Rev.Acad.Canar.Cienc., V (Núm. 1), 47-59 (1993)

TAMAÑO MUESTRAL MÍNIMO Y CONTRASTE DE DOS PROPORCIONES BINOMIALES.

AUTORES : SÁNCHEZ GARCÍA, Miguel *
CUESTA ALVARO, Pedro **
FELIPE ORTEGA, Ángel ***

* Facultad de Medicina. Universidad Complutense.
** Servicios Informáticos. Universidad Complutense.
*** Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense.

PALABRAS CLAVE: Sample Size, Binomial Model, Test Hypothesis.

CLASIFICACIÓN AMS: 62F03.

(Este trabajo ha sido parcialmente desarrollado dentro del Proyecto CICYT INF91-74).

RESUMEN

En este trabajo diseñamos un algoritmo para calcular el mínimo tamaño muestral para el test de dos parámetros binomiales.

Se contrasta $H_0 \equiv p_1 = p_2 = p_0$ frente $H_a \equiv p_1 = p_0 - \Delta$ y $p_2 = p_0 + \Delta$, $0 < \Delta < p_0 \leq 1/2$ con nivel de significación (Error del primer tipo) menor que α y función de potencia mayor que 1-β (Error del segundo tipo menor que β). Se proporcionan unas tablas que definen la función de decisión entre las dos hipótesis.

ABSTRACT

In this paper, we design an algorithm to calculate the minimum sample size for the two parameters binomial test.

We test $H_0 \equiv p_1 = p_2 = p_0$ against $H_a \equiv p_1 = p_0 - \Delta$ and $p_2 = p_0 + \Delta$, $0 < \Delta < p_0 \leq 1/2$ with level of significance (Type I error) below α and power function above 1-β (Type II error below β). We supply tables that define the decision function between the two hyphotesis.

1. INTRODUCCIÓN.

Fenómenos en los que la respuesta admite dos categorías se presentan en muchos campos científicos: Medicina, Producción, Control de calidad, etc. Cuando en estos fenómenos se toman muestras independientes para analizar dos controles, el problema de discriminar cual de los dos es mejor, suele implicar el contraste de dos parámetros binomiales.

En este tipo de situaciones, una de las cuestiones mas interesantes consiste en determinar el mírimo tamaño muestral para contrastar la hipótesis nula $H_0 \equiv p_1 = p_2 = p_0$ frente a la alternativa $H_a \equiv p_1 = p_0 - \Delta$ y $p_2 = p_0 + \Delta$, para $0 < \Delta < p_0 \le 1/2$ con errores de primer y segundo tipo prefijados de antemano.

La determinación práctica del tamaño muestral se suele hacer por la aproximación a la distribución normal que posibilita el teorema central del limite, Lemeshow y als. (1991), Machin D. y Campbell M.J., (1987).

Esta forma de proceder sólo es buena desde el punto de vista de la sencillez de los cálculos, ya que no halla el mínimo tamaño muestral y por otra parte obliga a tomar la decisión, sobre qué hipótesis es mas correcta, en función de la diferencia de las dos variables binomiales, lo que no es fiel reflejo de lo que sucede en la realidad.

En el presente artículo calculamos el tamaño muestral mínimo mediante un algoritmo que utiliza cálculos exactos para discriminar entre las hipótesis H_0 y H_a , con errores de primer y segundo tipo prefijados y damos la región de rechazo de la hipótesis nula H_0, en función de la diferencia $\eta = \xi_2 - \xi_1$ y del menor valor de ambas variables.

El test se fundamenta en la teoría de Neyman-Pearson, expuesta en Lehmann , (1986).

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y RESULTADOS FUNDAMENTALES.

Suponemos que disponemos de una población Ω de unidades experimentales (U.E.) homogéneas, de las cuales extraemos, por muestreo aleatorio simple, dos muestras M_1 y M_2 de igual tamaño n. A las U.E. de M_1 las tratamos con un control T_1, mientras que a las de M_2 con otro distinto . T_2

Como respuesta de las U.E. a los tratamientos se observa una variable aleatoria ξ, tipo Bernoulli; variable que mide un éxito o un fracaso de la respuesta ante los tratamientos.

Llamando $\xi_{11},\xi_{12},\ldots,\xi_{1n}$ a las respuestas de M_1 a T_1, y $\xi_{21},\xi_{22},\ldots,\xi_{2n}$ a las respuestas de M_2 a T_2; las variables $\eta_1=\sum_{i=1}^{n}\xi_{1i}$ y $\eta_2=\sum_{i=1}^{n}\xi_{2i}$ se distribuyen, respectivamente, como una binomial $BI[n,p_1]$ y $BI[n,p_2]$.

El problema que nos proponemos consiste en calcular, por técnicas exactas, el mínimo tamaño muestral n, para decidir entre la hipótesis nula $H_0 \equiv p_1 = p_2 = p_0$ frente a la alternativa $H_a \equiv p_1 = p_0 - \Delta$ y $p_2 = p_0 + \Delta$, $\Delta > 0$ y $\Delta < p_0$.

