DERIVADAS CON DERIVE™

Manuel Quintana Perera

Este trabajo no pretende ser una Unidad Didáctica sobre el tema de derivadas. Tampoco un estudio en profundidad sobre las dificultades que encuentran los alumnos en la comprensión de dicho concepto. Simplemente trata de algunas propuestas didácticas que, utilizando las posibilidades del DERIVE™
(en cuanto a capacidad de cálculo y, fundamentalmente, visualización), ayuden, de esto no me cabe duda, a entender mejor el concepto.

Se trata pués de aproximarnos al concepto de derivada basándonos en la idea de derivada como pendiente de una función en un punto.

La primera propuesta trata de la interpretación geométrica del concepto de derivada, es decir, estudiaremos el cálculo de la recta tangente a una función en un punto como límite de las rectas secantes a dicha función que pasan por el punto.

Se supone que el alumno conoce, aunque sea de forma elemental, el programa DERIVE™. Por lo menos el saber como recuperar un fichero, escribir un expresión, abrir una ventana de dibujo y trabajar en ella. Es por ello que no haré una explicación *paso a paso* de todas las operaciones que hay que realizar.

1.- **Concepto de derivada de una función en un punto**

Cargamos primero un fichero de utilidades llamado VECTOR.MTH. Para ello pulsamos **Transfer, Load, Utility** y escribimos el nombre: VECTOR (no hace falta poner la extensión) y **<Enter>**. Observamos que no aparece nada en la *pizarra,* pero las funciones del fichero han sido cargadas en la memoria. Posteriormente vamos a cargar el fichero de trabajo, llamado DERIVADA.MTH, que se encuentra en un disquete pulsando **Transfer, Load, Derive** y escribimos el nombre: A:DERIVADA y **<Enter>**. Observa que aparecen en la *pizarra* una serie de expresiones y funciones que vamos a aprender a utilizar.

ACTIVIDAD 1.- *Hallar la pendiente de la recta tangente a la función f(x) =* x^2 *en el punto de abcisa 1*
En **Author** ponemos la función f(x):=x^2 y pulsamos **<Enter>**

Instituto "Canarias Cabrera Pinto" La Laguna

Luego **Plot, Beside, <enter, Plot** para dibujarla al lado. Vuelve a la *pizarra* pulsanso Algebra o <F1>
Observa las funciones PENDIENTE (a, h) y SECANTE (a, h). *¿Qué representan?*

$$F(x) :=$$

$$PENDIENTE(a,\ h) := \frac{F(a + h) - F(a)}{h}$$

$$SECANTE(a,\ h) := PENDIENTE(a,\ h) \cdot (x - a) + F(a)$$

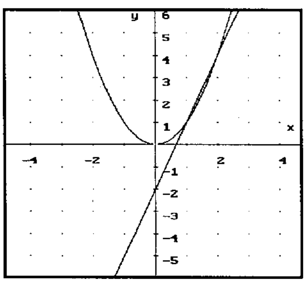
Cambia la notación a decimal con **Options, Notation**, **Decimal** y **<enter>**
En **Author** escribe SEC_DCHA(1, 0.1), aproximamos la expresión resultante con **approX** y luego **Expand** sobre el resultado y nos aparece una tabla como la siguiente: (ver #32)

$$\#32: \begin{bmatrix} 3 \cdot x - 2 \\ 2.9 \cdot x - 1.9 \\ 2.8 \cdot x - 1.8 \\ 2.7 \cdot x - 1.7 \\ 2.6 \cdot x - 1.6 \\ 2.5 \cdot x - 1.5 \\ 2.4 \cdot x - 1.4 \\ 2.3 \cdot x - 1.3 \\ 2.2 \cdot x - 1.2 \\ 2.1 \cdot x - 1.1 \end{bmatrix}$$

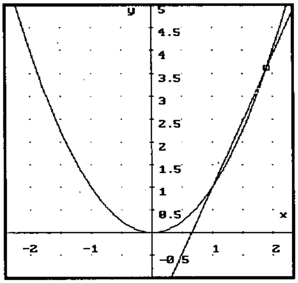
La función SEC_DCHA(a,h):= [VECTOR(SECANTE(a, j h), j, 10, 1, -1)`] nos devuelve el vector de las secantes que pasan por los puntos (a + j h) donde j toma valores desde 10 hasta 1 en pasos de -1. El acento es para que aparezca en columnas (traspuesta)

Para ver como actúa la función contesta a las siguientes preguntas:

¿Qué pendientes tienen la 1ª, 2ª y 3ª rectas que aparecen en la tabla? ¿ Y la décima? ....
....
¿Todas las rectas pasan por el punto (1,1)? . . .
. . . .



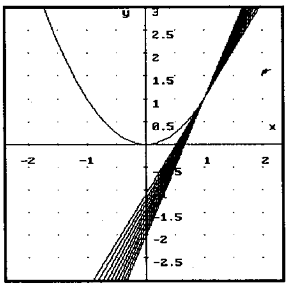
Evidentemente, pasan por otro punto de la curva. Para calcular el punto vamos a dibujar alguna de las rectas. Para ello, sobre la tabla resaltada, pulsamos <→> (cursor a la dcha.), observamos que se nos resalta únicamente la primera recta. Hacemos **Plot, Plot** y nos debe aparecer una gráfica como la de la figura de la izqda:



¿Cuáles son las coordenadas del otro punto de intersección de la recta y la curva? Pulsa **<F3>** y sigue la recta, moviendo el cursor **<→>** o **<←>**, hasta ese otro punto intersección. Observa que los valores de la x e y aparecen en la línea inferior de la pantalla.

Compruébalo analíticamente

Borra la recta con **Delete**, **Last**, vuelve a la *pizarra* pulsando **Algebra** y resalta toda la expresión #32 con la tecla <↑>. Después pide **Plot, <F9>** (para hacer un *zoom* hacia dentro)**, Plot** y observa las rectas que va dibujando.



