Rev.Acad.Canar.Cienc., I, 227-246 (1990)

LA MEDIANA CONTINUA DE UN GRAFO.

José A. Moreno Pérez

Departamento de Estadística e Investigación Operativa.
Universidad de La Laguna. 28203 La Laguna.

ABSTRACT

The median problem consists of finding the location of a facility point that minimizes the average or global distance to a demand point. A network point is a vertex or a point on an edge, and the distance between points provides the natural measure on the network point set. Then the distance between a point and the whole network point set is the integral of the distance between this point and all network points. The continuous median of the network is the point that minimizes the distance to the network point set. It is also the facility point that minimizes the expected distance to a random demand point with uniform probability distribution on the network point set. The continuous median problem, that consists of finding a continuous median of the network, is solved by a very simple polynomial algorithm.

Key Words: Location, Graph, Facility, Optimization,

1.INTRODUCCION.

La Teoría de la Localización estudia cómo establecer la situación óptima para colocar determinados servicios. Se han analizado gran cantidad de criterios de optimalidad y restricciones atendiendo a distintas modelizaciones de las circunstancias reales de esta problemática. Los modelos más sencillos y más profundamente estudiados tratan del establecimiento de un número m de puntos de servicio fijado a priori. Generalmente se admite que toda demanda es atendida desde el punto de servicio más cercano y los objetivos hacen referencia al tiempo o coste necesario para atender las posibles demandas. Los criterios más importantes tratan de minimizar el tiempo medio o el tiempo máximo empleado para atender una demanda del servicio. Los modelos se desarrollan principalmente en espacios de dos tipos: continuos (una región del plano o del espacio) o discretos (un conjunto finito de puntos o un grafo o red de comunicaciones).

La investigación en la Teoría de la Localización en espacios continuos ha centrado su esfuerzo en la utilización de diferentes normas o conceptos similares menos estrictos y el desarrollo de procedimientos de solución iterativos. En los modelos discretos los esfuerzos se han encaminado hacia la aplicación de procedimientos finitos cada vez de menor complejidad algorítmica para resolver los diferentes problemas planteados. Existe una gran cantidad de material editado sobre Teoría de la Localización (ver (1)). Recientemente están apareciendo textos exclusivamente sobre este campo tanto con modelos continuos ((2), (3)) como con modelos discretos, específicamente grafos ((4), (5)).

Un grafo no dirigido, con su correspondiente función de longitud positiva, constituye un modelo apropiado para la mayoría de los problemas de localización en los que subyace una red de comunicaciones. Los desarrollos actuales sobre localización en un grafo tienen su origen en el artículo de Hakimi (6). Los problemas principales consisten en establecer de m puntos de servicio de manera que, bien la distancia máxima, o bien la distancia media a los puntos de demanda sea mínima. Estos problemas han recibido respectivamente los nombres de problema del <u>m-Centro</u> y problema de la <u>m-Mediana</u>. Cuando el número m de puntos de servicio a establecer es 1, se habla simplemente de centro o mediana.

En principio, estos problemas fueron planteados sobre un grafo admitiendo los vértices como los únicos puntos donde radicaba la demanda y donde se podían establecer los puntos de servicio. Posteriormente se generalizó su formulación, permitiendo el establecimiento del servicio en puntos intermedios de las aristas; los correspondientes problemas recibieron entonces el calificativo de <u>absolutos</u>. Finalmente se extendió la demanda a todos los puntos del grafo, recibiendo entonces los nombre de problema del m-centro <u>continuo</u> y de la m-mediana <u>continua</u>.

Los problemas del centro y de la mediana absolutos de un grafo fueron planteados primeramente en Hakimi (7), quien aportó métodos finitos de solución. El problema de la m-mediana absoluta quedaba también resuelto por un procedimiento finito, pero la solución finita para el problema del m-centro fue aportada posteriormente por Minieka (8). Sin embargo, según probaron Kariv y Hakimi (9), ambos son problemas NP-completos. Los problemas del centro y la mediana absolutos admiten algoritmos polinomiales para su resolución, luego están, en este sentido, resueltos; además el mayor esfuerzo computacional de tales algoritmos se emplea en el cálculo de las distancias. Las investigaciones están, en casi todos los casos, principalmente enfocadas a la mejora de la eficiencia práctica de los procedimientos aplicados y en su extensión a situaciones cada vez más generales.

El factor principal que permite la resolución de los problemas de m-mediana radica en la optimalidad de los vértices como posibles puntos de servicio, ya establecida por Hakimi (7). La principal herramienta para la resolución eficiente de los problemas de m-centro es el concepto de centro local que fue introducido por Minieka (8), extendido por Handler (10) y corregido por el autor (11).

La evolución de los problemas de m-centros y m-medianas absolutos a los correspondiente problemas continuos no ha sido paralelo. Una cuestión previa importante que los diferencia consiste en la transformación de su formulación. El problema del m-centro absoluto estaba planteado con el objetivo de minimizar la distancia de los m puntos de servicio al vértice más lejano; en el problema del m-centro continuo la función a minimizar es la distancia de los m puntos de servicio al punto del grafo más lejano. Análogamente, el objetivo en el problema de la m-mediana absoluta es minimizar la suma de las distancias de los puntos de servicio a los vértices; sin embargo, al pasar al problema continuo la suma no se puede extender a todos los puntos del grafo.

Hansen y Labbé (12) formulan y resuelven el problema de m-mediana continua estableciendo como función objetivo la suma de las distancias desde los puntos de servicio al punto más lejano de cada arista. En este artículo se plantea y resuelve el problema de la mediana tomando como función objetivo la integral sobre todo el grafo de la distancia desde el punto de servicio a un punto genérico sobre el grafo. La principal dificultad radica en la imposibilidad de extender, como se ha realizado con éxito en otras generalizaciones del problema, el principio según el cual era suficiente considerar los vértices como posibles localizaciones de los puntos de servicio. Este hecho ya había sido apuntado por Minieka (13) al introducir el problema de la mediana continua y es confirmado por Hansen y Labbé (12) cuyo principal resultado es la optimalidad de los vértices y puntos medios de las aristas como posibles puntos de servicio.

