show partial results of the design and implementation of a study and research activity, for the teaching of inscribed angles in a circumference at the high school Argentine. Based on the Anthropologic Theory of the Didactic we designed a reference epistemological model, in which is described notions that to give meaning to the study of inscribed angles in a circumference. The model was the stand for design of the study and research activity. We realized the implementation in a third year course of high school. The students were involved in a new kind of work, which implied changes a mesogenesis, topogenesis and chronogenesis level. In particular, students solved situations that allowed them to explored, to conjecture and validate.

Keywords

High school, Didactic, Teaching, Study and Research Activity, Geometry, Angles, Circumference

1. Introducción

La geometría es considerada como uno de los pilares de formación académica y cultural de las personas, tanto por su aplicación en diversos contextos (Báez e Iglesias, 2007), como por su contribución al desarrollo de habilidades como conjeturar, razonar deductivamente y argumentar de manera lógica en procesos de prueba o demostración (Jones, 2002).

En los últimos años, la enseñanza de la geometría ha ganado interés por numerosos investigadores (Ancochea, 2011; Báez, Iglesias, 2007; Barrantes, Blanco, 2005; Espinoza, Barbe y Dinko, 2007; Gamboa y Ballestero, 2010; Gascón, 2002, 2003; Itzcovich, 2005; Roditi 2004; entre otros). En particular, el estudio de la geometría ha perdido espacio y sentido, tanto en escuelas como en la formación docente. De esta manera, se imposibilita a los estudiantes conocer otro modo de pensar, que supone la posibilidad de utilizar propiedades de los objetos geométricos para poder anticipar relaciones no conocidas, así como inferir y producir nuevas propiedades (Itzcovich, 2005). Investigaciones realizadas por Abrate, Delgado y Puchulu (2006) y Espinoza et *al.* (2007), indican que los docentes priorizan la enseñanza en áreas de la matemática que excluyen a la geometría, y se desplazan dichas nociones al final de los cursos. Esto implica la exclusión del estudio de nociones de geometría o la realización de un estudio superficial de las mismas.

En particular, en la educación secundaria las nociones de geometría son presentadas a los estudiantes como el producto acabado de la actividad matemática (Gamboa y Ballesteros, 2010; Ancochea, 2011). Esto se corresponde con una de las difusiones de la actividad matemática que se lleva a cabo en el seno de las instituciones escolares actuales: la *monumentalización de los saberes* (Chevallard, 2004). La misma es producto del olvido de la razón de ser de la mayoría de las praxeologías matemáticas que se construyen en el aula, y se manifiesta con la ausencia escolar de las principales cuestiones que dan origen a su estudio.

Las líneas recientes de investigación que propone la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999; 2004, 2006, 2007, 2009a, 2009b) plantea la necesidad de introducir en los sistemas de enseñanza proceso de estudio funcionales. Las *Actividades de Estudio e Investigación* constituyen dispositivos didácticos que retoman la preocupación de la reconstrucción funcional de los saberes matemáticos, como respuesta a ciertas cuestiones fundamentales. En este trabajo, presentamos resultados del diseño e implementación de una Actividad de Estudio e Investigación, que buscó recuperar las principales cuestiones para el estudio de ángulos inscriptos en circunferencia en la escuela secundaria argentina.

2. El diseño curricular de matemática en la educación secundaria y la enseñanza de ángulos inscriptos en circunferencias

En el diseño curricular de matemática para la educación secundaria de la provincia de Buenos Aires (Dirección General de Cultura y Educación, 2008, 2009), se propone el estudio de ángulos inscriptos en circunferencia en segundo y tercer año, destinado a alumnos entre 13 y 15 años. En particular, en el bloque de *geometría y magnitudes* del diseño de segundo año, se propone el estudio de *lugar geométrico*, y en especial de la *circunferencia*. Se plantea reconocer ángulos centrales, inscritos y semiinscriptos en una circunferencia, así como explorar y validar sus propiedades. Una vez reconstruidas dichas propiedades, se sugiere el cálculo de las medidas de ángulos, para emplear las mismas como entorno tecnológico.

Por otro lado, en el diseño de tercer año, en el bloque *geometría y magnitudes*, se propone el estudio de *figuras planas*. Se sugiere plantear problemas tales que permitan revisar los conocimientos previos de los estudiantes sobre ángulos en la circunferencia. Por ejemplo, tareas que permitan el análisis de figuras, tales como la identificación de ángulos inscritos, centrales, pares de ángulos inscritos con el mismo ángulo central correspondiente.

Destacamos que el estudio propuesto en ambos diseños curriculares, sobre ángulos inscriptos en circunferencias, se encuentra desarticulado con relación a las restantes nociones que se proponen estudiar. Se sugiere el inicio del estudio en segundo año de la secundaria, y que se retome al año siguiente solo a modo de revisión. En el diseño curricular de tercer año, no se proponen tareas en las que se cuestionen las técnicas y tecnologías estudiadas en el año anterior, con la intención de modificarlas y proseguir en la elaboración de nuevas.

El estudio de ángulos inscriptos en circunferencias gesta un entorno tecnológico que justifica, en parte, el estudio de las propiedades y relaciones de los cuadriláteros cíclicos. Dichas nociones se encuentran excluidas del diseño curricular de la escuela secundaria, y son en ellas donde consideramos que cobra sentido el estudio de ángulos inscriptos en circunferencias.

3. Marco Teórico

En este trabajo se adopta como referencial teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico y sus últimos desarrollos (Chevallard, 1999, 2004, 2006, 2007, 2009a, 2009b). El constructo teórico fundamental de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), es la noción de *praxeología* u *organización matemática* (OM). Estas emergen como respuesta a una cuestión o conjunto de cuestiones problemáticas que se denominan *cuestiones generatrices*. Las praxeologías constan de dos niveles:

- El nivel de la *praxis* o del *saber hacer*, que engloba un cierto *tipo de tareas*, así como las *técnicas* para resolverlos.

- El nivel del *logos* o del *saber*, en el que se sitúan los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan, los que reciben el nombre de tecnología. Dentro del saber se postula un segundo nivel de descripción-explicación-justificación (esto es, el nivel tecnología de la tecnología) que se denomina teoría.

Junto a las OM, se distinguen las formas de organizar la enseñanza escolar de la matemática, que se describen en términos de praxeologías didácticas. La consideración de los diversos procesos que conciernen a la construcción matemática permite identificar aspectos invariantes, es decir, momentos que estructuran cualquier proceso de elaboración matemática, independientemente de sus características culturales, sociales, individuales o de otra índole. Así, el proceso de estudio se sitúa en un espacio determinado por seis *momentos didácticos*: el momento del primer encuentro con un determinado tipo de tareas; el momento exploratorio del tipo de tareas; el momento de construcción de un entorno tecnológico-teórico, que explica y justifica las técnicas puestas en funcionamiento y permite la elaboración de nuevas técnicas; el momento de trabajo de la técnica, que provoca la evolución de las técnicas existentes y la construcción de nuevas; el momento de la institucionalización, que delimita y precisa aquellos elementos constituyentes de la organización matemática construida; el momento de la evaluación de la praxeología construida.

Siguiendo las líneas recientes de investigación que propone la TAD, se plantea la necesidad de introducir en los sistemas de enseñanza procesos de estudio *funcionales*, donde los saberes no constituyan *monumentos* que el profesor *enseña* a los estudiantes, sino herramientas materiales y conceptuales, útiles para estudiar y resolver situaciones problemáticas. Las *Actividades de Estudio e Investigación* (AEI) emergen como *modelo didáctico* para abordar la problemática. De esta manera, se trata de superar la estructura binaria clásica de la enseñanza de la matemática, que se caracteriza por la presentación de elementos tecnológicos – teóricos y luego tareas como *medio* para la aplicación de los primeros.

Una AEI es, en principio, una organización didáctica donde la clase, bajo la dirección de un profesor, va a hacer estudiar, reconstruir y hacer accesible a los alumnos una cierta *Organización*

Matemática Local[1] (OML). Para esto es necesario partir de una cuestión generatriz *Q* cuyo estudio produzca la elaboración de una respuesta *R*, y esta contenga los elementos esenciales de la OML inicial. De esta manera, las AEI constituyen un proceso de estudio praxeológicamente finalizado, pues se impone la condición de que *R* contenga los principales componentes de una OML previamente determinada y conocida de antemano por la institución escolar.

Una enseñanza por AEI permite comenzar a enfrentar el problema de la monumentalización de los saberes. Supone un cuestionamiento fuerte del contrato didáctico tradicional de la secundaria y cambios a nivel de mesogénesis, topogénesis y cronogénsis (Chevallard, 1985, 2009b). Implica básicamente el estudio de cuestiones suficientemente ricas, vivas y fecundas que provoquen en los estudiantes la necesidad de seguir aprendiendo, y que facilite abrir un proceso de investigación, que permita explorar, conjeturar y validar.

4. Metodología

Proponemos una investigación cualitativa, de corte exploratorio y descriptivo. Se describen las características de un dispositivo didáctico diseñado en una pedagogía de AEI para la escuela secundaria, y se presentan algunos resultados de su implementación. La AEI propuesta se compone de nueve situaciones en las que se involucra el estudio de ángulos inscriptos en la circunferencia.