Para resolver el problema, utilizamos el resultado de Lehmann [1], cuyo fundamento es la técnica de la razón de verosimilitud de Neyman-Pearson.

TEOREMA 2.1 (Lehmann).

Sean P_0 y P_1 distribuciones de probabilidad, con densidades respectivas $q_0(x)$ y $q_1(x)$ respecto de una medida μ.

i) Existencia. Para contrastar la hipótesis nula $H_0 \equiv q_0$, frente a la alternativa $H_a \equiv q_1$, existe un test ϕ y una constante C, tales que

$$E_{q_0}[\phi(x)] = \alpha \qquad [2.1]$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } q_1(x) > Cq_0(x) \\ 0 & \text{cuando } q_1(x) \le Cq_0(x) \end{cases} \qquad [2.2]$$

ii) Condición suficiente para un test de máxima potencia. Si un test satisface [2.1] y [2.2] para alguna constante C, entonces es el test de máxima potencia para constrastar H_0 frente a H_a , a nivel α.

iii) Condición necesaria para un test de máxima potencia. Si ϕ es el test de máxima potencia a nivel α, para contrastar H_0 frente a H_a, entonces, para algún C, dicho test satisface [2.2], casi seguro respecto de μ. Dicho test satisface también [2.1] a menos que exista un test de tamaño menor que α y con potencia 1.

∎

La razón de verosimilitud para contrastar $H_0 \equiv p_1 = p_2 = p_0$ frente a la alternativa $H_a \equiv p_1 = p_0 - \Delta$ y $p_2 = p_0 + \Delta$ es :

$$RV(n,p_0,\Delta,k_1,k_2)=\frac{\binom{n}{k_1}\binom{n}{k_2}(p_0-\Delta)^{k_1}(1-p_0+\Delta)^{n-k_1}(p_0+\Delta)^{k_2}(1-p_0-\Delta)^{n-k_2}}{\binom{n}{k_1}\binom{n}{k_2}p_0^{k_1}(1-p_0)^{n-k_1}p_0^{k_2}(1-p_0)^{n-k_2}}=$$

$$=\left[\frac{(p_0+\Delta)(p_0-\Delta)(1-p_0)^2}{p_0^2(1-p_0+\Delta)(1-p_0-\Delta)}\right]^{k_1}\left[\frac{(p_0+\Delta)(1-p_0)}{p_0(1-p_0-\Delta)}\right]^{k_2-k_1}\left[\frac{(1-p_0+\Delta)(1-p_0-\Delta)}{(1-p_0)(1-p_0)}\right]^{n}=$$

$$=\left[\frac{p_0^2(1-p_0)^2-\Delta^2(1-p_0)^2}{p_0^2(1-p_0)^2-\Delta^2 p_0^2}\right]^{k_1}\left[\frac{p_0(1-p_0)-\Delta(1-p_0)}{p_0(1-p_0)-\Delta p_0}\right]^{\nu}\left[\frac{(1-p_0)^2-\Delta^2}{(1-p_0)^2}\right]^{n}$$

siendo $\nu = k_2 - k_1$.

Por comodidad llamamos

$$\varphi_1(p_0,\Delta)=\frac{p_0^2(1-p_0)^2-\Delta^2(1-p_0)^2}{p_0^2(1-p_0)^2-\Delta^2 p_0^2}=\frac{1-\Delta^2/p_0^2}{1-\Delta^2/(1-p_0)^2}$$

$$\varphi_2(p_0,\Delta)=\frac{p_0(1-p_0)-\Delta(1-p_0)}{p_0(1-p_0)-\Delta p_0}=\frac{1+\Delta/p_0}{1-\Delta/(1-p_0)}$$

$$\varphi_3(p_0,\Delta)=\frac{(1-p_0)^2-\Delta^2}{(1-p_0)^2}=\frac{(1-p_0)^2-\Delta^2}{(1-p_0)^2}=1-\left(\frac{\Delta}{1-p_0}\right)^2$$

Las tres funciones previas están definidas para $0<\Delta<p_0\le 1/2$, y con esta notación la función razón de verosimilitud se puede expresar como:

$$RV[n,p_0,\Delta,k_1,k_2]=[\varphi_1(p_0,\Delta)]^{k_1}[\varphi_2(p_0,\Delta)]^{\nu}[\varphi_3(p_0,\Delta)]^{n} \qquad [2.3]$$

TEOREMA 2.2 La función $\varphi_1(\mathrm{p}_0,\Delta)$ es decreciente en Δ para p_0 fijo, y creciente en p_0 para Δ fijo.