Los procedimientos aplicados en el problema del m-centro absoluto si han podido ser extendidos al del m-centro continuo. Frank (14) resuelve el problema del centro continuo de un grafo y Handler y Rozman (15) el del m-centro continuo. Tansel y otros (16) ofrecen una panorámica de estos problemas.

2. CONCEPTOS PREVIOS

Sea G = (V,A) un grafo no dirigido compuesto por un conjunto V de n vértices y un conjunto A de m aristas: $|V| = n$ y $|A| = m$. Los n vértices son puntos distintos y cada arista $[i,j] \in A$ es un conjunto continuo y lineal de puntos que une los vértices i y j, ambos inclusive. El conjunto P de los puntos del grafo está constituido por todos estos puntos.

Sea, $\forall\ [i,j] \in A$, la longitud positiva de la arista [i,j] dada por L(i,j). Dos puntos son adyacentes si están en la misma arista. Dados dos puntos adyacentes x e y, la subarista [x,y] es el parte de la arista que los une. Cada punto x de una arista [i,j] se determina por la longitud t = L(i,x) de la subarista [i,x] y se denota por x = x([i,j];t).

El calificativo no dirigido implica la inexistencia de sentido en las aristas del grafo; [i,j] = [j,i]. Los extremos de la arista [i,j] son los vértices i y j; el resto de sus puntos son interiores a la arista. Dos aristas no pueden tener ningún punto común que sea interior. Se dice que la arista [i,j] es incidente en los vértices i y j.

Un camino entre los vértices i y j es una secuencia de aristas tal que cada una tiene un extremo común con la siguiente y el otro con la anterior siendo la primera arista incidente en i y la última incidente en j. La <u>longitud</u> de un camino es la suma de las longitudes de las aristas que lo componen. El vértice i es <u>accesible</u> desde el vértice j si existe algún camino entre i y j. La <u>distancia</u> D(i,j) entre dos vértices accesibles i y j es la mínima longitud de los caminos entre i y j. Un camino entre i y j es <u>óptimo</u> si su longitud es D(i,j) (véase por ejemplo, Gondran y Minoux (17)). Para cualquier vértice i, se entiende que el camino vacío es un camino de longitud nula entre el vértice i y si mismo.

Los conceptos de camino, distancia y camino óptimo se extienden a cualesquiera dos puntos del grafo por medio la operación de inserción. La <u>inserción</u> de un punto x del grafo G produce el grafo G.x que se obtiene de G de la forma siguiente: si x es un vértice entonces G.x = G, pero si x es interior a la arista [i,j] el grafo G.x tiene a x como nuevo vértice sustituyéndose la arista [i,j] por las subaristas [i,x] y [x,j] con sus correspondientes longitudes. Los caminos, distancias y caminos óptimos entre dos puntos x e y del grafo G se definen como los correspondientes en el grafo (G.y).x resultante de su inserción. Sin embargo, la extensión de estos conceptos sólo precisa de la modificación del grafo para establecer su definición y propiedades formales, pueden ser desarrollados y aplicados sin necesidad de alterar el grafo original.

Un grafo es <u>conexo</u> si todo vértice es accesible desde cualquier otro. Un <u>puente</u> de un grafo conexo es una arista tal que si se elimina del grafo éste deja de ser conexo. La eliminación del puente [i,j] da lugar a dos grafos conexos denotados por G_i y G_j. El grafo G_i está constituido por los vértices accesibles desde i y las aristas que los unen. Análogamente G_j está constituido por los vértices accesibles desde j y las correspondientes aristas.

Los conceptos anteriores forman parte de la Teoría de Grafos. A continuación introducimos un concepto usado exclusivamente para la resolución del problema de la mediana continua. Consideramos un grafo conexo G = (V,A) con longitudes tales que cualquier arista es un camino óptimo entre sus vértices; es decir, $\forall$ [i,j] $\in$ A: L(i,j) = D(i,j). Esto último no supone restricción importante pues en caso contrario bastaría con la inserción de puntos interiores a las aristas que no verificaran esta condición.

Definición 1.

Los puntos $x,z \in P$ están en equilibrio si existen vértices $i,j \in A[x]$ y $u,v \in A[z]$ tales que

$D(x,z) = L(x,i) + D(i,u) + L(u,z)$.

$D(x,z) = L(x,j) + D(j,v) + L(v,z)$.

$D(x,z) < L(x,i) + D(i,v) + L(v,z)$.

$D(x,z) < L(x,j) + D(j,u) + L(u,z)$.

Siendo $A[x]$ el conjunto de los vértices adyacentes a x.

Proposición 1.

Sea $x \in P$ y $[u,v] \in A$, existe un punto z interior a $[u,v]$ en equilibrio con x si y sólo si existen dos vértices i y j adyacentes a x tales que:

$D(x,u) = L(x,i) + D(i,u)$, $D(x,v) = L(x,j) + D(j,v)$,

$D(x,u) < L(x,j) + D(j,u)$, $D(x,v) < L(x,i) + D(i,v)$.

En tal caso el punto z es único y $z = x([u,v];t)$, siendo

$$t = D(x,z) - D(x,u) = \frac{D(x,v) + L(u,v) - D(x,u)}{2}.$$

Demostración.

Sea z interior a $[u,v]$ en equilibrio con x. Para cualquier arista $[u,v]$ se verifica $|D(x,u) - D(x,v)| \le L(u,v)$. Veamos que no se puede dar la igualdad.

Si $D(x,u) = D(x,v) + L(u,v)$ entonces $D(x,z) < D(x,u) + L(u,z)$ por tanto, $\forall\, i \in A[x]$ se cumple $D(x,z) < L(x,i) + D(i,u) + L(u,z)$. Análogamente si $D(x,v) = D(x,u) + L(u,v)$, entonces $\forall\, i \in A[x]$ se cumple $D(x,z) < L(x,i) + D(i,v) + L(v,z)$. Luego en ambos casos los puntos x y z no pueden estar en equilibrio.

Si z está en equilibrio con x, existen $i,j \in A[x]$ tales que:

(1) $D(x,z) = L(x,i) + D(i,u) + L(u,z)$.