Según el referencial teórico asumido, como actividad previa al diseño de la AEI es necesario elaborar un Modelo Epistemológico de Referencia (Bosch y Gascón, 2010). Dicho modelo es elaborado por el investigador para realizar su estudio y no necesariamente coincide con la OM sabia de la que proviene, aunque se formula en términos próximos a ésta y a la OM a enseñar. Este modelo tiene un carácter provisional, pues con fundamento en la Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1985) no existe un sistema de referencia privilegiado desde el que se observe, analice y juzgue los saberes, pero se trata de una hipótesis de trabajo que es constantemente contrastada y revisada (Gascón, 2011). Con fundamento en las cuestiones cruciales propuestas en el Modelos Epistemológico de Referencia (MER) se diseñó la AEI.

4.1. Descripción del curso en el que se implementó la AEI

El curso en el que se implementó corresponde al tercer año de una escuela de educación secundaria argentina. El grupo estaba constituido por 24 alumnos, cuyas edades oscilaban entre los 14 y 15 años. Este grupo, en segundo año solo había estudiado la identificación de ángulos inscriptos y centrales en circunferencias, cuyas nociones son fundamentales para el desarrollo de la AEI propuesta.

Al momento de implementar, en el curso predominaba una enseñanza tradicional. El protagonista del proceso de estudio era el profesor: es quien proponía las tareas, las técnicas y las

[1] Chevallard (1999) introdujo la distinción de diferentes tipos de OM, según el grado de complejidad de sus componentes:

- *Organizaciones Puntuales* (OMP): Están generadas por lo que se considera en la institución como un único *tipo de tarea* y está definida a partir del bloque práctico-técnico.
- *Organizaciones Locales* (OML): Es el resultado de integrar diversas praxeologías *puntuales*. Cada praxeología *local* se caracteriza por una *tecnología* que sirve para justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las técnicas de todas las praxeologías *puntuales* que la integran.
- *Organizaciones Regionales* (OMR): Se obtienen mediante la coordinación, articulación y posterior integración de diversas praxeologías *locales* a una teoría matemática en común.
- *Organizaciones Globales* (OMG): Surgen al agregar varias praxeologías regionales a partir de la integración de diferentes teorías.

validaba. Esto implica una reducción del topos del alumno a hacer y decir lo que indica el profesor. Las clases se desarrollaban en 3 encuentros semanales (2 encuentros de 60 minutos y un encuentro de 120 minutos), y los estudiantes se encontraban dispuestos en equipos de trabajo compuestos por 2 o 3 integrantes.

Durante la implementación de la AEI, se trató de instalar una dinámica de estudio en correspondencia con el marco teórico adoptado en la investigación. Las clases se focalizaron en que los estudiantes propongan las técnicas para resolver las situaciones y que justifiquen sus producciones. Posteriormente a la resolución de cada situación, se realizaron discusiones de las propuestas brindadas por cada grupo, lo que permitió confrontar las distintas resoluciones y evaluar las técnicas construidas. Los debates permitieron realizar una síntesis de lo aportado por los alumnos y así institucionalizar los nuevos saberes reconstruidos.

4.2. Recolección de registros y análisis

En la implementación el profesor tuvo carácter de observador participante. Se registró en audio general cada una de las sesiones que involucró la implementación, y el profesor realizó notas de campo antes y después de cada sesión. En todas las clases, el profesor proporcionó a los estudiantes las tareas a resolver y al finalizar cada sesión, recogió la totalidad de las producciones escritas. Se escanearon y se devolvieron a los estudiantes en la sesión inmediata siguiente, para garantizar que los alumnos no realizaran modificaciones a sus resoluciones luego de cada sesión, para asegurar la continuidad de su trabajo y para que ellos dispongan permanentemente de sus registros. Para analizar los protocolos se los segmentó en episodios correspondientes a cada situación. En este trabajo se indican algunos resultados de la implementación de la AEI, y los efectos producidos en un curso habituado a la enseñanza demarcada por el paradigma de la monumentalización de los saberes.

5. Modelo Epistemológico de Referencia

En este apartado se describe un *Modelo Epistemológico de Referencia* (MER) en relación a las propiedades y relaciones de los cuadriláteros cíclicos, que se gesta a partir de la *cuestión generatriz* Q_0 : *¿Cuáles son las propiedades y relaciones de los cuadriláteros cíclicos?*

Un cuadrilátero es cíclico si está inscripto en una circunferencia, es decir si todos sus vértices están sobre ella. La condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea cíclico es que los ángulos opuestos sean suplementarios. La *cuestión* Q_0 aquí es concebida en sentido fuerte, es decir, una *cuestión problemática que debe ser estudiada*, y no se puede responder dando una simple información. Se requiere una respuesta basada en la construcción de OMs, es decir, un conjunto de tareas, técnicas, definiciones, propiedades que permiten describir y justificar el trabajo realizado. A partir de la cuestión generatriz inicial, se derivaron siete OMs relacionadas y fundamentales para el estudio de cuadriláteros cíclicos. En la figura 1 se indican las OM_i, que integran al MER, junto al tipo de tareas que las representan (Γ_i), y las relaciones que se establecen entre ellas.

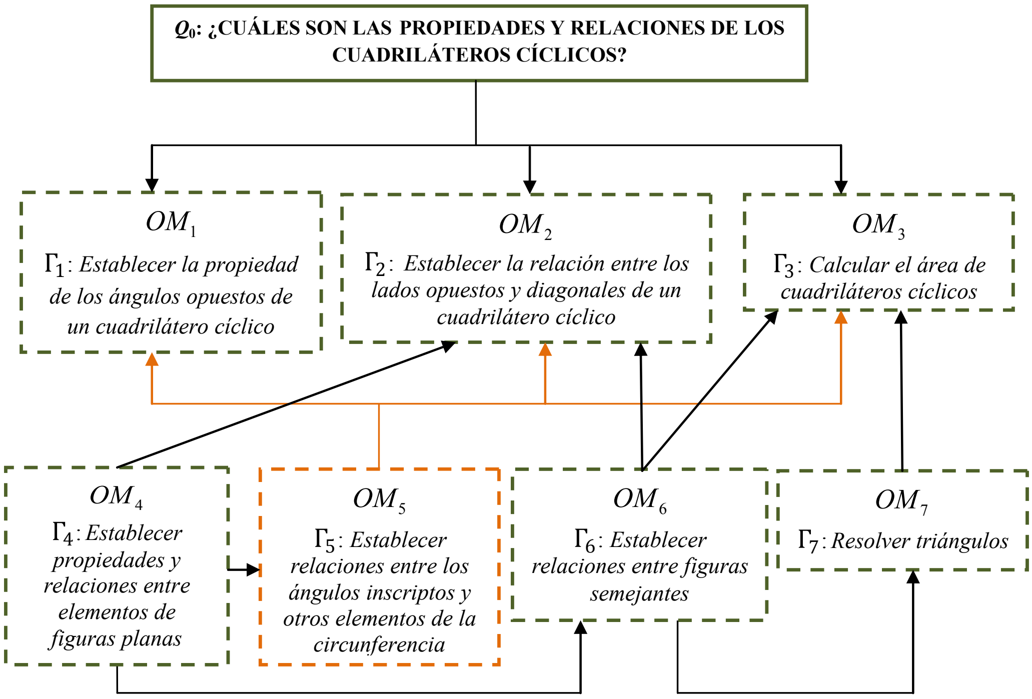


Figura 1. Modelo Epistemológico de Referencia

En particular, el estudio del tipo de tareas que compone a OM_1 conduce a estudiar la propiedad de los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico. Es decir, su estudio permite establecer que los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico son suplementarios. La OM_2 lleva al estudio de la relación entre los lados opuestos y diagonales de un cuadrilátero cíclico. Esta relación, corresponde al Teorema de Ptolomeo: *En todo cuadrilátero inscribible en una circunferencia, la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de sus diagonales*. La OM_3 conduce al estudio de la expresión del área de un cuadrilátero cíclico, que se denomina fórmula de Brahmagupta. La fórmula se puede obtener a partir del teorema del coseno y teniendo en cuenta que los ángulos opuestos del cuadrilátero cíclico son suplementarios. De esta manera, el hacer del tipo de tareas que involucra OM_1 ($\mathbf{\Gamma_1}$: *Establecer la propiedad de los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico*), OM_2 ($\mathbf{\Gamma_2}$: *Establecer la relación entre los lados opuestos y diagonales de un cuadrilátero cíclico*) y OM_3 ($\mathbf{\Gamma_3}$: *Calcular el área de cuadriláteros cíclicos*) consolidan elementos tecnológicos fundamentales del MER. Mientras que las relaciones entre los ángulos inscriptos y otros elementos de la circunferencia, que emergen del hacer del tipo de tareas que involucra la OM_5 ($\mathbf{\Gamma_5}$: *Establecer relaciones entre los ángulos inscriptos y otros elementos de la circunferencia*) justifican el hacer del tipo de tareas que conforman a OM_1, OM_2 y OM_3.