Demostración:

$$\varphi_1(p_0,\Delta+h)=\frac{1-(\Delta+h)^2/p_0^2}{1-(\Delta+h)^2/(1-p_0)^2}<\frac{1-\Delta^2/p_0^2}{1-\Delta^2/(1-p_0)^2}=\varphi_1(p_0,\Delta)$$

$$\varphi_1(p_0+h,\Delta)=\frac{1-\Delta^2/(p_0+h)^2}{1-\Delta^2/(1-p_0-h)^2}>\frac{1-\Delta^2/p_0^2}{1-\Delta^2/(1-p_0)^2}=\varphi_1(p_0,\Delta)$$

■

TEOREMA 2.3 La función $\varphi_2(\mathrm{p}_0,\Delta)$ es creciente en Δ para p_0 fijo, y creciente en p_0 para Δ fijo.

Demostración:

$$\varphi_2(p_0,\Delta+h)=\frac{1+(\Delta+h)/p_0}{1-(\Delta+h)/(1-p_0)}>\frac{1+\Delta/p_0}{1-\Delta/(1-p_0)}=\varphi_2(p_0,\Delta)$$

$$\varphi_2(p_0+h,\Delta)=\frac{1+\Delta/(p_0+h)}{1-\Delta/(1-p_0-h)}>\frac{1+\Delta/p_0}{1-\Delta/(1-p_0)}=\varphi_2(p_0,\Delta)$$

Ambas desigualdades resultan evidentes si se hace el producto cruzado.

■

TEOREMA 2.4 La función $\varphi_3(\mathrm{p}_0,\Delta)$ es decreciente en Δ para p_0 fijo, y decreciente en p_0 para Δ fijo.

Demostración:

$$\varphi_3(p_0,\Delta+h)=1-\left(\frac{\Delta+h}{1-p_0}\right)^2<1-\left(\frac{\Delta}{1-p_0}\right)^2=\varphi_3(p_0,\Delta)$$

$$\varphi_3(p_0+h,\Delta)=1-\left(\frac{\Delta}{1-p_0-h}\right)^2<1-\left(\frac{\Delta}{1-p_0}\right)^2=\varphi_3(p_0,\Delta)$$

■

En términos prácticos el problema del contraste de dos proporciones binomiales se plantea para poder discriminar si una proporción, sin pérdida de generalidad p_2, es significativamente mayor que la otra o no.

En la terminología de los test unilaterales, la formulación de las hipótesis es:

$$H_0\equiv p_2\le p_1 \text{ frente } H_a\equiv p_2>p_1$$

En una aplicación práctica esta formulación se reduce a

$$H_0 \equiv p_1 = p_2 = p_0 \quad \text{frente a } H_a \equiv p_1 = p_0 - \Delta \ \text{y}\, p_2 = p_0 + \Delta$$

Denotamos por

$$RH(n, p_0, \Delta, C) = \{(k_1, k_2) \mid k_1 \leq k_2 \ \text{y}\ RV(n, p_0, \Delta, k_1, k_2) > C\} \qquad [2.4]$$

y utilizaremos la notación RH cuando no haya riesgo de confusión. RH es la región de rechace de la hipótesis H_0.

El error del primer tipo, o probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es cierta es:

$$P_{(p_0, p_0)}[RH(n, p_0, \Delta, C)] = \sum_{(k_1, k_2) \in RH} \binom{n}{k_1}\binom{n}{k_2} p_0^{k_1 + k_2}(1 - p_0)^{2n - (k_1 + k_2)} \qquad [2.5]$$

El error del segundo tipo, ó probabilidad de rechazar la hipótesis alternativa cuando es cierta es:

$$\begin{aligned} &1 - P_{(p_0 - \Delta, p_0 + \Delta)}[RH(n, p_0, \Delta, C)] = \\ &1 - \sum_{(k_1, k_2) \in RH} \binom{n}{k_1}\binom{n}{k_2}(p_0 - \Delta)^{k_1}(p_0 + \Delta)^{k_2}(1 - p_0 + \Delta)^{n - k_1}(1 - p_0 - \Delta)^{n - k_2} \end{aligned} \qquad [2.6]$$

El valor de la constante C se determina por técnicas computacionales, que serán explicadas en el tercer apartado.

Para cada valor de n, se calcula $C(n, p_0, \Delta)$ de tal forma que el error del primer tipo [2.5] verifique

$$P_{(p_0, p_0)}[RH(n, p_0, \Delta, C(n, p_0, \Delta))] \leq \alpha$$

y se halla el mínimo valor de n, tamaño muestral, tal que el error del segundo tipo [2.6] no supere β. Admitiendo test aleatorizados, el teorema de Lehman garantiza que así se calcula el mínimo tamaño muestral.