¿Son las rectas secantes que pasan por puntos cada vez más próximos al (1,1)?

Se puede aplicar también la función SEC_DCHA1(a, h):= CHI(a, x, +∞) . SEC_DCHA(a, h). La función CHI(a, x, b) es la función característica de [a, b]. De esta manera, sólo representa las semirectas secantes. Nos hará falta más adelante.

Vuelve a la pizarra con **Algebra** y en **Author** escribe PEND_DCHA(1, 0.1) y **<Enter>** y luego **approX**, te debe aparecer una tabla como la siguiente:

La función PEND_DCHA(a, h):= VECTOR([a + jh, PENDIENTE(a, j h)], j, 10, 1, -1) nos da las abcisas (a+ jh) y el valor de las pendientes de las secantes en dichos puntos)

1.9	2.9
1.8	2.8
1.7	2.7
1.6	2.6
1.5	2.5
1.4	2.4
1.3	2.3
1.2	2.2

En la columna de la izda. aparecen los valores de la x cada vez más próximos a 1. En la columna de la dcha. aparecen los valores de la pendiente de la recta secante en esos puntos.

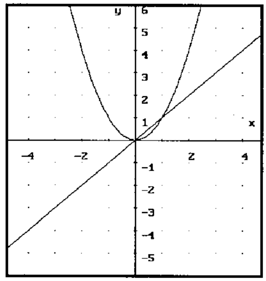
¿Coinciden con los valores obtenidos en SEC_DCHA(1, 0.1)?
¿Se aproximan las pendientes al valor 2.1? Razona tu respuesta
¿Qué ocurre si nos acercamos más al punto 1? Compruébalo construyendo la tabla PEND_DCHA(1, 0.01)

Construye también la tabla PEND_DCHA(1, 0.0001)

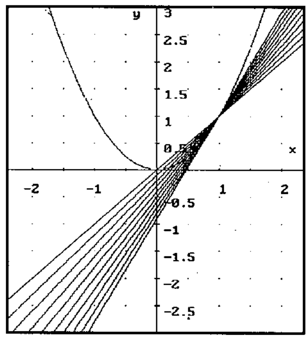
¿Hacia qué valor tienden las pendientes?
¿Qué ocurrirá si nos acercamos al punto 1 desde la izda?

En **Author** escribe SEC_IZDA (1, 0.1) y **<Enter>.** Pulsa luego **approX**

La función SEC_IZDA(a,h):= [VECTOR(SECANTE(a, -j h), j, 10, 1, -1)`] nos devuelve el vector de las secantes que pasan por los puntos (a - j h) donde j toma valores desde 10 hasta 1 en pasos de -1. El acento es para que aparezca en columnas (traspuesta)



Se trata de las rectas secantes por puntos que se aproximan a 1 desde la izda.
Para dibujar una debes borrar primero toda la gráfica anterior con **<F1>**, **Delete, All**. Como puedes observar, se te ha borrado también la gráfica de la función. Para volverla a dibujar pulsa **Algebra**, muévete con el cursor hasta resaltar la función (F(x):=x^2) y pulsa **Plot,Plot**. Vuelve a **Algebra**, resalta la tabla que aparece al aproximar SEC_IZDA(1, 0.1) y con la tecla **<→>** resalta la primera recta. Vuelve a pulsar **Plot, Plot** y observa la recta secante que pasa por los puntos (1,1) y (0,0).



Pulsa **Algebra** y con la tecla <↑> resalta toda la tabla y pulsa **Plot, <F9>, Plot** y observa las rectas que va dibujando.

0	1
0.1	1.1
0.2	1.2
0.3	1.3
0.4	1.4
0.5	1.5
0.6	1.6
0.7	1.7
0.8	1.8
0.9	1.9

Vuelve a la pizarra con **Algebra** y en **Author** escribe PEND_IZDA(1, 0.1) y **<Enter>** y luego **approX**, te debe aparecer una tabla como la de la izda.

La función PEND_IZDA(a, h):= VECTOR([a - jh, PENDIENTE(a, -j h)], j, 10, 1, -1) se comporta igual que PEND_DCHA

En la columna de la izda. aparecen los valores de la x cada vez más próximos a 1 desde la izda. En la columna de la dcha. aparecen los valores de la pendiente de la recta secante en esos puntos.

¿Se aproximan las pendientes al valor 1.9? Razona tu respuesta.
¿Qué ocurre si nos acercamos más al punto 1?Compruébalo construyendo la tabla PEND_IZDA(1, 0.01)
*Construye la tabla PEND_IZDA(1, 0.0001)***¿Hacia qué valor tienden las pendientes?***

En **Author** escribe COMP_PEND(1, 0.001) y **<Enter>**, luego **approX** y observa los resultados:

5:

1.01	2.01	0.99	1.99
1.009	2.00900	0.991	1.99099
1.008	2.008	0.992	1.992
1.007	2.007	0.993	1.99299
1.006	2.00599	0.994	1.99399
1.005	2.005	0.995	1.995
1.004	2.004	0.996	1.996
1.003	2.00299	0.997	1.99699

La función COMP_PEND(a,h):=INSERT_ELEMENT(["Pto dcha", "Pend dcha" ,"Pto izda" ,"Pend izda"] ,APPEND_COLUMNS(PEND_DCHA(a,h) ,PEND_IZDA(a,h)), 1,1) pone las columnas PEND_DCHA y PEND_IZDA una al lado de otra e inserta la fila formada por los encabezados: "Pto dcha" , "Pend dcha" ,"Pto izda" ,"Pend izda" (los textos en DERIVE™ se escriben entre comillas)

¿Podemos concluir que 2 es el límite de las pendientes de las rectas secantes cuando nos aproximamos a x=1? ....