La OM_4 conduce al estudio de propiedades y relaciones entre elementos de figuras planas. Y La OM_6 conduce al estudio de las relaciones entre figuras semejantes. El hacer del tipo de tareas que involucra la OM_4 ($\mathbf{\Gamma_4}$: *Establecer propiedades y relaciones entre elementos de figuras planas*) y la OM_6 ($\mathbf{\Gamma_6}$: *Establecer relaciones entre figuras semejantes*), consolidan parte de una tecnología que justifica el hacer de OM_2.

La OM_7 conduce al estudio de las relaciones trigonométricas. La tecnología que se gesta en el hacer de la OM_7 (Γ_7: *Resolver triángulos*), junto a la gestada en OM_6 justifica el hacer del tipo de tareas que involucra OM_3.

Así mismo, el estudio de las relaciones entre los ángulos inscriptos y otros elementos de la circunferencia (OM_5), como el estudio de las relaciones entre figuras semejantes (OM_6) requieren de las propiedades y relaciones entre elementos de figuras planas (OM_4). Y el estudio de relaciones trigonométricas, que emergen del hacer del tipo de tareas que constituye a la OM_7, requiere del entorno tecnológico que se gesta en OM_6.

Siguiendo los objetivos de la investigación, a continuación sólo desarrollamos una parte del MER, la cual corresponde a la OM_5. La misma se genera a partir de la cuestión generatriz
Q_0^5 : *¿Cuáles son las relaciones que se establecen entre los ángulos inscriptos en una circunferencia y otros elementos de la misma?*

La OM_5 se sitúa en el nivel de una OM Local (OML), y se encuentra conformada por una articulación de cinco OM puntuales (OMP[2]), que se indican a continuación junto al tipo de tareas (T_i) que las representan.

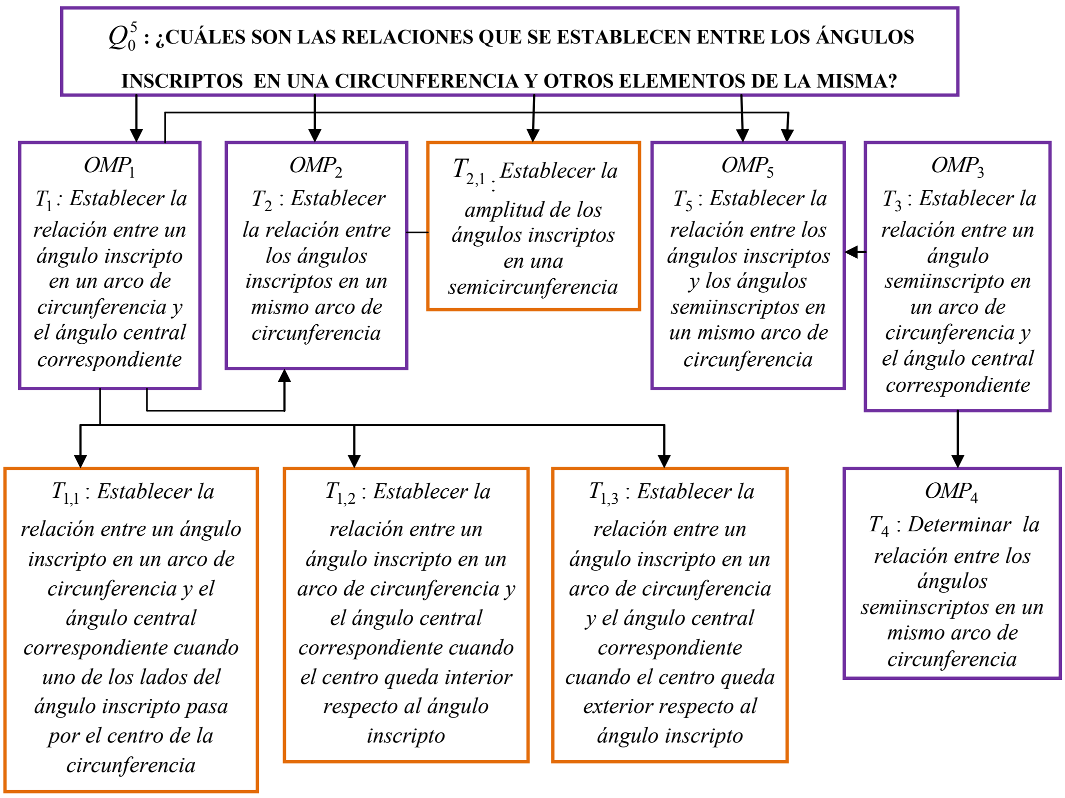


Figura 2. Tipos de tareas que componen a la OM_5

[2] Cada OMP se identifica por OMP_i, siendo i el número de la OMP correspondiente.

La *OMP₁* se encuentra representada por el tipo de tareas T_1: *Establecer la relación entre un ángulo inscripto en un arco de circunferencia y el ángulo central correspondiente*. La técnica para abordar T_1 consiste básicamente, en determinar el ángulo inscripto y el ángulo central correspondiente y establecer relaciones geométricas en los triángulos determinados en el interior de la circunferencia.

Así mismo, T_1 se compone de tres tareas $(T_{1,j})$que comparten ciertas características, pero presentan leves diferencias en cuanto a su hacer, que nos conducen a distinguirlas:

$T_{1,1}$ *: Establecer la relación entre un ángulo inscripto en un arco de circunferencia y el ángulo central correspondiente cuando uno de los lados del ángulo inscripto pasa por el centro de la circunferencia*.

$T_{1,2}$: *Establecer la relación entre un ángulo inscripto en un arco de circunferencia y el ángulo central correspondiente cuando el centro queda interior respecto al ángulo inscripto.*

$T_{1,3}$: *Establecer la relación entre un ángulo inscripto en un arco de circunferencia y el ángulo central correspondiente cuando el centro queda exterior respecto al ángulo inscripto*.

El hacer de estas tres tareas permite concluir en el siguiente teorema:

Todo ángulo central en un arco de circunferencia es igual al doble del ángulo inscripto correspondiente" o "todo ángulo inscripto en un arco de circunferencia es igual a la mitad del ángulo central correspondiente.

El teorema constituye la tecnología fundamental que justifica parte del hacer de las tareas constitutivas de las restantes OM que definen a la OM_5.

La *OMP₂* se encuentra representada por el tipo de tareas $\boldsymbol{T_2}$: *Determinar la relación entre los ángulos inscriptos en un mismo arco de circunferencia*. La técnica para abordar $\boldsymbol{T_2}$ consiste en determinar la amplitud del ángulo central correspondiente a los ángulos inscriptos mediante el resultado tecnológico gestado en *OMP₁*. El estudio de $\boldsymbol{T_2}$ permite consolidar el siguiente resultado tecnológico:

Los ángulos inscriptos en una circunferencia que abarcan un mismo arco de circunferencia son congruentes.

En particular, de $\boldsymbol{T_2}$ distinguimos la tareas $\boldsymbol{T_{2.1}}$: *Establecer la amplitud de los ángulos inscriptos en una semicircunferencia*, su hacer permite concluir en el siguiente resultado tecnológico:

Todos los ángulos inscriptos que abarcan una semicircunferencia tienen una amplitud de 90º.

La *OMP₃* se encuentra representada por el tipo de tareas $\boldsymbol{T_3}$: *Establecer la relación entre un ángulo semiinscripto en una circunferencia y el ángulo central correspondiente*. El hacer de $\boldsymbol{T_3}$ permite consolidar el siguiente resultado tecnológico:

La amplitud del ángulo central es el doble de la amplitud del ángulo semiinscripto.

La OMP_4 se encuentra representada por el tipo de tareas T_4 : *Determinar la relación entre los ángulos semiinscriptos en un mismo arco de circunferencia*. El hacer de T_4 encuentra justificación en el entorno tecnológico gestado en OMP_3 y permite consolidar el siguiente resultado tecnológico:

Los ángulos semiinscriptos en un mismo arco de circunferencia tienen la misma amplitud.

Finalmente, la OMP_5 se encuentra representada por el tipo de tareas $\boldsymbol{T_5}$: *Determinar la relación entre los ángulos inscriptos y los ángulos semiinscriptos en un mismo arco de circunferencia*. El hacer de T_5 encuentra justificación en los resultados tecnológicos gestados en OMP_1 y OMP_3, y permite concluir en el siguiente resultado tecnológico:

El ángulo inscripto y el ángulo semiinscripto en un mismo arco de circunferencia tienen la misma amplitud.

6. La Actividad de Estudio e Investigación

La AEI propuesta se diseñó a partir de considerar los tipos de tarea que representan a OMP_1 y a OMP_2 en el MER. Si bien, la OM_5 contempla otras OMP, el diseño se ajustó a las limitaciones de la institución en la que se implementó el dispositivo didáctico. Al momento de seleccionar un curso para realizar la implementación, nos enfrentamos a la dificultad de disponer de aquel en que los estudiantes conocieran las nociones básicas fundamentales de geometría para abordar las situaciones, y que el profesor del curso estuviese dispuesto a destinar suficiente espacio temporal para el estudio de las nociones que proponemos en la AEI. Así, los tipos de tareas T_1 y T_2 se corresponden inmediatamente con los contenidos establecidos en el diseño curricular y acorde a los tiempos cronológicos propuestos por el profesor del curso que permitió el desarrollo de la investigación.