Para construir la región de aceptación de la hipótesis alternativa [2.4], debemos despejar ν de la desigualdad $RV(n, p_0, \Delta, k_1, k_2) > C$ obteniendo a partir de [2.3]:

$$\nu(n, p_0, \Delta, C, k_1) > \frac{1}{\ln \varphi_2(p_0, \Delta)}[\ln C - k_1 \ln \varphi_1(p_0, \Delta) - n \ln \varphi_3(p_0, \Delta)] \qquad [2.8]$$

y considerando

$$\nu_0(n,p_0,\Delta,C,k_1)=\mathrm{int}\left[\frac{1}{\ln\varphi_2(p_0,\Delta)}\left[\ln C-k_1\ln\varphi_1(p_0,\Delta)-n\ln\varphi_3(p_0,\Delta)\right]\right]+1 \quad [2.9]$$

la región de aceptación de la hipótesis alternativa es

$$RH=\{(k_1,k_2)\mid k_2-k_1\geq\nu_0(n,p_0,\Delta,k_1)\} \quad [2.10]$$

TEOREMA 2.5 La función $\nu_0(n,p_0,\Delta,k_1)$ es creciente en cada una de sus variables.
Demostración:

Es consecuencia de las propiedades de las funciones φ_1,φ_2 y φ_3.

■

3. PROCEDIMIENTO COMPUTACIONAL Y RESULTADOS.

Para valores prefijados de p_0 y Δ, ν_0 depende solo de n, C y k_1.

Denotamos por ET_1 y ET_2 los errores de primer y segundo tipo respectivamente. Se deduce de [2.5], [2.6] y [2.10] que considerando la función

$$ET(p_1,p_2)=\sum_{k_1=0}^{n-1}\binom{n}{k_1}p_1^{k_1}(1-p_1)^{n-k_1}\sum_{k_2=k_1+\nu_0(n,C,k_1)}^{n}\binom{n}{k_2}p_2^{k_2}(1-p_2)^{n-k_2} \quad [2.11]$$

dichos errores se calculan por $ET_1=ET(p_0,p_0)$ y $ET_2=1-ET(p_0-\Delta,p_0+\Delta)$

La función $\nu_0(n,C,k_1)$ se representa computacionalmente por un vector, llamado de diferencias, en el que, para un n y C concretos, el valor $\nu_0(k_1)$ indica la diferencia entre k_2 y k_1 a partir de la cual se rechaza la hipótesis nula.

Considerando el término derecho de [2.8] $\nu_d(n,C,k_1)=\ln\left(C/\varphi_1^{k_1}\varphi_3^{n}\right)/\ln\varphi_2$ se verifica que $\nu_d(n,C\varepsilon^a,k_1)=\nu_d(n,C,k_1)+a$ cuando $\varepsilon=\varphi_2$ y $a\in(0,1]$.

Entonces incrementar C hasta $C\varepsilon^a$ implica que $\nu_0(k_1)=\nu_0(k_1)+1$ en las posiciones $\{k_1\mid\nu_0(k_1)-\nu_d(k_1)\leq a\}$. En particular, todas las posiciones aumentan una unidad para $a=1$.

Estas relaciones son de interés en el algoritmo siguiente, para agilizar la búsqueda simultánea de valores exactos para C y el vector de diferencias asociado $\nu_0(n,C,k_1)$.

ALGORITMO

Datos iniciales

El valor p, la diferencia Δ, los errores del primer y segundo tipo α y β y t_α, t_β

tales que $P_{N(0,1)}\left[\zeta \geq t_\alpha\right] = \alpha$ y $P_{N(0,1)}\left[\zeta \leq t_\beta\right] = 1-\beta$

Paso 0 Calcular tamaño muestral por la aproximación normal [2].

$$n_0 = min\left\{n' \middle| \sqrt{n'} \geq \frac{1}{2\Delta}\left[t_\alpha\sqrt{2p(1-p)} + t_\beta\sqrt{p_1(1-p_1)+p_2(1-p_2)}\right]\right\}$$

Paso 1 Poner $n = n_0$ y $C = 1$.

Paso 2 Calcular por [2.9] el vector de diferencias $v_0(n, C, k_1)$ para k_1=0,1,...,n-1.

Paso 3 Evaluar $ET_1 = ET(p,p)$ y $ET_2 = 1 - ET(p-\Delta, p+\Delta)$ según [2.11].

Paso 4 Los dos errores deben ser admisibles, sin aleatorizar el test.

a) Si $ET_1 + ET_2 \leq \alpha + \beta$.

C_t=C

a1) Si un tipo de error supera su cota: Cuando $ET_1 > \alpha$ aumentar C_t (cuando $ET_2 > \beta$ disminuir C_t) hasta que, repitiendo los Pasos 2 y 3, el error ET_1 (ET_2) sea admisible.

A continuación se ejecutan b) ó c).

b) Si $ET_1 \leq \alpha$ y $ET_2 \leq \beta$

C=C_t

Si $n > n_0$ ir al Paso 5.

En otro caso $n = n$ - 1. Ir al Paso 2.

c) Si $ET_1 > \alpha$ ó $ET_2 > \beta$

Si $n < n_0$ poner $n = n$+1 ,recalcular $v_0(n, C, k_1)$ e ir al Paso 5.

En otro caso $n = n$+1. Ir al Paso 2.