(2) $D(x,z) = L(x,j) + D(j,v) + L(v,z)$.

(3) $D(x,z) < L(x,i) + D(i,v) + L(v,z)$.

(4) $D(x,z) < L(x,j) + D(j,u) + L(u,z)$.

Entonces de (1) se deduce que $D(x,u) = L(x,i) + D(i,u)$ y de (2) que $D(x,v) = L(x,j) + D(j,v)$. Además, de (1) y (4) resulta $L(x,i) + D(i,u) < L(x,j) + D(j,u)$, y análogamente de (2) y (3) es $L(x,j) + D(j,v) < L(x,i) + D(i,v)$. Luego $D(x,u) < L(x,j) + D(j,u)$

y $D(x,v) < L(x,i) + D(i,v)$.

Por último, $L(u,v) = L(u,z) + L(z,v)$, y de (1) y (2) es:

$$D(x,u) + L(u,z) = D(x,z) = D(x,v) + L(v,z).$$

De donde $L(u,z) = \dfrac{D(x,v) + L(u,v) - D(x,u)}{2}$, que corresponde a un punto interior a [u,v] ya que $|D(x,u) - D(x,v)| < L(u,v)$.

Recíprocamente, supongamos que se cumplen

(1) $D(x,u) = L(x,i) + D(i,u)$, (2) $D(x,v) = L(x,j) + D(j,v)$,

(3) $D(x,u) < L(x,j) + D(j,u)$, (4) $D(x,v) < L(x,i) + D(i,v)$.

Sea $z = x([u,v];t)$, siendo $t = \dfrac{D(x,v) + L(u,v) - D(x,u)}{2}$. De (2) y (3) es $D(x,u) - D(x,v) < D(j,u) - D(j,v) \le L(u,v)$, y de (1) y (4) $D(x,v) - D(x,u) < D(i,v) - D(i,u) \le L(u,v)$. Por tanto $|D(x,u) - D(x,v)| < L(u,v)$, de donde $0 < t < L(u,v)$. Luego z es interior a [u,v].

Además $D(x,u) + t = D(x,v) + L(u,v) - t$, que coincide con $D(x,z)$. Por tanto, sumando $t = L(u,z)$ en (1) y en (3) tenemos $D(x,z) = L(x,i) + D(i,u) + L(u,z) < L(x,i) + D(i,v) + L(v,z)$. Del mismo modo, sumando $L(v,z) = L(u,v) - t$ en (2) y en (4) tenemos $D(x,z) = L(x,j) + D(j,v) + L(v,z) < L(x,j) + D(j,u) + L(u,z)$.

Luego los puntos x y z están en equlibrio. ■

<u>Corolario.</u>

Si existe un punto interior a [u,v] en equilibrio con el punto x entonces $|D(x,u) - D(x,v)| < L(u,v)$.

Cuando consideremos a la vez a dos aristas [i,j] y [u,v] supondremos que el orden de los extremos está establecido de forma que $D(i,u) + D(j,v) \le D(i,v) + D(j,u)$. Así, por ejemplo, si dos puntos x y z interiores respectivamente a [i,j] y [u,v] están en equilibrio entonces:

$$D(x,z) = L(x,i) + D(i,u) + L(u,z).$$
$$D(x,z) = L(x,j) + D(j,v) + L(v,z).$$
$$D(x,z) < L(x,i) + D(i,v) + L(v,z).$$
$$D(x,z) < L(x,j) + D(j,u) + L(u,z).$$

3. EL PROBLEMA DE LA MEDIANA CONTINUA DE UN GRAFO.

Los problemas más típicos de localización de un punto de servicio son los problemas de centros y los problemas de medianas. Un centro es un punto minimiza la distancia al punto de demanda más lejano mientras que una mediana es un punto que minimiza la distancia media o global a los puntos de demanda. El artículo de Hansen y otros (19) ofrece una panorámica de los problemas de localización de un punto de servicio sobre un grafo.

En un grafo no dirigido se pueden formular tres conceptos estandares de centro: el centro del grafo es el vértice que minimiza la máxima distancia a otro vértice, el centro absoluto del grafo es el punto del grafo que minimiza la máxima distancia a un vértice, y el centro continuo del grafo es el punto que minimiza la máxima distancia a un punto del grafo. El problema del centro continuo se suele formalizar definiendo la distancia entre un punto y una arista como la máxima distancia entre dicho punto y un punto genérico de la arista; entonces el centro continuo es el punto que minimiza la máxima distancia a una arista.

Paralelamente, se pueden formular tres conceptos estandares de mediana: la mediana del grafo es el vértice que minimiza la media o suma de las distancias a los demás vértices, la mediana absoluta del grafo es el punto del grafo que minimiza la media o suma de las distancias a los vértices, y la mediana continua sería el punto que minimiza la distancia media o global a todos los puntos del grafo. Hansen y Labbé (12) definen la mediana continua como la que minimiza la suma de las distancia a las aristas del grafo utilizando el mismo concepto de la distancia entre un punto y una arista que para el centro continuo. Sin embargo, aquí definimos la distancia entre un punto y una arista como la distancia media o global entre dicho punto y los puntos de la arista establecida por medio de una integral.

Sea G = (V,A) un grafo conexo no dirigido con función de longitud positiva L(.,.). En cada arista podemos considerar la medida de Lebesgue para globalizar, mediante una integral, cualquier función definida sobre sus puntos. Si f(x) es una función definida para $x \in [i,j]$; entonces la integral de f(x) en la arista [i,j] es:

$$\int_{[i,j]} f(x)\,dx = \int_0^{L(i,j)} f(x([i,j];s))\,ds,$$

siendo esta última una integral de Riemann. Puesto que la distancia entre dos puntos es una función continua y acotada adoptamos la siguiente definición de distancia entre un punto y una arista del grafo.

<u>Definición 2.</u>

Sean $x \in P$ y $a = [i,j] \in A$. La <u>distancia</u> entre x y a es :

$$D(x,a) = \int_a D(x,w)\,dw = \int_i^j D(x,w)\,dw.$$

La integral de Lebesgue extendida a todos los puntos del grafo es la suma de las integrales sobre cada una de las aristas. Entonces la distancia de un punto a todo el conjunto de puntos del grafo es la integral, sobre el conjunto de los puntos del grafo, de la distancia a dicho punto.