El estudio de Q_0^5 conduce a la formulación de "cuestiones derivaras" (q_i), que involucran el estudio de tipo de tareas (t_i), a partir de las que se establecen las situaciones que realizarán los estudiantes. El estudio de dichas tareas proporcionan una respuesta (R_i) que en conjunto, contribuyen a la elaboración de la respuesta R a Q_0^5. El siguiente esquema presenta las conexiones entre las respuestas R_i que emergen del estudio de cada t_i.

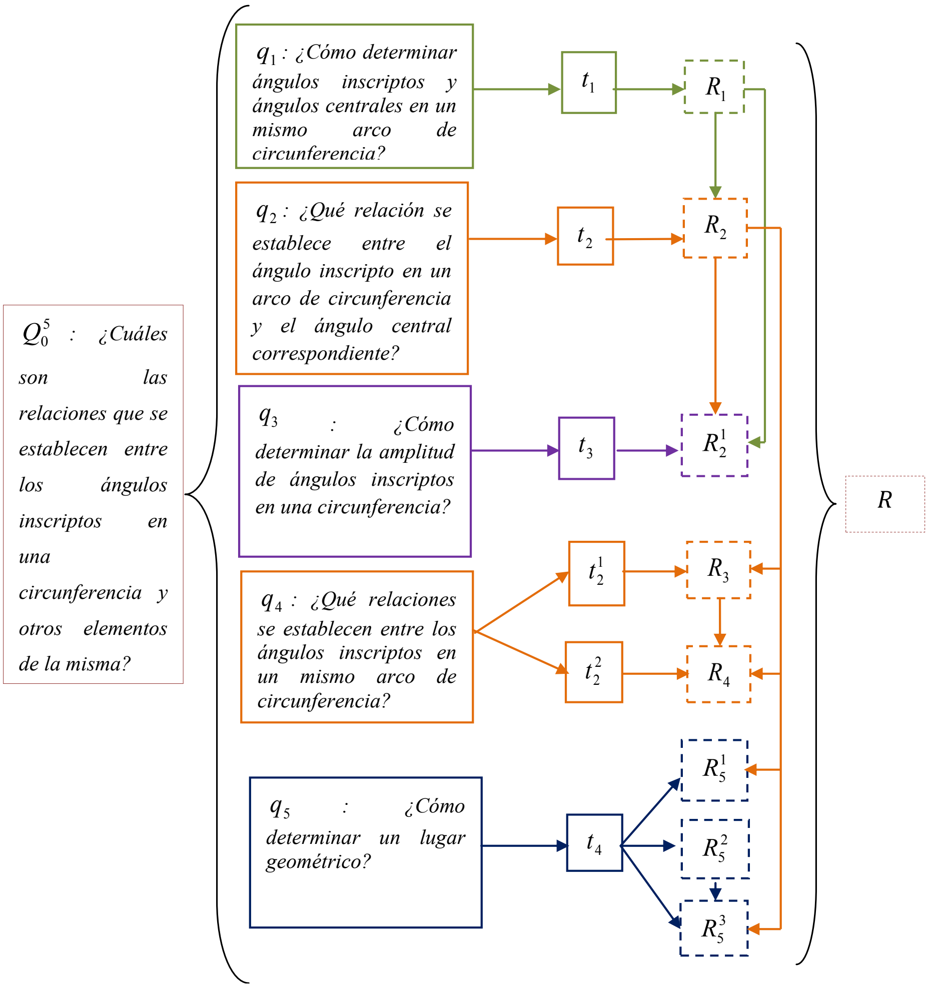


Figura 3. Esquema de la AEI

De Q_0^5 se derivan cinco cuestiones fundamentales. La primera es q_1*: ¿Cómo determinar ángulos inscriptos y ángulos centrales en un mismo arco de circunferencia?*, y conduce al estudio de t_1*: Determinar ángulos inscritos y ángulos centrales en un mismo arco de circunferencia.* El propósito de este tipo de tareas es recuperar el trabajo realizado por los alumnos en años anteriores y alcanzar una mayor comprensión sobre los ángulos inscriptos y centrales determinados en una circunferencia. Este tipo de tareas permite la elaboración de la respuesta R_1*: Al trazar un ángulo inscripto en un arco de circunferencia sólo se puede trazar un único ángulo central cuya amplitud puede ser entre 0° y 360°. Mientras que se pueden trazar infinitos ángulos inscriptos en un mismo arco de circunferencia y pueden tener una amplitud entre 0º y 180º.*

La segunda cuestión que se formula es q_2*: ¿Qué relación se establece entre el ángulo inscripto en un arco de circunferencia y el ángulo central correspondiente?* Esta cuestión conduce al estudio de t_2: *Establecer la relación que existe entre los ángulos inscriptos y los ángulos centrales en un mismo arco de circunferencia*. Este tipo de tareas se corresponde con T_2 definida en el MER.

El estudio de t_2 permite elaborar la respuesta R_2: *Todo ángulo central en un arco de circunferencia es igual al doble del ángulo inscripto correspondiente o todo ángulo inscripto en un* *arco de circunferencia es igual a la mitad del ángulo central correspondiente.* Aquí se establece la relación entre un ángulo inscripto y un ángulo central en un mismo arco de circunferencia, considerando las conclusiones obtenidas en R_1 y otras relaciones y propiedades estudiadas por los alumnos en años anteriores.

La tercera cuestión que se propone es q_3 *: ¿Cómo determinar la amplitud de ángulos inscriptos en una circunferencia?* Esta cuestión conduce al estudio de t_3 : *Determinar la amplitud de ángulos inscriptos en una circunferencia*. Este tipo de tareas se corresponde con T_1 definida en el MER.

La elaboración de la respuesta a q_3 (R_2^1) no aporta nuevos elementos tecnológicos. Para su obtención se requiere del empleo del entorno tecnológico gestado a partir del estudio de t_1, y trabajar sobre la técnica producida en R_2. Así se logra una rutinización y posterior naturalización de dicha técnica.

La cuarta cuestión que se propone es q_4*: ¿Qué relaciones se establecen entre los ángulos inscriptos en un mismo arco de circunferencia?* Esta cuestión conduce al estudio de las siguientes tareas asociadas al tipo de tareas t_2 :

t_2^1 : *Determinar la relación entre ángulos inscriptos en un mismo arco de circunferencia*.

t_2^2 : *Determinar la amplitud de los ángulos inscriptos en una semicircunferencia*.

Con t_2^1 y t_2^2 se busca poner a prueba la potencia de las técnicas institucionalizadas y obtener nuevas respuestas que favorezcan la construcción de una respuesta a Q_0^5 .

Para el estudio de t_2^1 es fundamental el saber que se consolida en R_2, y que permite la elaboración de R_3: *Los ángulos inscriptos en una circunferencia que abarcan un mismo arco de circunferencia son congruentes*. Las respuestas R_2 y R_3 aportan tecnologías para el estudio de t_2^2 y la elaboración de R_4: *Todos los ángulos inscriptos que abarcan una semicircunferencia tienen un amplitud de 90º*.

Finalmente, la quinta cuestión que se formula es q_5 *: ¿Cómo determinar un lugar geométrico?* Esta cuestión conduce al estudio de t_4 : *Definir un lugar geométrico*. Para elaborar una respuesta a q_5 , es fundamental la aplicación de técnicas institucionalizadas en el estudio de las tareas anteriores, y además su estudio permite elaborar tres respuestas que presentan características similares:

La respuesta R_5^1 es elaborada a partir de R_4, y permite determinar la circunferencia que pasa por los vértices de un triángulo rectángulo cualquiera.

La respuesta R_5^2 es elaborada a partir de un trabajo realizado en forma empírica y argumentado con fundamentos provenientes de R_2 . Se justifica la construcción de un conjunto de puntos que surge a partir del conocimiento de un ángulo inscripto.

Y la respuesta R_5^3 es construida considerando las conclusiones obtenidas en la respuesta R_5^2 y en R_2.

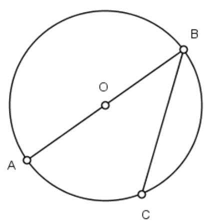
A continuación se presentan las situaciones que se derivan de los tipos de tareas descriptos, y algunos resultados de las producciones de los estudiantes.

6.1. Situación 1

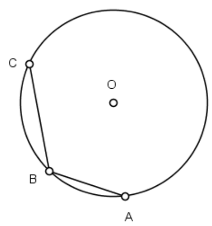
La situación 1 se corresponde con t_1. Su estudio se realizó en la primera sesión, en un encuentro de 120 minutos.

Situación 1

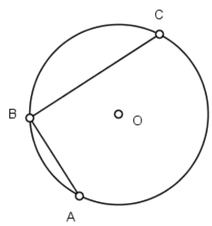
1.1 En los siguientes esquemas se encuentran dibujados ángulos inscriptos en un arco de circunferencia. Dibuja, para cada uno de ellos, un ángulo central que abarque el mismo arco de circunferencia.