¿Es la recta tangente a la curva $f(x)= x^2$ en el punto (1,1) el límite de las rectas secantes cuando nos aproximamos a 1?

¿Qué pendiente tiene la recta tangente? ¿Cuál será su ecuación?

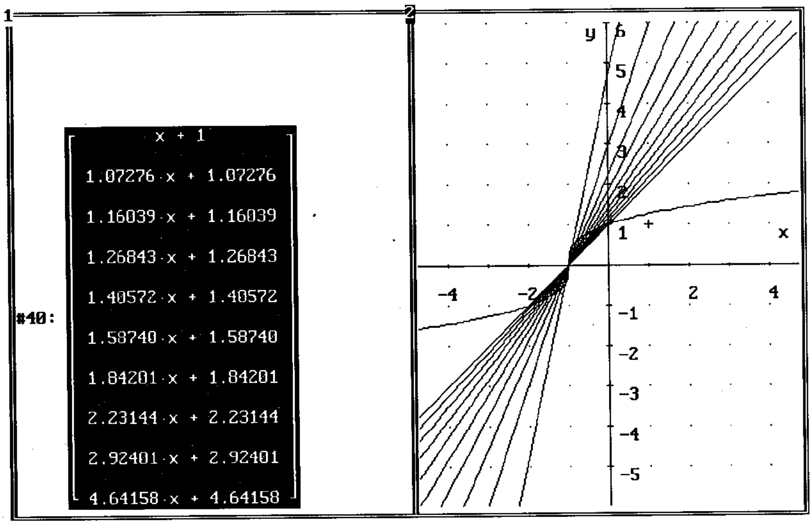
En **Author** escribe LIM (SECANTE(1, h), h, 0) y **<Enter>** (esta función calcula el límite de la recta secante en el punto 1+h cuando h tiende hacia 0). Pulsa **approX** y observa el resultado. ***¿Confirma lo visto anteriormente?***

*En Author escribe LIM (PENDIENTE(1, h), h, 0) y **<Enter>**. Pide **approX.*****¿Tiene alguna relación con lo obtenido anteriormente?***

ACTIVIDAD 2.- Dada la función $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ *, determinar, si es posible, la derivada en el punto a= -1*

Para que dibuje toda la curva debemos primero hacer **Manage, Branch, Real** y **<Enter>** y luego en **Author** escribir la función: F(x):=(x+1)^(1/3) y **<Enter>**

Repite los pasos de la actividad 1, es decir, dibuja la función y calcula SEC_DCHA(-1, 0.1), te debe quedar como la figura:



¿Qué le ocurre a las secantes a medida que nos acercamos, por la derecha, al punto -1?

Pulsa **Algebra** y en **Author** escribe PEND_DCHA(-1, 0.001), **<Enter>** y **approX** sobre la expresión,

¿Qué ocurre con las pendientes de las rectas secantes? ¿Hacia donde tienden?

Si tienes dudas escribe PEND_DCHA(-1, 0.00001). Observa la última fila:

¿Por qué en el punto x= -1 da una pendiente 0 si, al parecer, se observa una tendencia a crecer cada vez más a medida que nos aproximamos a -1?

Observa la función PEND_DCHA, En este caso tenemos:
VECTOR([-1+j x 0.00001], PENDIENTE (-1, j x 0.00001), j, 10, 1, -1)
que va calculando las pendientes de las rectas secantes en los puntos -1+ 10 x 0.00001; -1+9 x 0.00001 ; etc., hasta el último que será -1+ 1 x 0.00001. Pero por falta de la suficiente precisión, redondea este último número, -0.99999, a -1 y calcula la pendiente tomando
F(a+h)= F(-0.99999) = F(-1) con lo que la pendiente se hace 0. Para evitar esto, podemos cambiar la precisión con **Option, Precision, <Tab>, Digits= 10** y **<Enter>** y volver a escribir en **Author** la expresión PEND_DCHA(-1, 0.00001) (o en **Author** pulsar **<F3>** sobre la expresión anterior resaltada) y **<Enter>**. Pide **approX** y observa que el error ya está corregido.

¿Cuál será la recta tangente por la derecha?

Ahora en **Author** escribimos: SEC_IZDA(-1, 0.1). Aproxima y dibuja el resultado. Observa que la figura permanece igual

¿Puedes dar una interpretación a este hecho?

¿Qué le ocurre a las secantes a medida que nos acercamos, por la izquierda, al punto -1?

Aproxima PEND_IZDA(-1, 0.001)

¿Qué ocurre con las pendientes de las rectas secantes? ¿Hacia donde tienden?
¿Coinciden con los valores obtenidos en PEND_DCHA(-1, 0.001)
Si tienes dudas escribe PEND_IZDA(-1, 0.00001)

¿Cuál será la recta tangente por la izquierda? ¿Podemos decir que la función tiene derivada en el punto

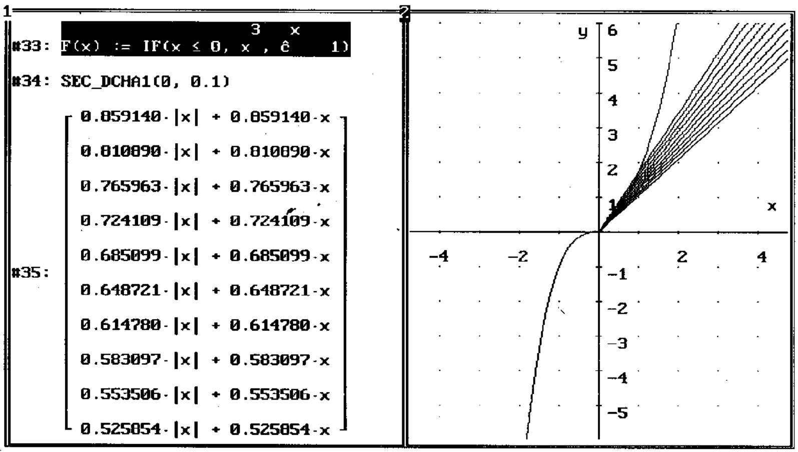
En **Author** escribe LIM (PENDIENTE(-1, h), h, 0, 1) y **<Enter>**. Pide **approX**. (esta función calcula el límite de las pendientes de las rectas secantes en el punto -1+h cuando h tiende hacia 0 por la derecha),
¿Tiene alguna relación con lo obtenido anteriormente?