<u>Definición 3.</u>

Sea $x \in P$, la <u>distancia</u> entre x y el conjunto P de los puntos del grafo es:

$$D(x,P) = \int_P D(x,w)\,dw = \sum_{a\in A} D(x,a) = \sum_{a\in A} \int_a D(x,w)\,dw.$$

La mediana continua del grafo es el punto del grafo que minimiza la distancia global al conjunto de los puntos del grafo.

<u>Definición 4.</u>

Una <u>mediana continua</u> del grafo $G = (V,A)$ con longitudes $L(.,.)$ es un punto $c \in P$ tal que: $D(c,P) = \mathrm{Min}_{x\in P}\, D(x,P)$.

Esta formalización del problema es equivalente a la que establece como criterio el de minimizar la distancia a un punto de demanda aleatorio que se distribuye uniformemente sobre todo el grafo. La distancia media entre un punto de servicio x y el punto de demanda aleatorio ω con distribución uniforme es:

$$E[D(x,\omega)] = \frac{1}{L(P)} \int_P D(x,w)\,dw.$$

siendo L(G) la longitud total del grafo:

$$L(P) = \int_P dw = \sum_{[i,j]\in A} \int_a dw = \sum_{[i,j]\in A} L(i,j).$$

La única diferencia con la formulación anterior está en un factor multiplicativo constante $\frac{1}{L(P)}$ de la función objetivo que evidentemente se puede obviar.

Proposición 2.

El problema de la mediana continua tiene solución.

Demostración.

La distancia D(.,.) definida en el conjunto P de los puntos del grafo es una métrica. Puesto que cada arista [i,j] es topológicamente isomorfa a un intervalo real cerrado, el par (P,D) constituye un espacio métrico compacto.

Para cualquier punto w del grafo, la distancia entre un punto $x \in P$ y w es una función continua en x. Por tanto también son continuas la distancia a cualquier arista y la distancia a todo el grafo $F(x) = D(x,P)$. Luego es un problema de mínimo de una función continua F(x) en un espacio compacto (P,D) que se alcanza en P. ■

En el siguiente apartado presentamos cuatro teoremas que proporcionan un método finito para encontrar una mediana del grafo. El primero de ellos establece como evaluar la distancia entre un punto y una arista en términos de las distancias entre dicho punto y los extremos de la arista. En el teorema 2 se describe como varía esta distancia al desplazar el punto sobre una arista en función de la separación con respecto a uno de sus extremos. En el siguiente teorema se analiza la convexidad de la función objetivo del problema de la mediana continua. El último de estos teoremas establece las condiciones para que la mediana continua se encuentre en una arista puente.

4. SOLUCION DEL PROBLEMA DE LA MEDIANA

Teorema 1.

Sea $x \in P$, $a = [u,v] \in A$. Si $x \in a$ entonces

$$D(x,a) = \frac{D(x,u)^2}{2} + \frac{D(x,v)^2}{2}.$$

En otro caso,

$$D(x,a) = \left(D(x,u)+D(x,v)+\frac{L(u,v)}{2}\right)\cdot\frac{L(u,v)}{2} - \left(\frac{D(x,u)-D(x,v)}{2}\right)^2.$$

Demostración.

Si $x \in [u,v]$ denotemos $x = x([u,v];r)$, siendo $0 \le r \le L(u,v)$. Sea $\omega = x([u,v];s)$ un punto genérico de la arista a. Entonces,

$$\forall\, \omega \in [u,x]: D(x,w) = r-s;\ \forall\, \omega \in [x,v]: D(x,w) = s-r.$$

Por tanto la distancia de x a la arista $a = [u,v]$ es:

$$D(x,a) = \int_a D(x,\omega)\, d\omega = \int_u^v D(x,\omega)\, d\omega =$$

$$= \int_u^x D(x,\omega)\, d\omega + \int_x^v D(x,\omega)\, d\omega =$$

$$= \int_0^r (r-s)\, ds + \int_r^{L(u,v)} (s-r)\, ds =$$

$$= \tfrac{1}{2}(L(u,v)-r)^2 + \tfrac{1}{2}r^2 = \frac{D(x,u)^2}{2} + \frac{D(x,v)^2}{2}.$$

Si, por el contrario, $x \notin a = [u,v]$ entonces existe un punto $z \in [u,v]$ (posiblemente $z = u$ o $z = v$) tal que

$$D(x,u) + L(u,z) = D(x,z) = L(z,v) + D(v,x).$$

De donde $D(x,z) = \frac{1}{2}(D(x,u) + D(x,v) + L(u,v))$ y entonces $L(u,z) = \dfrac{D(x,v)+L(u,v)-D(x,u)}{2}$ y $L(v,z) = \dfrac{D(x,u)+L(u,v)-D(x,v)}{2}$.

Por tanto, a todos los puntos de la subarista $[u,z]$ se accede óptimamente desde x por el extremo u y a todos los puntos de la subarista $[z,v]$ se accede óptimamente por v. Entonces:

$$\forall\, \omega \in [u,z]: D(x,w) = D(x,u) + L(u,w).$$
$$\forall\, \omega \in [z,v]: D(x,w) = D(x,v) + L(v,w).$$