Esquema 1

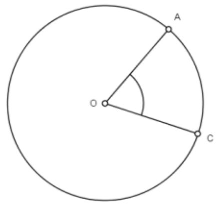


Esquema 2

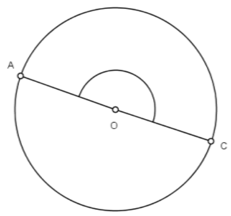


Esquema 3

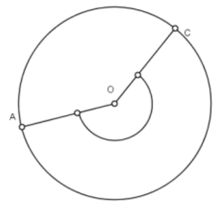
1.2 En los siguientes esquemas se encuentran dibujados ángulos centrales en un arco de circunferencia. Dibuja, para cada uno de ellos, un ángulo inscripto en el mismo arco de circunferencia.



Esquema 4



Esquema 5



Esquema 6

Teniendo en cuenta lo realizado en el ítem 1.1 y 1.2, compara el trabajo con tu compañero y responde:

a) Considerando un ángulo inscripto en un arco de circunferencia, ¿Cuántos ángulos centrales en el mismo arco de circunferencia es posible determinar? Justifica.

b) Considerando un ángulo central, ¿cuántos ángulos inscriptos en el mismo arco de circunferencia es posible determinar? Justifica.

c) ¿Qué amplitud puede tener un ángulo central? ¿y un ángulo inscripto? Justifica.

d) ¿Dónde se encuentra el centro O respecto al ángulo inscripto? Justifica.

En el estudio de esta situación el momento prioritario lo constituyó el momento exploratorio. En principio, los estudiantes manifestaron dificultades para trazar los ángulos inscriptos correspondientes a cada ángulo central. Esto requirió de intervenciones del docente para lograr en los estudiantes recuperar dichas nociones fundamentales para el desarrollo de la AEI. La situación generó la discusión acerca de la unicidad o no de las construcciones de ángulos inscriptos y ángulos centrales en un arco de circunferencia, y de esta manera se preparó el terreno para el acceso de los alumnos en producciones más argumentativas, y todo el proceso deductivo que implican las situaciones que se proponen a continuación.

En particular, en las producciones de los estudiantes no se observan elementos tecnológicos explícitos. Por ejemplo, para el inciso 1.2 a) el Grupo 4 indica:

A- SE PUEDE DETERMINAR UN UNICO ANGULO CENTRAL PARA UN ANGULO INSCRIPTO.

Figura 4. Resolución de la situación 1 1.2 a) por el Grupo 4

En el protocolo se registra una respuesta sin indicar el por qué de la misma. Este tipo de respuesta también fue recurrente en los restantes grupos.

Para el inciso1.2 b), en general, los grupos concordaron con la respuesta aportada por el Grupo 4:

B- SE PUEDE DETERMINAR INFINITOS ANGULOS INSCRIPTOS PARA UN ANGULO CENTRAL.

Figura 5. Resolución de la situación 1 1.2 b) por el Grupo 4

Si bien, en este protocolo los estudiantes emplean términos adecuados para dar respuesta a la consigna, se encuentra carente de justificación. Destacamos que en general, los estudiantes emplearon el término *varios*, *muchos*, *todos los que sean posibles*, para referirse a los infinitos puntos del arco de circunferencia. Esto lo atribuimos a la corta experiencia escolar de los estudiantes en torno al estudio de la noción de infinito, que se debería enriquecer a lo largo de toda la formación secundaria.

Con relación a los restantes incisos que contempla la situación, la respuesta obtenida de los estudiantes fue satisfactoria. En particular, los estudiantes responden a las consignas como si se tratara de una demanda de información del profesor. No se evidencia la necesidad de justificar las respuestas si no es por insistencia del profesor. Esto se logró en las instancias donde se discutieron las respuestas aportadas por los diferentes grupos.

6.2. Situación 2

La situación 2 se origina a partir de t_2. El estudio de la situación se desarrolló en 3 encuentros de 60 minutos cada uno. Esta situación tuvo como propósito reconstruir el teorema que establece la relación entre un ángulo inscripto en un arco de circunferencia y el ángulo central correspondiente. Los alumnos debieron establecer la relación entre ángulos, considerando las distintas posiciones del centro O respecto al ángulo inscripto, y analizadas en la situación 1. En particular, se pretendió que los alumnos recuperaran propiedades conocidas y a partir de ellas elaborar otras nuevas. Pues según Sadovsky, Parra, Itzcovich y Broitman (1998) el hecho de inferir a partir de datos y propiedades, relaciones que no están explicitadas, llevan a establecer los resultados de manera independiente a la experimentación y esto forma parte del trabajo en geometría.

Situación 2

Trazar una circunferencia de centro O y radio r. Ubicar tres puntos (A, B y C) en la circunferencia de tal manera que el ángulo $A\hat{B}C$ sea de 30º y el lado $\overline{AB}$ pase por el centro de la misma. Sin utilizar el transportador, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Es posible determinar la amplitud del ángulo central $A\hat{O}C$? ¿Por qué?

b) Determina un punto D, en el arco $\overline{AB}$ que no contiene al punto C, de tal manera que el ángulo $D\hat{O}C$ sea recto. ¿Es posible conocer el valor del ángulo inscripto $D\hat{B}C$? Justifica.

c) Determina en el arco AC que no contiene al punto B, un punto E de tal manera que el ángulo $A\hat{O}E$ tenga una amplitud de 20º. ¿Es posible determinar la amplitud del ángulo inscripto $E\hat{B}C$? ¿y del ángulo central $E\hat{O}C$? Justifica.

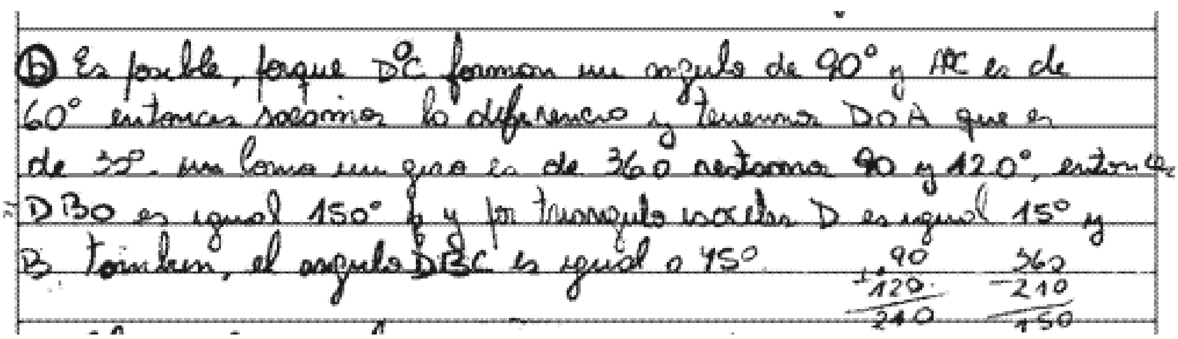
d) ¿Qué relación se establece entre cada ángulo inscripto determinado en los ítems anteriores y el ángulo central correspondiente a cada uno de ellos?

e) ¿Podrías afirmar que dicha relación es válida para todo ángulo inscripto? Justifica.

En general, para el inciso a) los alumnos pudieron determinar la amplitud del ángulo central correspondiente al ángulo inscripto trazado, y recuperaron técnicas provenientes de la situación 1. Esto permitió trabajar con argumentos deductivos llegando al resultado de manera independiente de la experimentación. Para llegar a esta instancia, algunos grupos tuvieron que transitar por la práctica de medir con el transportador para tener una aproximación del valor del ángulo y enfrentarse a que los integrantes de cada grupo obtuvieran diferentes resultados. Esto los hizo desconfiar de lo que se dibuja y se observa, y buscar otras técnicas para dar respuesta. Con esta situación se puso en evidencia que los dibujos son sólo representantes de los objetos geométricos, pues en geometría ver y dibujar no es suficiente.

Como ocurrió en la situación 1, las producciones de los estudiantes se encontraban carentes de elementos tecnológicos explícitos, lo que requirió en las instancias de discusión, constantes intervenciones del profesor para que los estudiantes los indicaran.