Author escribe LIM (PENDIENTE(-1, h), h, 0, -1) y **<Enter>**. Pide **approX**. (esta función calcula el límite de las pendientes de las rectas secantes en el punto -1+h cuando h tiende hacia 0 por la izquierda)
¿Tiene alguna relación con lo obtenido anteriormente?

ACTIVIDAD 3.- Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^3 & si\ x\leq 0 \\ e^x-1 & si\ x>0 \end{cases}$, *hallar, si es posible, la ecuación de la tangente en el punto a=0.*

En **Author** escribimos la función: F(x):= IF (x<=0, x^3, ê^x -1) y ↵
El número **e se escribe en DERIVE™ como <alt> + e**
Dibuja la función en el lado derecho de la pantalla

Aproxima y dibuja: SEC_DCHA1(0, 0.1). Te debe quedar la pantalla así:



¿Qué le ocurre a las secantes a medida que nos acercamos, por la derecha, al punto 0? ....

....

Escribe y aproxima PEND_DCHA(0, 0.01)
¿Qué ocurre con las pendientes de las rectas secantes? ¿Hacia donde tienden?

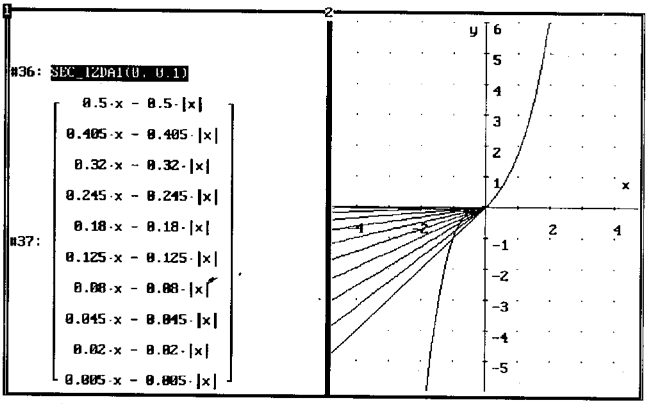
....

Si tienes dudas escribe PEND_DCHA(0, 0.0001).
Observarás que no aparece como una tabla, para ver la línea puedes pulsar la tecla **<→>** sobre la expresión resaltada y observa que se resalta sólo el primer valor. Si sigues pulsando la misma tecla, se te irá trasladando hacia la derecha hasta el final de la línea (también te puedes desplazar con la combinación **<Ctrl> + <→>**).

¿Cuál será la recta tangente por la derecha? ....

....

Pulsa **<F1>** para volver a la ventana gráfica. Borra todo con **Delete, All**. Vuelve a la *pizarra* con **Algebra** o **<F1>**, resalta la función y pulsa **Plot, Plot** para dibujarla.
Volvemos a la *pizarra* con **Algebra** y en **Author** escribimos: SEC_IZDA1(0, 0.1) y **<Enter>**
Pulsamos **approX** y sobre el resultado pulsamos **Plot, Plot**. Observa la figura:



Qué le ocurre a las secantes a medida que nos acercamos, por la izquierda, al punto 0? ....

Escribe y aproxima PEND_IZDA(0, 0.001)
¿Qué ocurre con las pendientes de las rectas secantes? ¿Hacia donde tienden?

....

¿Cuál será la pendiente de la recta tangente? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente por la izquierda? ....

....

¿Se puede decir que la función tiene derivada en 0? ....
En **Author** escribe LIM (PENDIENTE(0, h), h, 0, 1) y **<Enter>**. Pide **approX**. (esta función calcula el límite de las pendientes de las rectas secantes en el punto 0+h cuando h tiende hacia 0 por la derecha)
¿Tiene alguna relación con lo obtenido anteriormente? ....

....

En **Author** escribe LIM (PENDIENTE(0, h), h, 0, -1) y **<Enter>**. Pide **approX**. (esta función calcula el límite de las pendientes de las rectas secantes en el punto 0+h cuando h tiende hacia 0 por la izquierda)

¿Tiene alguna relación con lo obtenido anteriormente? . . . .

. . . .

Se proponen, utilizando el esquema anterior, las siguientes actividades:

Actividad 4.- *Dada la función $f(x)=x^3+1$, hallar, si es posible, la ecuación de la recta tangente en el punto $a=0$.*

Actividad 5.- *Dada la función* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$*, estudiar si tiene derivada en el punto $a=0$*

Actividad 6.- *Dada la función* $f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ x\leq 0 \\ \sqrt{x} & \end{cases}$*, hallar, si es posible, la pendiente de la recta tangente en el punto $a=0$*

VISUALIZAR PROPIEDADES

La tangente como aproximación lineal de una función.-

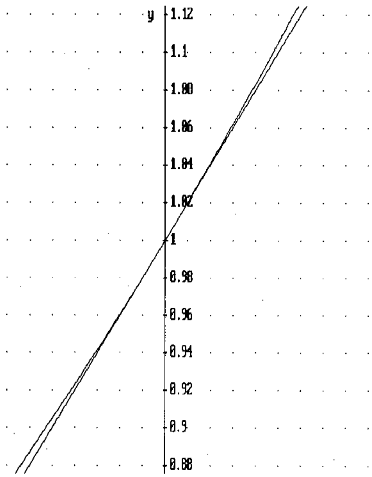
De la interpretación geométrica del concepto de derivada y de las visualizaciones anteriores, podemos observar que si *f* tiene derivada en *a*, *f* se comporta en las proximidades del punto *(a, f(a))* como una recta que pasa por dicho punto y tiene la dirección de la tangente.