Paso 5 Escribir n_0 , n , C y $v_0(n, C, k_1)$. Escribimos sólamente las posiciones k_1 donde se produce un cambio.

FIN.

INTERPRETACIÓN DE TABLAS Y CONCLUSIONES

En la Tabla 1. se presentan los resultados del procedimiento anterior para distintos valores de p, Δ, α y β, concluyéndose que el tamaño n exacto es menor que el de la aproximación normal para valores bajos de p siendo muy parecidos a partir de aproximadamente p =0.25

Como consecuencia de los cálculos realizados se cometen errores no superiores a los prescritos y en general menores, debido al carácter discreto de las observaciones.

Ejemplo: Para $p = 0.20$, $\Delta = 0.05$, $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.05$ se requiere un tamaño muestral exacto de n = 341. Si $k_1 = 100$, se rechaza la hipótesis nula a partir de $k_2 = 126$.

BIBLIOGRAFIA

[1] LEHMANN E. L., (1986). "*Testing Statistical Hypothesis*". John Wiley. New York.

[2] MACHIN D., CAMPBELL M. J., (1988). "*Statistical Tables for the Design of Clinical Trials*". Blackwell Scientific Publications.

[3] LEMESHOW S. et al., (1990). "*Adequacy of Sample Size in Health Studies*". John Wiley. Chichester.

Tabla 1. Tamaños muestrales y valores de decisión C y $k_1\left[\nu_0(n,C,k_1)\right]$

P = 0.10 $\alpha = 0.05$ $\beta = 0.05$

Δ = 0.05 $n_0 = 193$ $n = 181$ $C = 1.012$

0[2]	2[3]	3[4]	5[5]	7[6]	8[7]	10[8]	11[9]	13[10]
15[11]	16[12]	18[13]	20[14]	21[15]	23[16]	25[17]	26[18]	28[19]
29[20]	31[21]	33[22]	34[23]	36[24]	38[25]	39[26]	41[27]	42[28]
44[29]	46[30]	47[31]	49[32]	51[33]	52[34]	54[35]	55[36]	57[37]
59[38]	60[39]	62[40]	64[41]	65[42]	67[43]	68[44]	70[45]	72[46]
73[47]	75[48]	77[49]	78[50]	80[51]	81[52]	83[53]	85[54]	86[55]
88[56]	90[57]	91[58]	93[59]	94[60]	96[61]	98[62]	99[63]	101[64]
103[65]	104[66]	106[67]	107[68]	109[69]	111[70]	112[71]	114[72]	116[73]
117[74]	119[75]	120[76]	122[77]	124[78]	125[79]	127[80]	129[81]	130[82]
132[83]	133[84]	135[85]	137[86]	138[87]	140[88]	142[89]	143[90]	145[91]
146[92]	148[93]	150[94]	151[95]	153[96]	155[97]	156[98]	158[99]	159[100]
161[101]	163[102]	164[103]	166[104]	168[105]	169[106]	171[107]	172[108]	174[109]
176[110]	177[111]	179[112]						

P = 0.15 $\alpha = 0.05$ $\beta = 0.05$

Δ = 0.05 $n_0 = 274$ $n = 268$ $C = 1.051$

0[3]	1[4]	4[5]	7[6]	10[7]	13[8]	16[9]	19[10]	22[11]
25[12]	28[13]	32[14]	35[15]	38[16]	41[17]	44[18]	47[19]	50[20]
53[21]	56[22]	59[23]	62[24]	65[25]	68[26]	71[27]	74[28]	77[29]
80[30]	83[31]	86[32]	89[33]	92[34]	96[35]	99[36]	102[37]	105[38]
108[39]	111[40]	114[41]	117[42]	120[43]	123[44]	126[45]	129[46]	132[47]
135[48]	138[49]	141[50]	144[51]	147[52]	150[53]	153[54]	156[55]	160[56]
163[57]	166[58]	169[59]	172[60]	175[61]	178[62]	181[63]	184[64]	187[65]
190[66]	193[67]	196[68]	199[69]	202[70]	205[71]	208[72]	211[73]	214[74]
217[75]	220[76]	223[77]	227[78]	230[79]	233[80]	236[81]	239[82]	242[83]
245[84]	248[85]	251[86]	254[87]	257[88]	260[89]	263[90]	266[91]	

Δ = 0.10 $n_0 = 67$ $n = 62$ $C = 1.088$

0[2]	1[3]	2[4]	3[5]	4[6]	5[7]	7[8]	8[9]	9[10]
10[11]	11[12]	12[13]	13[14]	14[15]	15[16]	17[17]	18[18]	19[19]
20[20]	21[21]	22[22]	23[23]	24[24]	25[25]	27[26]	28[27]	29[28]
30[29]	31[30]	32[31]	33[32]	34[33]	35[34]	37[35]	38[36]	39[37]
40[38]	41[39]	42[40]	43[41]	44[42]	45[43]	47[44]	48[45]	49[46]
50[47]	51[48]	52[49]	53[50]	54[51]	55[52]	56[53]	58[54]	59[55]
60[56]	61[57]							