En los incisos que siguen se registraron algunas producciones donde los estudiantes explicitaron algunos elementos tecnológicos por iniciativa propia. Por ejemplo, para el inciso b) el Grupo 6 indicó en forma escrita:


b) Es posible, porque DOC forman un ángulo de 90° y AOC es de 60° entonces sacamos la diferencia y tenemos DOA que es de 30°. Como un giro es de 360 restamos 90 y 120°, entonces DBO es igual 150° y por triángulo isósceles D es igual 15° y B también, el ángulo DBC es igual a 15°

90 + 120 = 210
360 − 210 = 150

Figura 6. Resolución de la situación 2 b) por el Grupo 6

Para el inciso c), el Grupo 1 indicó:

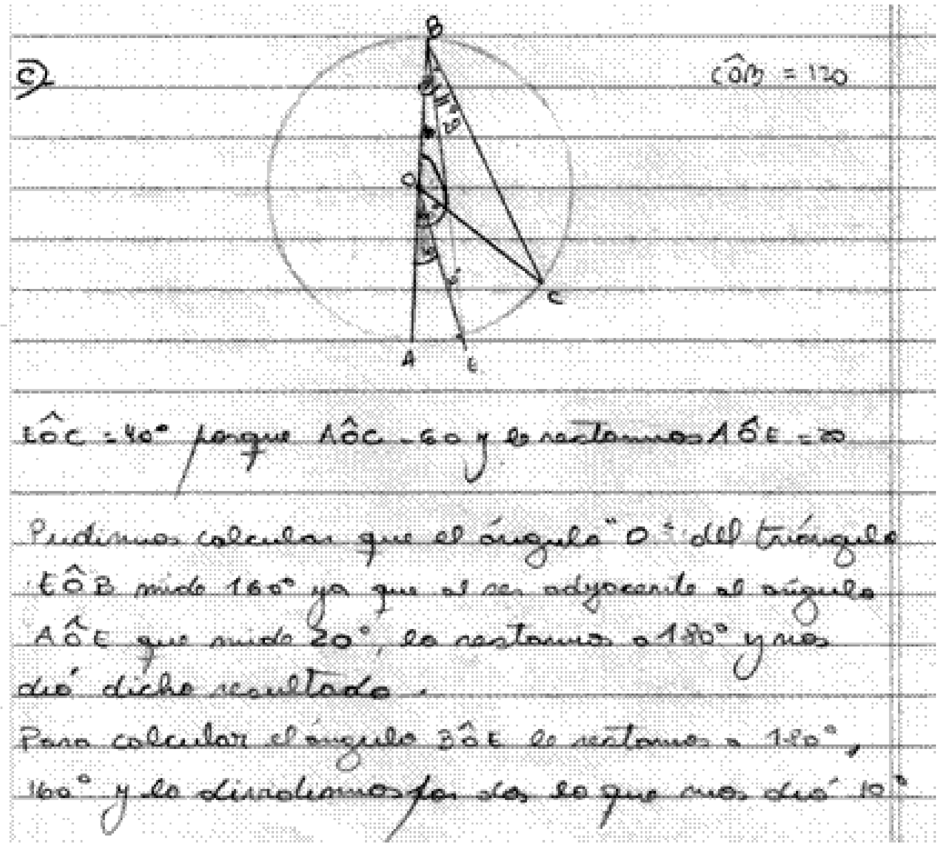


Figura 7. Resolución de la situación 2 c) por el Grupo 1

Estas producciones constituyen un gran avance en relación a lo obtenido en las situaciones anteriores. Los estudiantes comenzaron a evidenciar vestigios de la necesidad de explicitar el entorno tecnológico, sin necesidad de que el profesor lo requiera.

Con relación al inciso d) se logró que los estudiantes revisen sus producciones anteriores y puedan establecer la relación entre ángulos inscriptos y centrales. Mientras que el inciso e) los condujo a cuestionarse la validez de la respuesta dada al inciso d).

La situación 2 permitió a los estudiantes concluir en el siguiente teorema, que constituye una pieza vital en la organización que se reconstruye.

> *Todo ángulo central en un arco de circunferencia es igual al doble del ángulo inscripto correspondiente" o "todo ángulo inscripto en un arco de circunferencia es igual a la mitad del ángulo central correspondiente.*

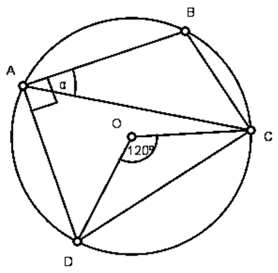
6.3. Situación 3

La situación 3 se gestó a partir de t_3. El estudio se realizó en una sesión de 60 minutos. El objetivo fue hacer vivir el momento del trabajo de la técnica. Se pretendió que los alumnos empleen técnicas que emergieron del hacer de la situación 2 y lleguen a utilizarlas de manera natural.

Situación 3

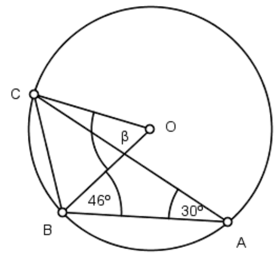
Determina los valores de α y β. Indica los procedimientos utilizados para hallar la solución.

a)



Esquema 7

b)



Esquema 8

Los estudiantes determinaron la amplitud de los ángulos solicitados en la tarea, y justificaron los resultados obtenidos a partir de los datos conocidos y con el apoyo de las relaciones estudiadas, independientemente de la experimentación. En particular, destacamos que el entorno tecnológico explícito en los protocolos continúa siendo incompleto. Esto condujo nuevamente al profesor, en las instancias de discusión, a formular preguntas para que los estudiantes lo hagan explícito. Por ejemplo, encontramos resoluciones como la siguiente:

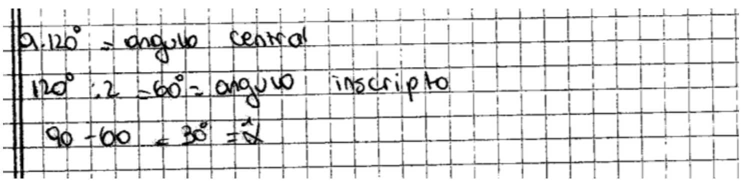


Figura 8. Resolución de la situación 3 a) por el Alumno 4

En el protocolo se indican procedimientos y se da respuesta a la consigna sin explicitar el medio tecnológico que justifica el hacer.

6.4. Situación 4

La situación 4, al igual que la situación 3, se corresponde con t_3. La situación se plantea en forma coloquial, y se pretendió que los alumnos realicen sus propios esquemas y encuentren relaciones entre los elementos involucrados. El estudio de la situación tuvo lugar en un encuentro de 60 minutos.

Situación 4

Resuelve las siguientes situaciones, justificando los procedimientos empleados.

a) ¿Es posible determinar la amplitud de un ángulo inscripto que abarca tres cuartos de circunferencia? ¿Por qué?
b) Si un ángulo inscripto ε es el doble de un ángulo inscripto cuyo ángulo central correspondiente es de 135º ¿Podrías decidir la amplitud del ángulo inscripto ε y del ángulo central correspondiente?

Para dar respuesta al inciso a), en general, los alumnos realizaron un esquema para determinar los tres cuartos de circunferencia y el ángulo que debían calcular. La figura de análisis jugó un papel importante en la situación. Permitió buscar razones y argumentos para justificar la amplitud de ángulos inscriptos, tal como se observa por ejemplo en el siguiente protocolo:

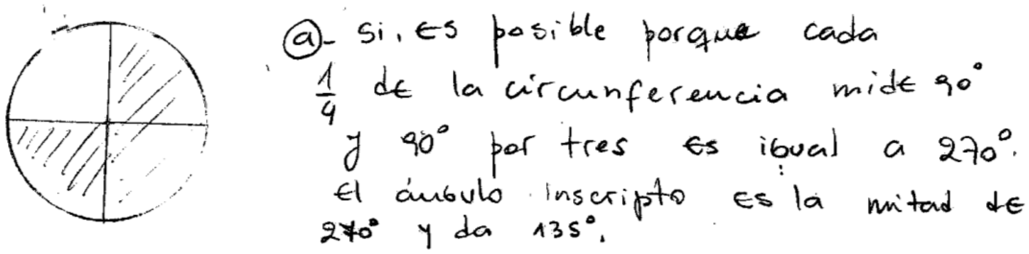


Figura 9. Resolución de la situación 4 a) por el Alumno 5

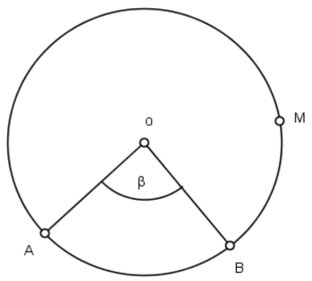
Aquí observamos que el estudiante justificó su propuesta de manera adecuada. Del mismo modo, para el inciso b) las respuestas registradas fueron satisfactorias.

6.5. Situación 5

La situación 5 se originó a partir de t_2^1. El estudio de la situación se desarrolló en un encuentro de 60 minutos.

Situación 5

Dada la siguiente circunferencia de centro O y radio r, β un ángulo central y M un punto de la circunferencia:



Esquema 9

a) ¿Es posible trazar tres ángulos inscriptos, α, ε y π, que tenga como ángulo central el ángulo β? Justifica.
b) ¿Qué relación existe entre las amplitudes de los ángulos inscriptos, α, ε y π? Justifica.

Los estudiantes elaboraron una técnica en base a lo estudiado hasta aquí, lo que provocó la aparición de una nueva tecnología para ser empleada en las próximas situaciones. La toma de decisión acerca de la ubicación de los vértices y los puntos por los cuales deben pasar los lados de los ángulos involucra un razonamiento con tintes deductivos, y promueve la reflexión sobre ciertas condiciones que deben cumplir los ángulos construidos.