Por tanto: $D(x,a) = \int_u^v D(x,\omega)\, d\omega = \int_u^z D(x,\omega)\, d\omega + \int_z^v D(x,\omega)\, d\omega =$

$$= \int_u^z D(x,u) + L(u,\omega)\, d\omega + \int_z^v D(x,v) + L(v,\omega)\, d\omega =$$

$$= \int_0^{L(u,z)} (D(x,u) + s)\, ds + \int_0^{L(z,v)} (D(x,v) + s)\, ds =$$

$$= L(u,z)D(x,u) + L(z,v)D(x,v) + \int_0^{L(u,z)} s\, ds + \int_0^{L(z,v)} s\, ds =$$

$$= L(u,z)D(x,u) + L(v,z)D(x,v) + \frac{L(u,z)^2}{2} + \frac{L(v,z)^2}{2} =$$

$$= \frac{D(x,v)+L(u,v)-D(x,u)}{2}\cdot D(x,u) + \frac{D(x,u)+L(u,v)-D(x,v)}{2}\cdot D(x,v)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{D(x,v)+L(u,v)-D(x,u)}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{D(x,u)+L(u,v)-D(x,v)}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(D(x,u)D(x,v) + D(x,u)L(u,v) - D(x,u)^2 +$$
$$+ D(x,v)D(x,u) + D(x,v)L(u,v) - D(x,v)^2\Big) +$$
$$+ \frac{1}{4}\Big(D(x,v)^2 + L(u,v)^2 + D(x,u)^2 +$$
$$+ D(x,v)L(u,v) - D(x,u)D(x,v) - L(u,v)D(x,u) +$$
$$+ D(x,u)L(u,v) - D(x,u)D(x,v) - L(u,v)D(x,v)\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(D(x,u)D(x,v) + D(x,u)L(u,v) + D(x,v)L(u,v)\Big) +$$
$$+ \frac{1}{4}\Big(- D(x,u)^2 - D(x,v)^2 + L(u,v)^2\Big) =$$
$$= \left(D(x,u) + D(x,v) + \frac{L(u,v)}{2}\right)\cdot\frac{L(u,v)}{2} - \left(\frac{D(x,u) - D(x,v)}{2}\right)^2. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.

Sea $x = x([i,j];r)$, $a = [u,v] \in A$. Entonces se da uno de los casos siguientes:

1. Si $x \in a$ entonces: $D(x,a) = \frac{L(u,v)^2}{2} - r\cdot L(u,v) + r^2$.
2. Si $D(x,u) = L(x,i) + D(i,u)$ y $D(x,v) = L(x,i) + D(i,v)$:
$$D(x,a) = \left(D(i,u)+D(i,v)+\frac{L(u,v)}{2}\right)\frac{L(u,v)}{2} - \left(\frac{D(i,u)-D(i,v)}{2}\right)^2$$
$$+ r\cdot L(u,v).$$
3. Si $D(x,u) = L(x,j) + D(j,u)$ y $D(x,v) = L(x,j) + D(j,v)$:
$$D(x,a) = \left(D(j,u)+D(j,v)+\frac{L(u,v)}{2}\right)\frac{L(u,v)}{2} - \left(\frac{D(j,u)-D(j,v)}{2}\right)^2$$
$$+ L(u,v)^2 - r\cdot L(u,v).$$
4. Si existe un punto $z \in [u,v]$ en equilibrio con x:
$$D(x,a) = \left(L(i,j) + D(i,u) + D(i,v) + \frac{L(u,v)}{2}\right)\frac{L(u,v)}{2} -$$
$$- \left(\frac{D(i,u)-L(i,j)-D(i,v)}{2}\right)^2 - r\cdot\Big(D(i,u)-L(i,j)-D(j,v)\Big) - r^2.$$

Demostración.

1. Si $x \in a$ entonces, del teorema 1:
$$D(x,a) = \frac{D(x,u)^2}{2} + \frac{D(x,v)^2}{2} = \frac{(L(u,v)-r)^2}{2} + \frac{r^2}{2} =$$
$$= \frac{L(u,v)^2}{2} - r\cdot(L(u,v)-r) = \frac{L(u,v)^2}{2} - r\cdot L(u,v) + r^2.$$

2. Si $D(x,u) = L(x,i) + D(i,u)$ y $D(x,v) = L(x,i) + D(i,v)$ entonces del teorema 1 tenemos:

$$D(x,a) = \left(D(x,u)+D(x,v)+\frac{L(u,v)}{2}\right)\cdot\frac{L(u,v)}{2} - \left(\frac{D(x,u)-D(x,v)}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(L(x,i) + D(i,u) + L(x,i) + D(i,v) + \frac{L(u,v)}{2}\right)\cdot\frac{L(u,v)}{2} - \left(\frac{L(x,i) + D(i,u) - L(x,i) - D(i,v)}{2}\right)^2 =$$

$$= L(x,i)L(u,v) + \left(D(i,u) + D(i,v) + \frac{L(u,v)}{2}\right)\cdot\frac{L(u,v)}{2} - \left(\frac{D(i,u)-D(i,v)}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(D(i,u)+D(i,v)+\frac{L(u,v)}{2}\right)\frac{L(u,v)}{2} - \left(\frac{D(i,u)-D(i,v)}{2}\right)^2 + r\cdot L(u,v).$$

3. Si $D(x,u) = L(x,j) + D(j,u)$ y $D(x,v) = L(x,i) + D(i,v)$: entonces del teorema 1:

$$D(x,a) = \left(D(x,u)+D(x,v)+\frac{L(u,v)}{2}\right)\cdot\frac{L(u,v)}{2} - \left(\frac{D(x,u)-D(x,v)}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(L(x,j) + D(j,u) + L(x,j) + D(j,v) + \frac{L(u,v)}{2}\right)\cdot\frac{L(u,v)}{2} - \left(\frac{L(x,j) + D(j,u) - L(x,j) - D(j,v)}{2}\right)^2 =$$

$$= L(x,j)L(u,v) + \left(D(j,u) + D(j,v) + \frac{L(u,v)}{2}\right)\cdot\frac{L(u,v)}{2} - \left(\frac{D(j,u)-D(j,v)}{2}\right)^2 =$$

$$= (L(u,v)-r)\cdot L(u,v) + \left(D(j,u)+D(j,v)+\frac{L(u,v)}{2}\right)\frac{L(u,v)}{2} - \left(\frac{D(j,u)-D(j,v)}{2}\right)^2$$

$$= \left(D(j,u)+D(j,v)+\frac{L(u,v)}{2}\right)\frac{L(u,v)}{2} - \left(\frac{D(j,u)-D(j,v)}{2}\right)^2 + L(u,v)^2 - r\cdot L(u,v).$$