Una forma de ver gráficamente la derivabilidad de una función en un punto *a* consiste en representarla en un entorno del punto e ir haciendo *zooms* de aproximación. Si la curva se convierte aproximadamente en una recta, podemos conjeturar que es derivable en el punto. Es decir, *f* es derivable en *a* si es localmente recta en *a*.

Sea la función $f(x) = e^x$. La función TANG(a) calcula la ecuación de la recta tangente en el punto a.

La función TANG(a):=LIM(PENDIENTE(a,h), h, 0) (x-a)+ F(a) calcula la ecuación de la recta tangente a *f* en *a*

Representa la función y su recta tangente en el punto a=0. A la vista de la gráfica, ¿para qué valores de x son muy parecidos los valores de e^x y su tangente en el punto 0?. Pudes pulsar **<F3>** y con las teclas del cursor situarte en el punto (0,1) y hacer varios *zooms* hacia dentro con **<F9>**



No conviene hacer zooms que pasen del orden de 10^{-5} o 10^{6} ya que la precisión de DERIVE en la escala de los ejes es del orden de 10^{-4}. Si se sobrepasa, puede distorsionarse la gráfica. Con **Options, Accuracy, 9** se amplía la precisión de la gráfica, aunque tarda más en dibujarla, pero no resuelve el problema

En **Author** escribe D(0, 1, 0, 0.1) y **<Enter>** que nos devuelve la tabla de la dcha.

"x"	"f (x)"	"tang"	"|f (x)-tang|"
1	2.71828	2	0.718281
0.9	2.45960	1.9	0.559603
0.8	2.22554	1.8	0.425541
0.7	2.01375	1.7	0.313752
0.6	1.82211	1.6	0.222118
0.5	1.64872	1.5	0.148721
0.4	1.49182	1.4	0.0918247
0.3	1.34985	1.3	0.0498587
0.2	1.22140	1.2	0.0214027
0.1	1.10517	1.1	0.00517084
0	1	1	0

La función D(a, m, n, s):= INSERT_ELEMENT(["x", "f (x)", "tang", "∗f (x)- tang∗"], VECTOR([x, F(x), TANG(a), ABS(F(x)-TANG(a)], x, m, n, - s) nos devuelve el vector formado por x, f (x), el valor de la tangente y el valor absoluto de la diferencia entre la función y la tang. cuando x varía desde m (valor máximo) hasta n (mínimo) en saltos de - s

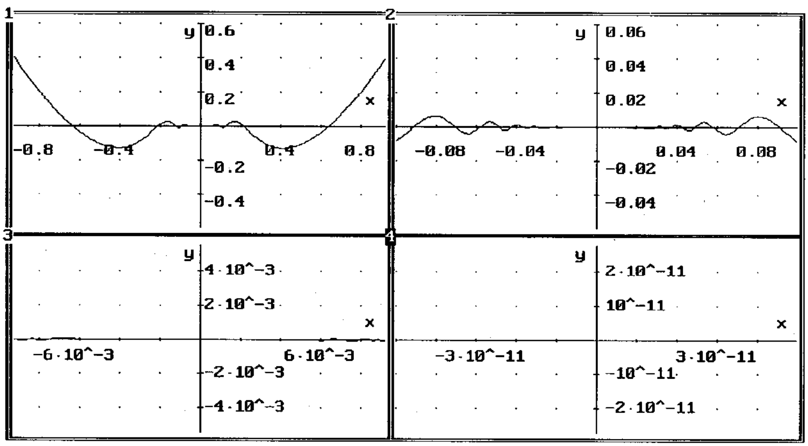
En **Author** escribe D(0, - 1, 0, 0.1) y **<Enter>** que nos devuelve la tabla siguiente:

"x"	"f(x)"	"tang"	"|f(x)-tang|"
-1.6	0.201896	-0.6	0.801896
-1.4	0.246596	-0.4	0.646596
-1.2	0.301194	-0.2	0.501194
-1	0.367879	0	0.367879
-0.8	0.449328	0.2	0.249328
-0.6	0.548811	0.4	0.148811
-0.4	0.670320	0.6	0.0703199
-0.2	0.818730	0.8	0.0187307
0	1	1	0

A la vista de las dos tablas, *qué quiere decir que la tangente a una función en un punto es una aproximación local de dicha función?*

Podemos visualizar la derivabilidad de la función

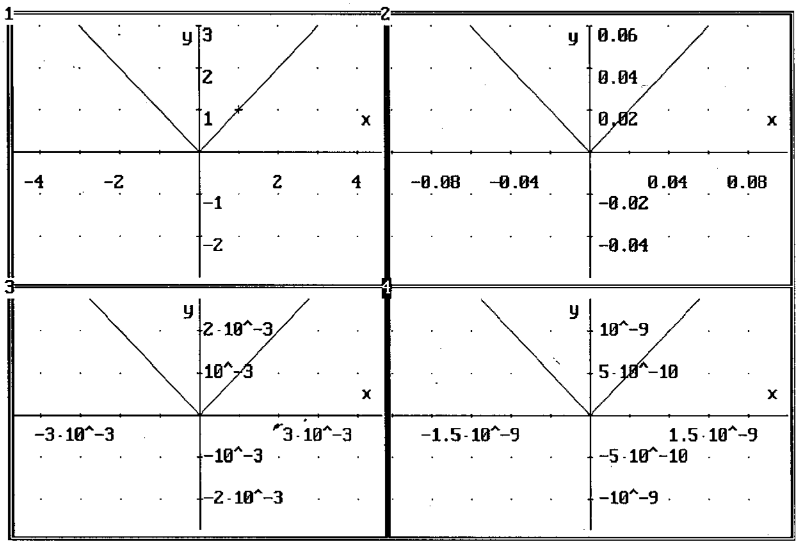
$\Big\{ \quad \left(- \right)$ *en el origen situándonos en el punto y haciendo sucesivos zooms. Dividiendo las ventanas nos queda una pantalla como la siguiente:*