En general, los estudiantes comenzaron el trabajo trazando tres ángulos en el esquema dado, como se puede observar en el protocolo del Alumno 19:

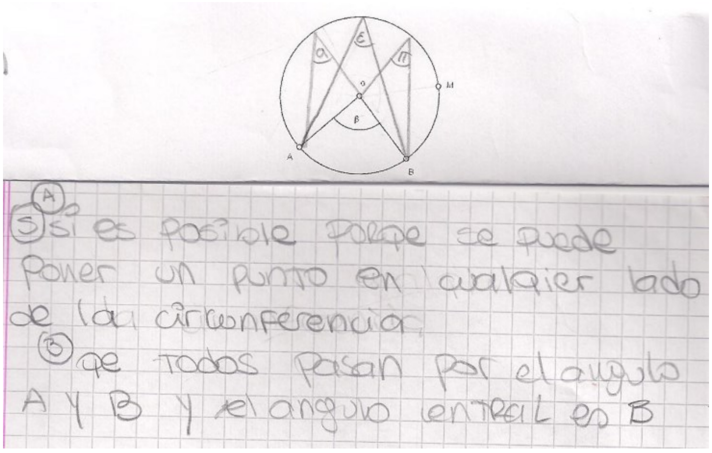


Figura 10. Resolución de la situación 5 por el Alumno 19

En el protocolo, se observa que el alumno ubicó los vértices de los ángulos inscriptos en el arco de circunferencia que contiene a M, aunque la respuesta que se indica es incompleta. Pues no es adecuado considerar cualquier punto de la circunferencia, sino que es necesario explicitar cualquier punto del arco de circunferencia que contiene a M. Por otro lado, la respuesta no se fundamenta utilizando un medio tecnológico explícito. Se pretendía que los alumnos recuperaran elementos tecnológicos de la situación 1. Este tipo de respuesta, recurrente en las producciones de los alumnos, requirió que en la instancia de discusión, interviniera el profesor para que los estudiantes puedan concluir en el siguiente resultado tecnológico:

Los ángulos inscriptos en un mismo arco de circunferencia tienen la misma amplitud.

Luego, para responder a la segunda cuestión, los alumnos recuperaron elementos tecnológicos que emergieron del hacer de la situación 2 y dedujeron que todos los ángulos inscriptos en un mismo arco de circunferencia tienen por ángulo central al ángulo β y por lo tanto tienen la misma amplitud. De esta manera, la tecnología institucionalizada en el hacer de la situación 2, apareció como una necesidad tecnológica para explicar el hacer de la situación 5. Finalmente, se institucionalizó que:

Los ángulos inscriptos en una circunferencia que abarcan un mismo arco de circunferencia son congruentes.

6.6. Situación 6

La situación 6 se corresponde con t_2^2, y el estudio se desarrolló en un encuentro de 60 minutos.

Situación 6

Considera una circunferencia de centro O y radio $\overline{AO}$, el diámetro $\overline{AB}$ y un punto cualquiera C sobre la circunferencia. ¿Podrías determinar la amplitud del ángulo inscripto $\hat{ACB}$? Justifica de dos maneras diferentes.

El objetivo de la situación fue que los alumnos puedan determinar la amplitud de los ángulos inscriptos en una semicircunferencia utilizando elementos tecnológicos que emergen del hacer de las situaciones 2 y 5.

En particular, de los registros obtenidos destacamos las dificultades de los estudiantes para justificar de otra manera el valor del ángulo inscripto. Esto requirió de intervenciones del docente para arribar a una respuesta. Finalmente, en un trabajo conjunto entre los alumnos y el profesor se concluyó en que:

Todos los ángulos inscriptos que abarcan una semicircunferencia tienen una amplitud de 90°.

6.7. Situación 7

Las situación 7 se originó a partir de t_4. Se trata de una situación *abierta* en el sentido de que los alumnos debieron decidir sobre cuáles son los datos y las incógnitas en el enunciado de la tarea. El estudio de esta situación se llevó a cabo en una sesión de 60 minutos.

Situación 7

¿Es posible trazar la circunferencia que pasa por los vértices de un triángulo rectángulo? Justifica.

Los alumnos analizaron los datos con los que debieron construir la figura, determinaron si la construcción era posible o no, y establecieron relaciones entre los datos conocidos y el dibujo a obtener. La toma de decisiones acerca de la ubicación del centro de la circunferencia involucró un razonamiento con argumentos deductivos. Es decir, promovió la reflexión sobre los elementos de un triángulo (lados y ángulos), las relaciones entre éstos y los elementos de una circunferencia (centro, radio, diámetro, ángulo inscripto, ángulo central). Luego de discutir las respuestas aportadas por los diferentes grupos, se concluyó en lo siguiente:

Es posible trazar la circunferencia que pasa por los vértices de cualquier triángulo rectángulo porque para todo triángulo rectángulo la hipotenusa es diámetro de la circunferencia que pasa por los tres vértices.

6.8. Situación 8

Las situación 8 se corresponde con t_4. Con esta situación se acercó a los estudiantes al resultado que se arriba con el estudio de la situación 9. Si bien, lo que se realiza es en principio un trabajo empírico, del que emerge la solución en forma casi inmediata, se involucra a los estudiantes en una actividad de cuestionarse dicho resultado. Esto exigió que los alumnos argumenten a partir de propiedades conocidas. El estudio de esta tarea se realizó en un encuentro de 60 minutos.

Situación 8

En una papel transparente dibuja un ángulo menor que 180º y haz un agujero en el vértice con la punta de un lápiz.

Sobre un papel blanco señala un segmento $\overline{AB}$ y coloca la transparencia sobre el papel blanco de modo que cada lado del ángulo pase por uno de los dos extremos del segmento $\overline{AB}$.

Señala con el lápiz donde queda el vértice para cada solución posible de la transparencia.

¿Podrías inferir qué curva va describiendo el vértice? Encuentren argumentos que expliquen el resultado obtenido.

En general, los estudiantes determinaron que la curva que se va describiendo es un arco de circunferencia. En el momento de argumentar el resultado obtenido, no se registraron elementos tecnológicos explícitos. Las respuestas aportadas por los diferentes grupos no van más allá de indicar lo que se obtuvo mediante el trabajo empírico. Se obtuvieron respuesta como la que se indica a continuación:

La curva es un arco de circunferencia
El resultado lo obtuvimos gracias al ángulo inscripto
realizado anteriormente. Lo pudimos lograr ya que
colocamos los lados del ángulo en el segmento $\overline{AB}$
y lo fuimos moviendo hacia los lados marcando
los puntos y obteniendo un arco de circunferencia.

Figura 11. Resolución de la Situación 8 por el Grupo 2

6.9. Situación 9

Las situación 9 se corresponde con t_4 , y tiene como finalidad que los alumnos, considerando lo realizado en la situación 8, logren trazar un conjunto de puntos sin utilizar la transparencia. El estudio de esta situación se desarrolló en un encuentro de 60 minutos.

Situación 9

Considera un segmento $\overline{AB}$, encuentra, por lo menos, tres puntos P tal que el ángulo $A\hat{P}B$ sea de 60º. ¿Es posible determinar el conjunto de puntos P que cumplen esta condición, sin utilizar la transparencia? Justifica.

Aquí se propuso una situación donde los datos son la amplitud de un ángulo y un segmento, y la incógnita es el arco de circunferencia que representa el conjunto de vértices del ángulo dado, es decir una tarea inversa a la realizada en la situación 3 y en la situación 4. En general, se obtuvieron respuestas como la del Grupo 1.

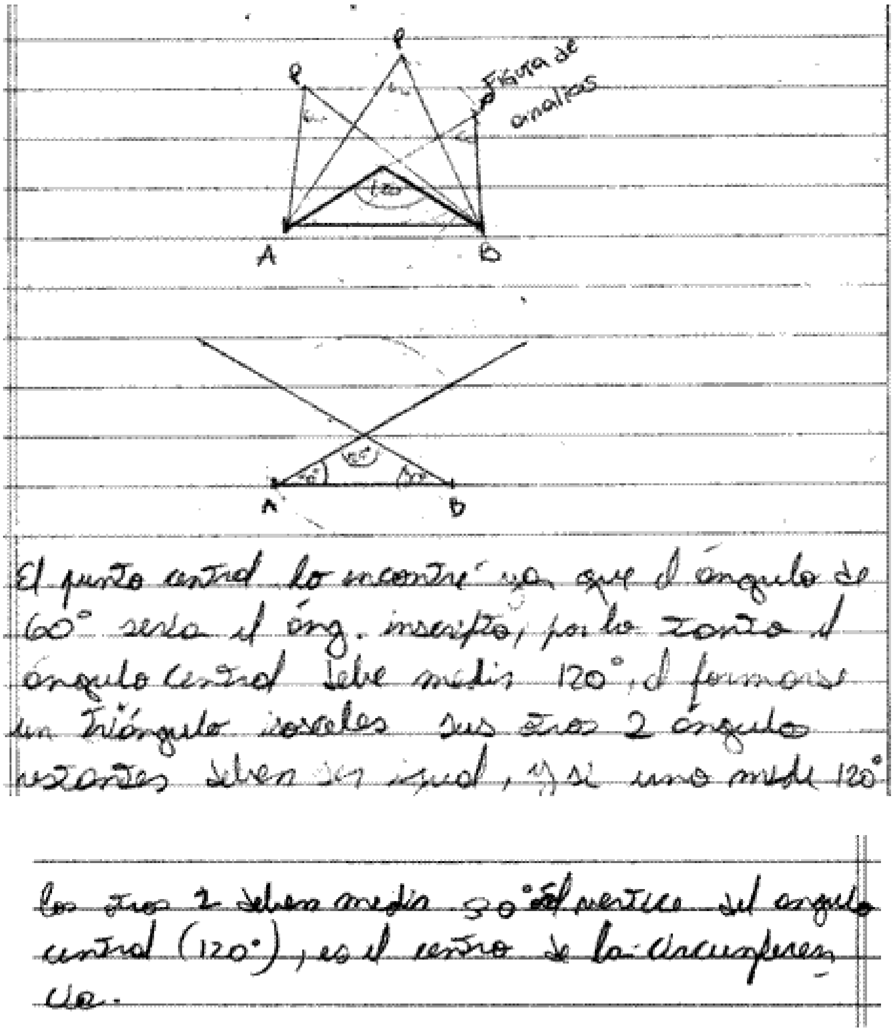


Figura 12. Resolución de la Situación 9 por el Grupo 1

Los alumnos analizaron los datos con los que construyeron la figura, determinaron si la construcción era posible o no, establecieron relaciones entre los datos conocidos y el dibujo a obtener. De esta manera, la presencia de una figura de análisis fue un referente importante en el hacer de la situación.