P = 0.20 $\alpha = 0.05$ $\beta = 0.05$

Δ = 0.05 $n_0 = 344$ $n = 341$ $C = 1.000$

0[5]	2[6]	7[7]	12[8]	16[9]	21[10]	26[11]	31[12]	35[13]
40[14]	45[15]	50[16]	54[17]	59[18]	64[19]	69[20]	73[21]	78[22]
83[23]	88[24]	92[25]	97[26]	102[27]	107[28]	111[29]	116[30]	121[31]
126[32]	130[33]	135[34]	140[35]	145[36]	149[37]	154[38]	159[39]	164[40]
168[41]	173[42]	178[43]	183[44]	187[45]	192[46]	197[47]	202[48]	206[49]
211[50]	216[51]	220[52]	225[53]	230[54]	235[55]	239[56]	244[57]	249[58]
254[59]	258[60]	263[61]	268[62]	273[63]	277[64]	282[65]	287[66]	292[67]
296[68]	301[69]	306[70]	311[71]	315[72]	320[73]	325[74]	330[75]	334[76]
339[77]								

P = 0.20 $\alpha = 0.05$ $\beta = 0.05$

Δ = 0.10 $n_0 = 84$ $n = 82$ $C = 1.026$

0[3]	2[4]	4[5]	6[6]	8[7]	10[8]	12[9]	13[10]	15[11]
17[12]	19[13]	21[14]	23[15]	25[16]	27[17]	29[18]	31[19]	33[20]
35[21]	37[22]	39[23]	41[24]	43[25]	45[26]	47[27]	49[28]	51[29]
53[30]	55[31]	57[32]	59[33]	61[34]	63[35]	65[36]	67[37]	69[38]
71[39]	73[40]	75[41]	77[42]	79[43]	81[44]			

P = 0.25 $\alpha = 0.05$ $\beta = 0.05$

Δ = 0.05 $n_0 = 404$ $n = 403$ $C = 1.000$

0[8]	6[9]	13[10]	20[11]	27[12]	34[13]	41[14]	48[15]	55[16]
62[17]	69[18]	76[19]	82[20]	89[21]	96[22]	103[23]	110[24]	117[25]
124[26]	131[27]	138[28]	145[29]	152[30]	158[31]	165[32]	172[33]	179[34]
186[35]	193[36]	200[37]	207[38]	214[39]	221[40]	228[41]	234[42]	241[43]
248[44]	255[45]	262[46]	269[47]	276[48]	283[49]	290[50]	297[51]	304[52]
310[53]	317[54]	324[55]	331[56]	338[57]	345[58]	352[59]	359[60]	366[61]
373[62]	380[63]	386[64]	393[65]	400[66]				

Δ = 0.10 $n_0 = 99$ $n = 98$ $C = 1.058$

0[4]	1[5]	4[6]	7[7]	10[8]	13[9]	16[10]	20[11]	23[12]
26[13]	29[14]	32[15]	35[16]	38[17]	41[18]	44[19]	47[20]	50[21]
53[22]	56[23]	59[24]	62[25]	66[26]	69[27]	72[28]	75[29]	78[30]
81[31]	84[32]	87[33]	90[34]	93[35]	96[36]			

P = 0.30 $\alpha = 0.05$ $\beta = 0.05$

Δ = 0.05 $n_0 = 452$ $n = 452$ $C = 1.000$

0[11]	9[12]	19[13]	29[14]	39[15]	49[16]	59[17]	69[18]	78[19]
88[20]	98[21]	108[22]	118[23]	128[24]	138[25]	148[26]	158[27]	168[28]
177[29]	187[30]	197[31]	207[32]	217[33]	227[34]	237[35]	247[36]	257[37]
267[38]	276[39]	286[40]	296[41]	306[42]	316[43]	326[44]	336[45]	346[46]
356[47]	366[48]	375[49]	385[50]	395[51]	405[52]	415[53]	425[54]	435[55]
445[56]								

Δ = 0.15 $n_0 = 48$ $n = 48$ $C = 1.041$

0[4]	2[5]	4[6]	7[7]	10[8]	12[9]	15[10]	18[11]	21[12]
23[13]	26[14]	29[15]	31[16]	34[17]	37[18]	39[19]	42[20]	45[21]
47[22]								

P = 0.35 $\alpha = 0.05$ $\beta = 0.05$

Δ = 0.05 $n_0 = 490$ $n = 490$ $C = 1.000$

0[14]	6[15]	21[16]	35[17]	50[18]	64[19]	79[20]	93[21]	108[22]
122[23]	137[24]	151[25]	166[26]	181[27]	195[28]	210[29]	224[30]	239[31]
253[32]	268[33]	282[34]	297[35]	311[36]	326[37]	341[38]	355[39]	370[40]
384[41]	399[42]	413[43]	428[44]	442[45]	457[46]	471[47]	486[48]	