TRANSFERIR IMPRIMIR PANTALLA: imPresora Fichero Opciones

Seleccionar una opción Derive XM
Cross x:0 y:0 Scale x:10^-11 y:10^-11 2D-plot

O bien la no derivabilidad de | x | en el origen:



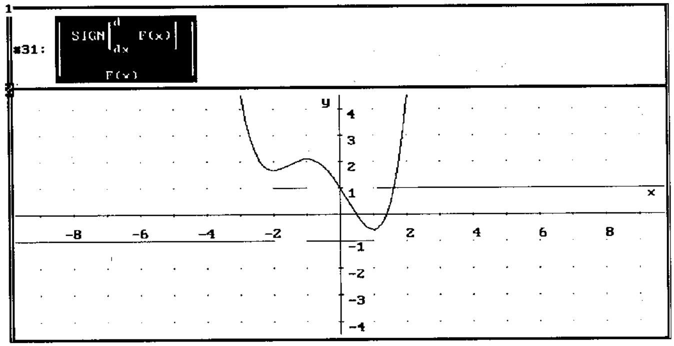
Una forma de dividir la pantalla en 4 es cerrar primero la vectana gráfica con **Window, Close, 2**, **<enter>** (no borrar la pizarra. De todas formas, si nos equivocamos, DERIVE nos pide confirmación antes de borrar las expresiones). Escribimos la función y pulsamos **Plot, Overlay** (para representar en toda la pantalla), **Plot**. Sobre la pantalla gráfica

hacemos **Window, Split, Horizontal, 13, <Enter>** y se nos divide horizontalmente en 2 ventanas. Luego hacemos **Window, Split, Vertical, 39,<Enter>** y se nos divide verticalmente una de las ventanas. Con **<F1>** nos movemos a través de las ventanas (la ventana activa tiene su número resaltado) hasta que lleguemos a la nº 3 y repetimos la división vertical anterior. Situamos la cruz en el origen (con las teclas del cursor o con **Move, 0, <Tab> ,0** y hacemos varios *zooms.* Si queremos volver a la pizarra nos debemos situar en la ventana gráfica nº 1 (que es la asociada a la pizarra actual)

La monotonía y el signo de la 1ª derivada.-

Sea la función $f(x)= x^4 / 4+2 x^3 / 3 -x^2 /2 -2x +1$

Podemos comparar, tal y como se ve en la figura la gráfica de la función y la función *signo* de la derivada.

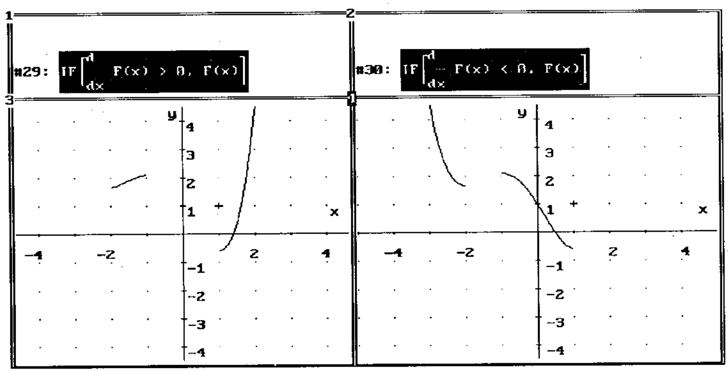


En la pizarra hemos puesto la matriz:
[[SIGN(DIF(F(x), x)],[F(x)]] y luego la dibujamos

Podemos preguntarnos una serie de cuestiones:

¿Cuándo f '(x)>0, f es creciente? ....
....
¿Si f '(x)<0, cómo es f? ....
....
¿ Qué ocurre cuando f '(x)=0? ....

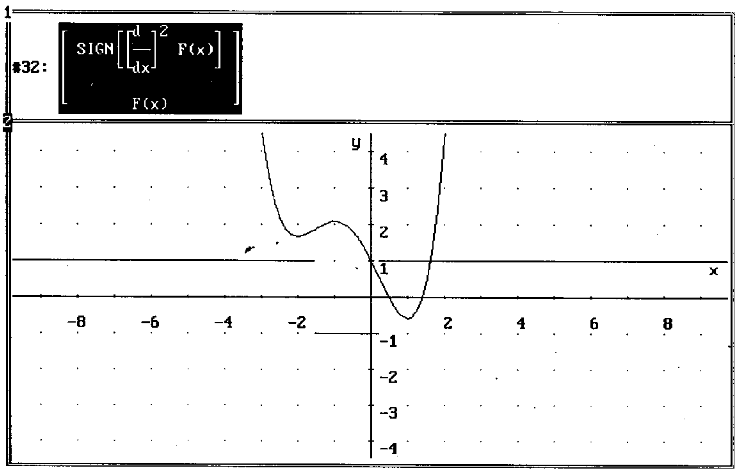
Lo vemos mejor si dibujamos f (x) sólo cuando f '(x) permanece con el mismo signo.Usando las funciones que aparecen en las ventanas 1 y 3 de la figura y dibujándolas tenemos respectivamente las gráficas 2 y 4



Curvatura y signo de la 2ª derivada.-

Usamos la misma función que en el caso anterior.

Podemos comparar, tal y como se ve en la figura la gráfica de la función y el *signo* de la derivada segunda.



Podemos observar una serie de cuestiones:

¿Cuándo f ''(x)>0, qué forma tiene f? ....