4. Sea $z \in [u,v]$ en equilibrio con x. Si z es interior a la arista $[u,v]$ entonces, por la proposición 1, $D(x,u) = L(x,i) + D(i,u)$ y $D(x,v) = L(x,j) + D(j,v)$. Entonces, del teorema 1:

$$D(x,a) = \left(D(x,u)+D(x,v)+\frac{L(u,v)}{2}\right)\cdot\frac{L(u,v)}{2} - \left(\frac{D(x,u)-D(x,v)}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(L(x,i) + D(i,u) + L(x,j) + D(j,v) + \frac{L(u,v)}{2}\right)\cdot\frac{L(u,v)}{2} - \left(\frac{L(x,i) + D(i,u) - L(x,j) - D(j,v)}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(L(i,j) + D(i,u) + D(j,v) + \frac{L(u,v)}{2}\right)\cdot\frac{L(u,v)}{2} - \left(\frac{2r + D(i,u) - L(i,j) - D(j,v)}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(L(i,j) + D(i,u) + D(j,v) + \frac{L(u,v)}{2}\right)\cdot\frac{L(u,v)}{2}$$
$$- \left(\frac{D(i,u) - L(i,j) - D(j,v)}{2}\right)^2$$
$$- r\cdot\left(D(i,u) - L(i,j) - D(j,v)\right) - r^2.$$

Por otro lado, si $z = u$ entonces $D(x,u) = L(x,i) + D(i,u)$ y $D(x,u) = L(x,j) + D(j,u)$. Además es $D(x,v) = L(x,j) + D(j,v)$ o $D(x,v) = L(x,i) + D(i,v)$, ya que i y j son los únicos vértices adyacentes a x. Con la adecuada ordenación de los extremos de la arista $[u,v]$ es $D(x,v) = L(x,j) + D(j,v)$. Por tanto es válida la fórmula anterior para $D(x,a)$. Análogamente, si $z = v$ entonces $D(x,v) = L(x,j) + D(j,v)$ y $D(x,v) = L(x,i) + D(i,v)$, además debe ser $D(x,u) = L(x,i) + D(i,u)$ y por tanto vuelve a ser válida la fórmula anterior para $D(x,a)$.

Por último, si no se cumplen el caso 2 ni el 3, entonces se da una de los casos siguientes:

(a) $D(x,u) < L(x,j) + D(j,u)$ y $D(x,v) < L(x,i) + D(i,v)$. Y entonces, al ser i y j los únicos vértices adyacentes a x, es $D(x,u) = L(x,i) + D(i,u)$ y $D(x,v) = L(x,j) + D(j,v)$; o bien,

(b) $D(x,u) < L(x,j) + D(j,u)$ y $D(x,v) < L(x,i) + D(i,v)$. Y entonces, por el mismo motivo, es $D(x,u) = L(x,i) + D(i,u)$ y $D(x,v) = L(x,j) + D(j,v)$.

De donde, por la proposición 1, existe algún punto z interior a $[u,v]$ en equilibrio con x. ■

<u>Teorema 3.</u>

La función $F(x) = D(x,P)$ es convexa en los puentes. En las demás aristas, $F(x)$ es cóncava excepto en los puntos en equilibrio con algún vértice donde es convexa.

<u>Demostración.</u>

Sea $[i,j]$ una arista cualquiera del grafo y un punto genérico interior a ella $x = x([i,j];r)$, $0 < r < L(i,j)$. Sea la función:

$$F_{ij}(r) = D(x([i,j];r),P) \text{ para } 0 \le r \le L(i,j).$$

Para el punto $x = x([i,j];r)$ consideramos los conjuntos de aristas que están en cada uno de los casos contemplados en el teorema 2: la arista $[i,j]$ es la única arista en el caso 1; sea A_+ el conjunto de aristas en el caso 2; A_- el de las aristas en el caso 3 y $A_=$ el de las aristas en el caso 4. Entonces:

$$F_{ij}(r) = K + r\cdot\Big[\sum_{[u,v]\in A_=}(L(i,j) + D(j,v) - D(i,u)) + $$
$$+ \sum_{[u,v]\in A_+} L(u,v) - \sum_{[u,v]\in A_-} L(u,v) - L(i,j)\Big] + r^2(1-|A_=|).$$

Siendo K una constante que no varia a menos que lo hagan los conjuntos A_+, A_- y $A_=$, y donde $|A_=|$ es el cardinal de $A_=$.

Si la arista [i,j] es un puente entonces no existe ningún punto interior a ella que esté en equilibrio con otro punto, por tanto los conjuntos A_+, A_- y $A_=$ no varían a los largo de la arista siendo $A_=$ siempre vacío. Luego si [i,j] es un puente la función $F_{ij}(r)$ es convexa. En otro caso el conjunto $A_=$ es no vacío, por tanto, mientras no se modifiquen los conjuntos $A_=$, A_+ y A_- la función es cóncava.

Veamos que los conjuntos $A_=$, A_+ y A_- sólo se pueden modificar en los puntos de la arista que están en equilibrio con algún vértice del grafo. Los conjuntos de puntos $x = x([i,j];r)$ para los que una arista determinada está en cada uno de los tres conjuntos $A_=$, A_+ y A_- son cerrados. Por tanto, una arista cambia de uno de estos conjuntos a otro en un punto en que pertenece a ambos.

En efecto, si para $x = x([i,j];r)$, $[u,v] \in A_+\cap A_-$ entonces, por definición de estos conjuntos (ver teorema 2).

$D(x,u) = L(x,i) + D(i,u)$, $D(x,v) = L(x,i) + D(i,v)$,

$D(x,u) = L(x,j) + D(j,u)$, $D(x,v) = L(x,j) + D(j,v)$.

Por tanto, x es un punto en equilibrio con el extremos de [u,v] más cercano a x, o bien, si los caminos desde la arista [u,v] a x tiene una parte inicial común, al vértice w de este camino más cercano a x en el que se verifique:

$D(x,w) = L(x,i) + D(i,w)$, $D(x,w) = L(x,j) + D(j,w)$.

Si para $x = x([i,j];r)$, $[u,v] \in A_+\cap A_=$ entonces la arista [u,v] contiene un punto z en equilibrio con x, y además se verifica: $D(x,u) = L(x,i) + D(i,u)$ y $D(x,v) = L(x,i) + D(i,v)$. Por tanto dicho punto sólo puede ser uno de los dos extremos. Análogamente si $[u,v] \in A_-\cap A_=$.