Δ = 0.15 $n_0 = 52$ $n = 53$ $C = 1.000$

0[5]	2[6]	6[7]	10[8]	14[9]	19[10]	23[11]	27[12]	31[13]
35[14]	39[15]	44[16]	48[17]	52[18]				

P = 0.45 $\alpha = 0.05$ $\beta = 0.05$

Δ = 0.05 $n_0 = 534$ $n = 535$ $C = 1.022$

0[23]	38[24]	87[25]	135[26]	184[27]	232[28]	281[29]	330[30]	378[31]
427[32]	476[33]	524[34]						

Δ = 0.15 $n_0 = 57$ $n = 58$ $C = 1.042$

0[8]	9[9]	23[10]	38[11]	53[12]

Tabla 1. Continuación.

P = 0.10 $\alpha = 0.05$ $\beta = 0.10$

Δ = 0.05 $n_0 = 153$ $n = 146$ $C = 1.668$

0[3]	2[4]	4[5]	5[6]	7[7]	8[8]	10[9]	12[10]	13[11]
15[12]	17[13]	18[14]	20[15]	22[16]	23[17]	25[18]	26[19]	28[20]
30[21]	31[22]	33[23]	35[24]	36[25]	38[26]	39[27]	41[28]	43[29]
44[30]	46[31]	48[32]	49[33]	51[34]	52[35]	54[36]	56[37]	57[38]
59[39]	61[40]	62[41]	64[42]	65[43]	67[44]	69[45]	70[46]	72[47]
74[48]	75[49]	77[50]	78[51]	80[52]	82[53]	83[54]	85[55]	87[56]
88[57]	90[58]	91[59]	93[60]	95[61]	96[62]	98[63]	100[64]	101[65]
103[66]	104[67]	106[68]	108[69]	109[70]	111[71]	113[72]	114[73]	116[74]
117[75]	119[76]	121[77]	122[78]	124[79]	126[80]	127[81]	129[82]	130[83]
132[84]	134[85]	135[86]	137[87]	139[88]	140[89]	142[90]	143[91]	145[92]

P = 0.15 $\alpha = 0.05$ $\beta = 0.10$

Δ = 0.05 $n_0 = 217$ $n = 213$ $C = 1.785$

0[4]	1[5]	4[6]	7[7]	10[8]	13[9]	16[10]	19[11]	22[12]
26[13]	29[14]	32[15]	35[16]	38[17]	41[18]	44[19]	47[20]	50[21]
53[22]	56[23]	59[24]	62[25]	65[26]	68[27]	71[28]	74[29]	77[30]
80[31]	83[32]	86[33]	90[34]	93[35]	96[36]	99[37]	102[38]	105[39]
108[40]	111[41]	114[42]	117[43]	120[44]	123[45]	126[46]	129[47]	132[48]
135[49]	138[50]	141[51]	144[52]	147[53]	150[54]	154[55]	157[56]	160[57]
163[58]	166[59]	169[60]	172[61]	175[62]	178[63]	181[64]	184[65]	187[66]
190[67]	193[68]	196[69]	199[70]	202[71]	205[72]	208[73]	211[74]	

Δ = 0.10 $n_0 = 53$ $n = 48$ $C = 2.076$

0[3]	1[4]	2[5]	4[6]	5[7]	6[8]	7[9]	8[10]	9[11]
10[12]	11[13]	12[14]	14[15]	15[16]	16[17]	17[18]	18[19]	19[20]
20[21]	21[22]	22[23]	24[24]	25[25]	26[26]	27[27]	28[28]	29[29]
30[30]	31[31]	32[32]	34[33]	35[34]	36[35]	37[36]	38[37]	39[38]
40[39]	41[40]	42[41]	44[42]	45[43]	46[44]	47[45]		

P = 0.20 $\alpha = 0.05$ $\beta = 0.10$

Δ = 0.05 $n_0 = 272$ $n = 271$ $C = 1.694$

0[6]	3[7]	8[8]	12[9]	17[10]	22[11]	27[12]	31[13]	36[14]
41[15]	45[16]	50[17]	55[18]	60[19]	64[20]	69[21]	74[22]	79[23]
83[24]	88[25]	93[26]	98[27]	102[28]	107[29]	112[30]	117[31]	121[32]
126[33]	131[34]	136[35]	140[36]	145[37]	150[38]	155[39]	159[40]	164[41]
169[42]	174[43]	178[44]	183[45]	188[46]	193[47]	197[48]	202[49]	207[50]
212[51]	216[52]	221[53]	226[54]	231[55]	235[56]	240[57]	245[58]	250[59]
254[60]	259[61]	264[62]	269[63]					