Los estudiantes pusieron en práctica los elementos tecnológicos institucionalizados hasta el momento y otros objetos matemáticos estudiados. Si bien, los alumnos trazaron un conjunto de puntos, considerando un segmento y el ángulo inscripto dado en el enunciado, en general, no interpretaron el resultado obtenido. En los protocolos se observó que el entorno tecnológico explicitado se encuentra incompleto, y en el hacer de la situación, el profesor tuvo la necesidad de realizar sugerencias que permitan a los alumnos observar el trabajo y establecer relaciones entre los datos considerados.

7. Reflexiones finales

Con fundamento en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, se elaboró y describió las características esenciales de un MER con relación a ángulos inscriptos en una circunferencia. Dicho modelo constituyó la base para el diseño de la AEI.

Se realizó una primera implementación de la AEI, en un curso de tercer año de la educación secundaria argentina, y habituado al estudio de la matemática de manera tradicional. Durante las diferentes sesiones, se involucró a los estudiantes en un nuevo tipo de trabajo, que implicó modificaciones a nivel de mesogénesis, topogénesis y cronogénesis. Con relación a la mesogenésis, se resolvieron situaciones que permitieron desplegar razonamientos propios del trabajo geométrico y que permitió institucionalizar el teorema de ángulos inscriptos en una circunferencia. En particular, los estudiantes dedujeron a partir de los datos y utilizaron propiedades y relaciones que no se encontraban explícitas en las situaciones. Analizaron los datos con los que se debían construir las diferentes figuras, determinaron si la construcción era posible o no, trataron a sus esquemas como figuras generales y no como figuras particulares, establecieron relaciones entre los datos conocidos y el dibujo a obtener, llegando a establecer el resultado independientemente de la experimentación. Esto resultó ser una experiencia sumamente útil en el camino hacia comprender a una figura como el conjunto de relaciones que la caracterizan y que pueden ser enunciadas en un texto.

Con relación a la topogénesis, se buscó que los estudiantes se responsabilizaran de validar las técnicas propuestas. Esto requirió de constantes intervenciones del profesor, pues los estudiantes se manifestaron resistentes a recuperar su topos en el proceso de estudio, como producto de la formación escolar vivida hasta el momento. Esta implementación también puso en evidencia cambios cronogenéticos, en el sentido de que se requirió de mayores períodos de trabajo de los estudiantes para realizar las tareas, porque fueron ellos quienes propusieron las técnicas para resolver.

De nuestro trabajo, destacamos las dificultades para desarrollar un dispositivo didáctico con las características de una AEI en la escuela secundaria, en grupos fuertemente demarcados por el paradigma de la monumentalización de los saberes. Dentro de la ideología de las AEI, no conseguimos darnos suficiente espacio para poder salir del camino que habíamos planeado recorrer y los encuentros que producir. Para los estudiantes resolver una situación es dar respuesta a la demanda del profesor, que se caracteriza por la ausencia de un entorno tecnológico explícito, y de nuevas cuestiones que deriven en la necesidad de seguir estudiando.

Si bien, la noción de AEI es una alternativa incompleta y limitada, consideramos que es una propuesta viable en la escuela secundaria y permite comenzar a enfrentar el problema de la monumentalización de los saberes. Aquí los estudiantes resolvieron situaciones que les permitió explorar, conjeturar y validar. Con la AEI diseñada se produjeron encuentros con una cierta OM que perdió sentido su estudio en la escuela secundaria. Como se indicó en el MER, hay nociones fundamentales que le dan sentido al estudio de ángulos inscriptos en circunferencia y que se encuentran ausente en el diseño curricular de la escuela secundaria. Serían de vital importancia volver a recuperarlas para restablecer la razón de su estudio.

Bibliografía

Abrate, R.; Delgado,G.; Puchulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación* [en linea], 39 (1). Recuperado el 31 de Octubre de 2012, de http://www.rieoei.org/deloslectores/1290Abrate.pdf

Ancochea, B. (2011). Las funciones de las calculadoras simbólicas en la articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica en secuencia. En M. Bosch.; J. Gascón; A. Ruíz Olavarría; M. Artaud; A. Bronner; Y. Chevallard; G. Cirade; C. Ladage; M. Larguier (Eds.). *Un panorama de la TAD* (pp. 533-551). Barcelona: *Centre de Recerca Matemática*

Báez, R. & Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL "El Mácaro". *Enseñanza de la Matemática,* Vols. 12 al 16, Número extraordinario, 67-87.

Barrantes, M. y Blanco, L. J. (2005). Análisis de las concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría. *Números* [en linea], 62, Recuperado el 01 de Noviembre de 2012, de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/62/Articulo02.pdf.

Bosch, M. & Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación". En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.). *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 49-85), Montpellier, Francia: IUFM de l'Académie de Montpellier.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique ; du savoir savant au savoir enseigné*, Paris: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19/2, 221-266.

Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. En linea. Recuperado el 01 de Noviembre de 2012, de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Vers_une_didactique_de_la_codisciplinarite.pdf

Chevallard, Y. (2006). *Steps towards a new epistemology in mathematics education*. En linea. Recuperado el 01 de Noviembre de 2012, de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Steps_towards_a_New_Epistemology.pdf

Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. . En linea. Recuperado el 01 de Noviembre de 2012, de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD-2.pdf

Chevallard, Y. (2009a). *La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD*. En linea. Recuperado el 01 de Noviembre de 2012, de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Cours_de_YC_a_l_EE_2009-2.pdf

Chevallard, Y. (2009b). *La notion de PER: problèmes et avancées*. En línea. Recuperado el 01 de Noviembre de 2012, de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf

Diseño Curricular para la Educación Secundaria 2 año (SB). (2008). Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires. Matemática. [En linea]. Recuperado el 01 de Noviembre de 2012, de http://abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/documentosdescarga/secundaria2.pdf

Diseño Curricular para la Educación Secundaria 3 año (SB). (2009). Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires. Matemática. [En linea]. Recuperado el 01 de Noviembre de 2012, de http://abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/documentosdescarga/dc_ter1_08_cs_matematica.pdf

Espinoza, L.; Barbé, J.; Dinko, D. (2007). El problema de la enseñanza de la geometría en la Educación General Básica chilena y una propuesta para su enseñanza en aula. [En linea]. Recuperado el 01 de Noviembre de 2012, de http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/Comunicaciones_TAD_II/34%20-%20Espinoza_Barbe_congres_TAD_2.pdf

Gamboa, R.; Ballestero, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educaré* [En linea], 14 (2),]. Recuperado el 01 de Noviembre de 2012, de http://www.revistas.una.ac.cr/index.php/EDUCARE/article/view/906.

Gascón, J. (2002): Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma* [En linea], 39. Recuperado el 01 de Noviembre de 2012, de http://revistasuma.es/IMG/pdf/39/013-025.pdf.

Gascón, J. (2003). Efectos del *autismo temático* sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría. *Suma* [En linea], 44. Recuperado el 01 de Noviembre de 2012, de http://revistasuma.es/IMG/pdf/44/025-034.pdf.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico El caso del álgebra elemental. *Relime* [En linea], 14 (2), Recuperado el 01 de Noviembre de 2012, de http://www.clame.org.mx/relime.htm.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Buenos Aires: El Zorzal.

Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. En L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics. Perspectives on practice* (pp. 121-139). London: RoutledgeFalmer.

Sadovsky, P.; Parra, C.; Itzcovich, H.; Broitman, C. (1998). *La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo* en Documento de trabajo N° 5. Dirección de Currícula, Secretaría de Educación, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

Roditi, E. (2004). Le Theoreme de lángle inscrita u college analyse dúne seance díntroduction. *Petit x* [En linea], 66. Recuperado el 01 de Noviembre de 2012, de http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/66/66x2.pdf.

Ana Rosa Corica. Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad Nacional de Córdoba en Argentina. Licenciada en Educación Matemática y Profesora en Matemática y Física por la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Investigadora Asistente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Investigadora del Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Docente de la cátedra de Didáctica de la Matemática en la Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA.

Elisabeth Alejandra Marin. Licenciada en Educación Matemática por la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Profesora de Matemática por el Instituto de Formación Docente y Técnica Nº156 "Dr. Palmiro Bogliano". Es docente de Matemática en diversas escuelas de nivel secundario en la ciudad de Azul (Provincia de Buenos Aires).