Veamos finalmente como se modifica la función F_{ij} en los puntos en equilibrio con algún vértice. La pendiente de la función $F_{ij}(.)$ en r es:

$$F'_{ij}(r) = \Big[\sum_{[u,v]\in A_=}(L(i,j) + D(j,v) - D(i,u)) + $$
$$+ \sum_{[u,v]\in A_+} L(u,v) - \sum_{[u,v]\in A_-} L(u,v) - L(i,j)\Big] + 2r(1-|A_=|).$$

Al crecer r y llegar x([i,j];r) a un punto en equilibrio con algún vértice, las aristas incidentes en dicho vértice pueden pasar de A_- a $A_=$, de $A_=$ a A_+ y directamente de A_- a A_+.

Si la arista [u,v] pasa de A_- a $A_=$, el incremento en r de la pendiente de la función $F'_{ij}(.)$, debido exclusivamente a ello, es:

$$F'_{ij}(r_+) - F'_{ij}(r_-) = L(i,j) + D(j,v) - D(i,u) - 2r - (- L(u,v)).$$

Pero si la arista [u,v] pasa de $A_=$ a A_+ para algún valor de r, el incremento en r de la pendiente de la función $F'_{ij}(.)$, debido exclusivamente a ello, es:

$$F'_{ij}(r_+) - F'_{ij}(r_-) = L(u,v) - (L(i,j) + D(j,v) - D(i,u) - 2r).$$

No obstante, al pasar [u,v] de A_- a $A_=$, el punto z de [u,v] que está en equilibrio con el punto x = x([i,j];r) es el vértice v. Por tanto, L(x,j) + D(j,v) = L(x,i) + D(i,u) + L(u,v); es decir, L(i,j)-r + D(j,v) = r + D(i,u) + L(u,v). Luego el incremento de la pendiente de la función $F'_{ij}(.)$ en el valor r es: L(i,j) + D(j,v) - D(i,u) - 2r + L(u,v) = 2L(u,v).

Análogamente, al pasar [u,v] de $A_=$ a A_+, el punto z $\in$ [u,v] que está en equilibrio con x = x([i,j];r) es el extremo u. Por tanto L(x,j) + D(j,v) + L(u,v) = L(x,i) + D(i,u); es decir, L(i,j)-r + D(j,v) + L(u,v) = r + D(i,u). Luego el aumento de la pendiente es: L(u,v) - L(i,j) - D(j,v) + D(i,u) + 2r = 2L(u,v).

Al pasar una arista [u,v] de A_- a A_+ directamente el incremento de la pendiente vuelve a ser evidentemente de 2L(u,v).

Por tanto la pendiente de la función $F_{ij}(.)$ en un punto en equilibrio con un vértice aumenta en el doble de la suma de las longitudes de todas las aristas adyacentes a dicho vértice que pasan de A_- a $A_=$, de $A_=$ a A_+ y de A_- a A_+. ■

Si la arista $[i,j]$ es un puente del grafo G denotamos por $G_i = (V_i,A_i)$ y $G_j = (V_j,A_j)$ los dos grafos conexos que se producen al eliminar la arista $[i,j]$ tales que $i \in V_i$ y $j \in V_j$. Además denotamos por L_i y L_j las longitudes totales de tales grafos:

$$L_i = L(G_i) = \sum_{a \in A_i} L(a) \quad \text{y} \quad L_j = L(G_j) = \sum_{a \in A_j} L(a).$$

<u>Teorema 4.</u>

La mediana continua c está en el interior de un puente $[i,j]$ si y sólo si $|L_i - L_j| < L(i,j)$. En tal caso, $[i,j]$ es el único puente que verifica esta condición y $c = x([i,j];t)$ siendo $t = \frac{L(i,j)}{2} - \frac{L_i - L_j}{2}$.

<u>Demostración.</u>

Sea $[i,j] \in A$ una arista puente del grafo. Los conjuntos $A_=$, A_+ y A_- de la demostración del teorema anterior no varían al desplazar el punto x a lo largo de dicha arista. Además, estos conjuntos son $A_= = \emptyset$, $A_+ = A_i$ y $A_- = A_j$. Por tanto, la función $F_{ij}(r)$ es de la forma:

$$F_{ij}(r) = K_{ij} + r(L_i - L_j - L(i,j)) + r^2.$$

Por tanto, alcanza su mínimo para $t = \frac{1}{2}(L(i,j) + L_j - L_i)$, lo que da lugar a un punto $x([i,j];t)$ del interior de la arista $[i,j]$ si $0 < \frac{1}{2}(L(i,j) + L_j - L_i) < L(i,j)$; es decir $|L_i - L_j| < L(i,j)$.

Para cualquier otro puente $[u,v]$; eligiendo los nombres de los extremos de ambos puentes de forma que $D(v,i) < D(u,i)$, se verifica $A_u \subseteq A_i$ y $A_v \supseteq A_j$, siendo además $[i,j] \in A_v$ y $[u,v] \in A_i$. Por tanto $L_u \leq L_i - L(u,v)$ y $L_v \geq L_j + L(i,j)$. Entonces, ya que $L_i - L_j - L(i,j) \leq 0$, se tiene

$$L_u - L_v \leq L_i - L(u,v) - L_j - L(i,j) \leq -L(u,v).$$

Por tanto el puente $[u,v]$ no verifica la condición propuesta.

Por último, si el puente $[i,j]$ verifica $|L_i - L_j| < L(i,j)$, para cualquier punto de x de G_i se tiene:

$\forall\, w \in G_j,\ \forall\, w \in [i,j]$: $D(x,w) = D(i,w) + D(x,i)$.

$\forall\, w \in G_i$: $D(x,w) \geq D(i,w) - D(x,i)$.

Entonces, ya que, $L_j - L_i < L(i,j)$:

$$D(x,P) \geq D(i,P) + D(x,i)(L_j + L(i,j)) - L_i) \geq D(i,P).$$

Análogamente, $\forall$ x de G_j será $D(x,P) \geq D(j,P)$.