Δ = 0.10 $n_0 = 67$ $n = 65$ $C = 1.773$

0[3]	1[4]	3[5]	5[6]	7[7]	9[8]	10[9]	12[10]	14[11]
16[12]	18[13]	20[14]	22[15]	24[16]	26[17]	28[18]	30[19]	32[20]
34[21]	36[22]	38[23]	40[24]	42[25]	44[26]	46[27]	48[28]	50[29]
52[30]	54[31]	56[32]	58[33]	60[34]	62[35]	64[36]		

P = 0.25 $\alpha = 0.05$ $\beta = 0.10$

Δ = 0.05 $n_0 = 319$ $n = 319$ $C = 1.689$

0[8]	2[9]	9[10]	16[11]	23[12]	30[13]	37[14]	44[15]	51[16]
58[17]	64[18]	71[19]	78[20]	85[21]	92[22]	99[23]	106[24]	113[25]
120[26]	127[27]	134[28]	141[29]	147[30]	154[31]	161[32]	168[33]	175[34]
182[35]	189[36]	196[37]	203[38]	210[39]	217[40]	223[41]	230[42]	237[43]
244[44]	251[45]	258[46]	265[47]	272[48]	279[49]	286[50]	293[51]	299[52]
306[53]	313[54]							

Δ = 0.10 $n_0 = 79$ $n = 78$ $C = 1.754$

0[5]	3[6]	6[7]	9[8]	12[9]	16[10]	19[11]	22[12]	25[13]
28[14]	31[15]	34[16]	37[17]	40[18]	43[19]	46[20]	49[21]	52[22]
55[23]	58[24]	62[25]	65[26]	68[27]	71[28]	74[29]	77[30]	

P = 0.30 $\alpha = 0.05$ $\beta = 0.10$

Δ = 0.05 $n_0 = 358$ $n = 358$ $C = 1.687$

0[11]	7[12]	17[13]	27[14]	37[15]	47[16]	57[17]	67[18]	77[19]
86[20]	96[21]	106[22]	116[23]	126[24]	136[25]	146[26]	156[27]	166[28]
176[29]	186[30]	195[31]	205[32]	215[33]	225[34]	235[35]	245[36]	255[37]
265[38]	275[39]	285[40]	294[41]	304[42]	314[43]	324[44]	334[45]	344[46]
354[47]								

Δ = 0.15 $n_0 = 39$ $n = 39$ $C = 1.708$

0[4]	1[5]	4[6]	7[7]	9[8]	12[9]	15[10]	18[11]	20[12]
23[13]	26[14]	28[15]	31[16]	34[17]	36[18]			

P = 0.35 $\alpha = 0.05$ $\beta = 0.10$

Δ = 0.05 $n_0 = 388$ $n = 388$ $C = 1.701$

0[14]	11[15]	26[16]	40[17]	55[18]	69[19]	84[20]	98[21]	113[22]
127[23]	142[24]	157[25]	171[26]	186[27]	200[28]	215[29]	229[30]	244[31]
258[32]	273[33]	287[34]	302[35]	317[36]	331[37]	346[38]	360[39]	375[40]

Δ = 0.15 $n_0 = 42$ $n = 42$ $C = 1.752$

0[5]	2[6]	6[7]	10[8]	15[9]	19[10]	23[11]	27[12]	31[13]
36[14]	40[15]							

P = 0.45 $\alpha = 0.05$ $\beta = 0.10$

Δ = 0.05 $n_0 = 422$ $n = 423$ $C = 1.742$

0[21]	37[22]	85[23]	134[24]	182[25]	231[26]	280[27]	328[28]	377[29]

Δ = 0.15 $n_0 = 46$ $n = 47$ $C = 1.698$

0[7]	3[8]	17[9]	32[10]

Recibido: 30 de Agosto 1993

Rev.Acad.Canar.Cienc., V (Núm. 1), 61-70 (1993)

ALGUNAS INTEGRALES FINITAS QUE INVOLUCRAN FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS GENERALIZADAS

Beatriz González

Centro de Investigación de Matemática Aplicada
(C.I.M.A.)

Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia
Apartado Postal 10482

ABSTRACT

The object of this paper is evaluate finite integrals involving the product of two generalized hypergeometric functions. The results obtain are expressed in terms of Kampé de Fériet's function and can be considered as its integrals representations. Our formulae generalized known results involving certain special functions, as: Orthogonal Polynomials and their generalizations. Through of them, we can obtained integrals involving others special functions related with the generalized hypergeometric functions.

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es evaluar integrales finitas que involucran el producto de dos funciones hipergeométricas generalizadas. Los resultados obtenidos aquí son expresados en términos de la función Kampé de Feriét y pueden considerarse como representaciones integrales de éstas. Nuestras fórmulas generalizan resultados conocidos que envuelven ciertas funciones, tales como: Polinomios ortogonales y sus generalizaciones. A través de éllos podemos obtener integrales que involucran otras funciones especiales relacionadas con las funciones hipergeométricas generalizadas.

Palabras Claves: Integrales, Funciones Hipergeométricas Generalizadas, Función Kampé de Feriét.