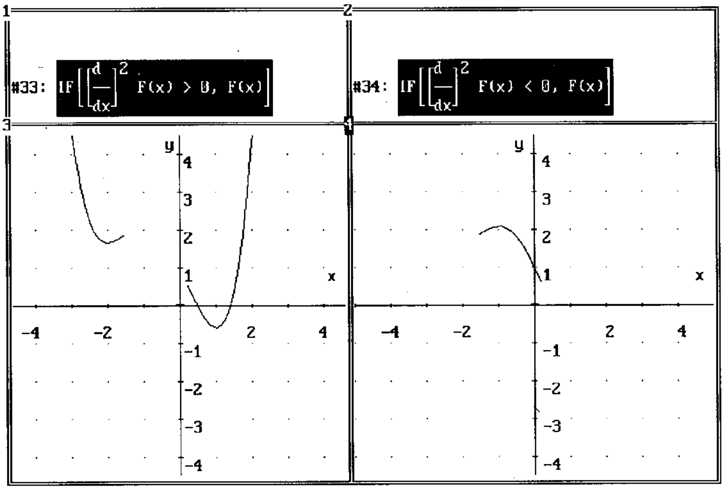
....

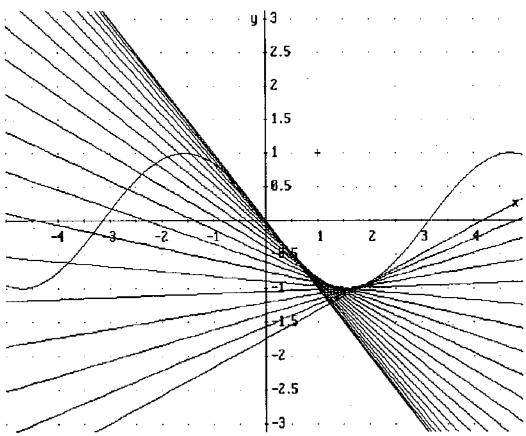
¿Si f ''(x)<0, cómo es f? ....

....

¿ Qué ocurre cuando f ''(x)=0? ....

Representando la función sólo cuando la derivada segunda permanece con el signo constante tenemos:





También podemos visualizar la concavidad y convexidad a través de las tangentes. La función TANGS(p, q, s):= LIM(DIF(F(x),x), x, j, 1) (x-j) + F(j), j, p, q, s) nos da las tangentes a f (x) desde p hasta q en saltos de s. (DERIVE no puede calcular directamente el valor de la derivada en un punto, sólo calcula simbólicamente la función derivada. Por tanto , si queremos calcular la derivada en un punto *a* tenemos que hallar el límite de la derivada cuando x tiende a *a*) En este caso hemos calculado las tangs a -senx desde 0 hasta 2 en saltos de 0,1

¿Cómo afecta la derivada segunda al grado de curvatura? (Es decir, si está más o menos abierta, pegada a la tangente)

Vamos a construir la familia de funciones: VECTOR (j. x^2 , j, 1, 4), que nos devuelve las parábolas: x^2 , 2 x^2, 3 x^2, 4 x^2. Todas pasan por el punto

(0,0) y tienen la misma tangente en dicho punto (y=0). Represéntalas gráficamente.

Calcula la 2ª derivada en cada caso,
¿qué ocurre con el grado de curvatura y el valor de la 2ª derivada? . . . . .
. . . .

Construye ahora la familia de parábolas: VECTOR (j. x^2, j, -1, -4, -1), que nos devuelve las parábolas:- x^2, $-2x^2$, $-3x^2$, $-4x^2$. Todas pasan por el punto (0,0) y tienen la misma tangente en dicho punto (y=0). Represéntalas gráficamente.

Calcula la 2ª derivada en cada caso,
¿qué ocurre con el grado de curvatura y el valor absoluto de la 2ª derivada?
. . . .

¿Qué conclusiones podemos sacar de todo esto? . . . .
. . . .

Operaciones con derivadas.-

DERIVE™ calcula simbólicamente las derivadas de una suma o diferencia de funciones, del producto, de la inversa de una función, del cociente, etc.

$$\frac{d}{dx}(F(x)+G(x))$$

$$\frac{d}{dx}F(x)+\frac{d}{dx}G(x)$$

$$\frac{d}{dx}(F(x)\cdot G(x))$$

$$G(x)\cdot\frac{d}{dx}F(x)+F(x)\cdot\frac{d}{dx}G(x)$$

$$\frac{}{x}\ \frac{}{F(x)}$$

$$\frac{\frac{d}{dx}F(x)}{F(x)^2}$$

$$\frac{}{x}\ \frac{F(x)}{G(x)}$$

$$\frac{\frac{d}{dx}F(x)}{G(x)}-\frac{F(x)\cdot\frac{d}{dx}G(x)}{G(x)^2}$$

Incluso "se atreve" con la composición de funciones

$$\frac{d}{dx}\, F(x)^{G(x)}$$

$$F(x)^{G(x)\,-\,1}\cdot\left[F(x)\cdot\left[\frac{d}{dx}\,G(x)\right]\cdot LN(F(x))\,+\,G(x)\cdot\frac{d}{dx}\,F(x)\right]$$

$$\frac{d}{dx}\, F(G(x))$$

$$\left[\frac{d}{dx}\,G(x)\right]\cdot\lim_{@\to G(x)}\frac{d}{d@}\,F(@)$$

Basándonos en la idea de "reconocimiento de patrones" se pueden proponer una serie de ejercicios para que los alumnos estudien con DERIVE, las reglas de derivación para la suma, producto, cociente, composición, etc, de funciones.