Por tanto el punto $c = x([i,j];t)$ es el mínimo de $D(x,P)$ en todo el conjunto P de los puntos del grafo. ■

5. CONCLUSIONES

La mediana continua de un grafo se puede encontrar por el procedimiento siguiente:

1. Calcular las distancias entre todos los pares de vértices.
2. Detectar si existe un puente en las condiciones del teorema 4, en tal caso la solución es inmediata.
3. En otro caso, Hallar $Q = \{ x([u,v];t) \ / \ [u,v] \in A, \ w \in V,$ tales que $0 < t = \frac{1}{2}(D(w,v) + L(u,v) - D(w,u)) < l(u,v) \}$.
4. Evaluar la distancia $D(x,P)$ según el teorema 1 o 2 en los vértices y puntos de Q hasta obtener el valor mínimo.

<u>Teorema 5.</u>

El procedimiento anterior encuentra una mediana continua de $G = (V,A)$ con $O(nm^2)$ operaciones, siendo $|V| = n$ y $|A| = m$.

<u>Demostración.</u>

Para calcular las distancias entre todos los pares de vértices se puede utilizar el algoritmo de Dijkstra que utilizando estructuras dinámicas de datos tiene complejidad $O(nm \text{ Log } n)$ (ver, por ejemplo, Tarjan (20)). Los puentes de un grafo conexo se pueden determinar por un procedimiento de búsqueda en profundidad (DFS) de complejidad lineal, $O(m)$ (Ver, por ejemplo, el algoritmo de separabilidad en Even (18) o en Sedgewick (21)). Para determinar si un puente está en las condiciones del teorema 4 significa $O(m)$ operaciones. Por tanto averiguar si la mediana continua del grafo está en un puente y en caso afirmativo determinarla lleva $O(m^2)$ operaciones.

El conjunto Q contiene a todos los puntos interiores a las aristas en equilibrio con algún vértice. Por tanto, si la mediana continua no está en un puente, está en un punto de $Q \cup V$. Evaluar el valor de la función $D(x,P)$ en un punto cualquiera precisa de $O(m)$ operaciones. Determinar el conjunto Q lleva $O(mn)$ operaciones y su cardinal es también $O(mn)$. Por tanto, evaluar la función $D(x,P)$ en los puntos de Q y en los vértices significa $O(nm^2)$ operaciones.

Por tanto este rudimentario procedimiento para resolver el problema de la mediana continua de un grafo es $O(m^2n)$. ∎

Con esto, el problema de la mediana continua de un grafo está resuelto en el sentido de que admite un algoritmo polinomial para encontrar su solución. Evidentemente el procedimiento descrito se puede mejorar realizando una selección de las aristas en las que es necesario determinar puntos en equilibrio con algún vértice. EL establecimiento de soluciones heurísticas y acotaciones de la mejor localización en cada arista significará una clara mejora en la eficiencia de estos procedimientos. Actualmente se están realizando investigaciones en este sentido, así como la extensión de estos resultados y procedimientos a situaciones más generales.

6. BIBLIOGRAFIA

(1) W. Domschke, A. Drexl. *Locationa and Layout Planning: An International Bibliography*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

(2) R.F. Love, J.G. Morris, G.O. Wesolowsky. *Facilities Location. Models and Metohds*. North-Holland. Amsterdam, 1988.

(3) A.P. Hurter, J.S. Martinich. *Facility Location and the Theory of Production*. Kluwer Acad. Pub. NY, 1989.

(4) G.Y. Handler, P.B. Mirchandani, *Location on Networks*, M.I.T. Press, Cambridge MA (1979).

(5) P.B. Mirchandani, R.L. Francis. *Discrete Location Theory*. Wiley. NY, 1990.

(6) S.L. Hakimi *Optimal Location of Switching Centres and the Absolute Centres and Medians of a Graph*. Operations Research, 12, pp.450-459(1964).

(7) S.L. Hakimi *Optimum Distribution of Switching Centers in a Communication Network and Some Related Graph Theoretic Problems*. Operations Research, 13, pp.462-475(1965).

(8) E. Minieka. *The m-Center Problem*. SIAM Review. 12, pp.138-139(1970).

(9) O. Kariv and S.L. Hakimi, *An Algorithmic Approach to Network Location Problem. Part I: The p-Centers. Part II: The p-Medians*. SIAM J. Applied Mathematics 37, N. 3.

513-538(1979).

(10) G.Y. Handler: *Complexity and Efficiency in Minimax Network Location*, in: *Combinatorial Optimization*, Christofides and Mingozzi (Ed.). J. Wiley, 1979. (Ch.10) p.281.

(11) J. Moreno: *A Correction to the Definition of Local Center*, European J. Oper. Res. 20 pp.382-385(1985).

(12) P. Hansen, M. Labbé, *The Continuous p-Median of a Networks*. Network 19, pp 595-606(1989).

(13) E. Minieka *The Centers and Medians of a Graph*. Operations Research. 25, 641-650(1977).

(14) H. Frank *A Note on a Graph Theoretic Game of Hakimi's*. Operations Research, 15. pp.409-421(1967).

(15) G.Y. Handler, M. Rozman. *The Continuous m-Center Problem on a Network*. Networks, 15. pp.191-204(1985).

(16) B.C. Tansel, R.L. Francis, T.J. Lowe. *Location on Networks: A Survey. Part I: The p-Center and the p-Median Problems*. Management Science, 29, N.4. pp.482-497(1983).

(17) G. Gondran and M. Minoux, *Graph and Algorithms*. J. Wiley, NY, 1984.

(18) S. Even. *Graph Algorithms*. Computer Science Press. NY, 1979.

(19) P. Hansen, M. Labbé, D. Peeters, J.-F. Thisse. *Single Facility Location on Networks*. Annals of Discrete Mathematics 31, pp.113-146(1987).

(20) R.E. Tarjan, *Data Structures in Network Algorithms*, Society for Industrial and Applied Mathematics. NJ 1983.

(21) R. Sedgewick. *Algorithms*. Addison-Wesley. NY, 1983.