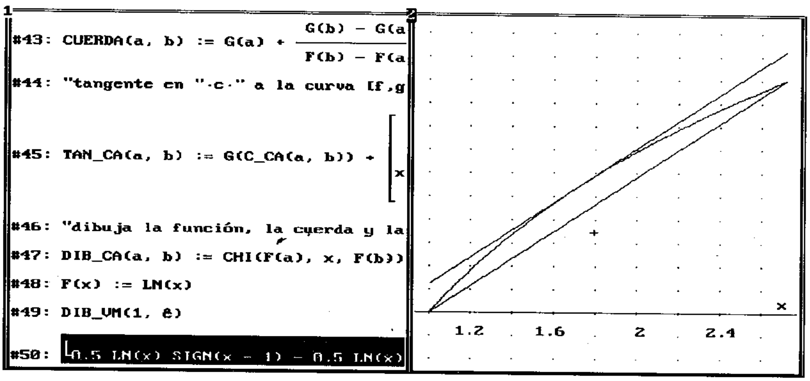
Un ejemplo podría ser: Dadas las funciones F (x,n):= x^n y G(x):= sin(x), construir la función VECTOR(DIF(F(x, i)+G(x), x), i, 1, 4) (que calcula la derivada de la suma F(x, i) + G(x) para diversos valores de i). Simplificar dicha expresión. Observa los resultados.
Cambia la función G poniendo G(x):= tan(x). Vuelve a simplificar VECTOR(DIF(F(x, i)+G(x), x), i, 1, 4) . Observa los resultados.
¿Puedes hacer una conjetura sobre lo que valdrá la derivada de F(x, 5)+ G(x) en cada caso? ¿Cuánto vale la derivada de f (x)+ g(x) para dos funciones *f* y *g* cualesquiera?

Usa ahora la función VECTOR(DIF(F(x, i) G(x), x), i, 1, 4) (que calcula la derivada del producto F(x, i) · G(x) para diversos valores de i). Repite los pasos anteriores
¿Puedes hacer una conjetura sobre lo que valdrá la derivada de F(x, 5)·G(x) en cada caso? ¿Cuánto vale la derivada de f (x)· g(x) para dos funciones *f* y *g* cualesquiera?

Usa ahora la función VECTOR(DIF(F(G(x), i), x), i, 1, 4) (que calcula la derivada de la composición de funciones F(G(x), i) para diversos valores de i). Repite los pasos anteriores
¿Puedes hacer una conjetura sobre lo que valdrá la derivada de F(G(x), 5) en cada caso? ¿Cuánto vale la derivada de f (g(x)) para dos funciones *f* y *g* cualesquiera?

Esta última parte se puede encontrar estudiada con más detalle en el libro de Carmen Azcárate y otros, titulado Cálculo Diferencial e Integral de la ed. Síntesis

También se puede visualizar el Teorema del Valor Medio como se muestra en la siguiente figura (aplicado a lnx en el intervalo [1,e])



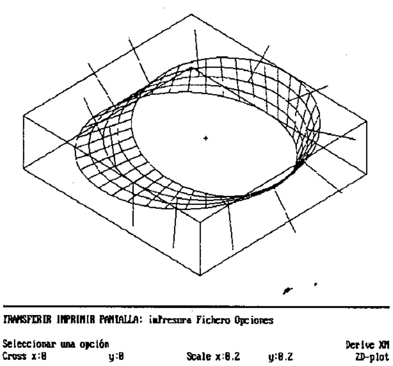
Se puede calcular con DERIVE™ el punto a que hace referencia el teorema y dibujar en el intervalo la función, la cuerda y la tangente en dicho punto

Puntualizaciones: ¿Por qué usar DERIVE™?

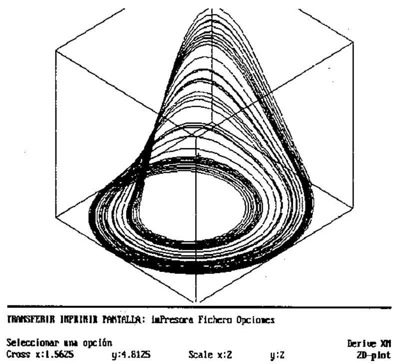
DERIVE™ tiene, a mi entender, dos ventajas claras sobre otros programas para su empleo en la enseñanza: 1°) Los requerimientos de Hardware son mínimos (funciona hasta en un 286 con 640Kb) y todos sabemos como están dotadas la mayoría de las aulas de Informática de los Centros; y 2°) La sencillez de su manejo, incluso a un nivel medio-alto (con 2 o 3 sesiones, los alumnos aprenden a trabajar con él) (En la versión 3.14 los distintos Menú y la Ayuda vienen traducidos al castellano)

Es cierto que la línea de Edición es bastante rudimentaria (por no decir otra cosa). Y que las posibilidades gráficas en 3 dimensiones son bastante pobres.

En general, podríamos decir que DERIVE™ , sólo a un nivel alto, sacrifica su eficiencia por la sencillez de manejo. No obstante, con un buen conocimiento del programa y mucha imaginación se puede estar a la altura del MATHEMATICA o MAPLE. Personalmente, considero como un reto el lograr hacer con DERIVE™ cosas como las de la página siguiente:



Cinta de Moebius y vectores normales



Atractor de Rössler

Bibliografía.-

-EL RINCÓN DE LA PIZARRA. Miguel de Guzman *PIRÁMIDE*

-PRÁCTICAS DE MATEMÁTICAS CON DERIVE®
Dpto. de Mat. Aplicada de la E.U.I. (U.P. Madrid) *ALFONSA GARCÍA*

-NUEVAS TECNOLOGÍAS Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS. Alfonsa García, Alfredo Martínez y Rafael Miñano *SÍNTESIS*

-CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. Carmen Azcárate, Martí Casadevall, Esther Casellas, Daniel Bosch *SÍNTESIS*

-ANÁLISIS MATEMÁTICO I (Cálculo). José Luis Llorens Fuster *U.P.Valencia (servicio de publicaciones 93735)*

-IMPROVING MATHEMATICS TEACHING WITH DERIVE. Bernhard Kutzler *CHARTWELL-BRATT*