

## El Álgebra no puede esperar

Javier Rodríguez González (Instituto de Enseñanza Secundaria de Ingenio. España)

---

### Resumen

Se trata de una experiencia realizada con alumnado de 15 años al que se le presenta el bloque de álgebra con problemas de contexto próximo donde se resuelven ecuaciones de grado 1, de grado 2, algunas de grado 3 con todas las situaciones posibles en las que pueden aparecer. El alumnado tendrá que preparar, además de dos pruebas escritas, una exposición de problemas resueltos ante el grupo. También se introducen programas de representación gráfica que agilizan la resolución gráfica de las ecuaciones.

### Palabras clave

Ecuaciones, álgebra, Geogebra, resolución de problemas, gráficas

---

### Abstract

This is an experience carried out with 15 years old students. The topic of algebra is presented with problems in a real context, with 1st, 2nd and 3th degree equations involved in it. Students will have to do two written tests and a exposition, in pair, where some problems are solved in front of the group. Graphing programs will be used by students trying to search the graphic resolution of the equations.

### Keywords

Equations, Algebra, Geogebra, solving problems, graph

---

## 1. Introducción y justificación

*"El álgebra es generosa: a menudo da más de lo que se le pide."*

*D'Alembert*

Esta experiencia se ha realizado en la opción A de las matemáticas de 4º ESO (15 años), a lo largo de los cursos 2013-2014 y 2014-2015. Se intenta abordar la resolución de ecuaciones y su aplicación en problemas de contexto real y por lo tanto más cercano al alumnado. Ya en el BOC de 7 de junio 2007 se sugiere:

“Estudiar el álgebra en situaciones significativas variadas (reconocimiento de pautas numéricas, asociadas a elementos geométricos, en las que intervengan magnitudes físicas, mediante métodos gráficos, de ensayo y error, con ayuda de medios tecnológicos, etc.) para que el alumnado se dé cuenta de su alcance, más allá de las típicas operaciones con polinomios”

En concreto, se trata de la realización de diferentes enunciados de problemas con ecuaciones algebraicas. Aparecen ecuaciones de grado 1, de grado 2, algunas de grado 3 con todas las situaciones posibles en las que pueden aparecer (ecuaciones completas, incompletas, con identidades notables, restringidas a determinados valores, ecuaciones por partes...). Se trata que el alumnado se familiarice con los enunciados de problemas y que apliquen lo que saben, para ello trabajaremos individualmente, por parejas y en gran grupo donde se realizarán las exposiciones del alumnado en la que tendrán que explicar a sus compañeros las distintas resoluciones.



## 2. Objetivos

Los objetivos principales de esta experiencia están relacionados con el bloque de Álgebra y la resolución de problemas en 4º ESO y se pueden resumir en estos cuatro apartados:

1. Obtener el valor numérico en fórmulas y ecuaciones presentadas en contextos diversos.
2. Resolver diferentes ecuaciones de forma gráfica y algebraica.
3. Resolver problemas cotidianos que además se relacionan con otras materias utilizando ecuaciones de primer grado, de segundo grado.
4. Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo y error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos.

## 3. Características de la Experiencia. Fases

El material que sustenta la experiencia consiste en una selección de problemas que gira en torno a la resolución de ecuaciones y otros aspectos del bloque de contenidos de Álgebra. El proceso a seguir se puede describir en cuatro fases que pasamos a detallar:

La PRIMERA fase es expositiva por parte del profesor, en dos o tres sesiones de trabajo se introducen los contenidos necesarios partiendo de los conocimientos previos del alumnado. Se presentan ejemplos, se marca un guion de trabajo y los problemas que deberán realizar y posteriormente exponer.

La SEGUNDA fase es la resolución de los problemas, por parte del alumnado, donde se aprovecha para resolver dudas entre iguales y con el profesor. Con el alumnado distribuido en parejas deberán abordar los problemas que se le han asignado. El alumnado deberá trabajar con los problemas, analizarlos, sacar los datos que sean más relevantes, aplicarlos a la ecuación correspondiente y resolver esas ecuaciones, mayoritariamente de 1er y 2º grado. Además, tendrán que verificar las soluciones y presentárselas a sus compañeros.

La TERCERA fase es la exposición de los problemas que han resuelto en parejas. El alumnado presentará, ante el grupo-clase, dichos problemas prestando atención a los contenidos del problema, la exposición, la explicación de las dudas que tengan los compañeros y el tiempo de resolución.

La CUARTA fase es la relacionada con las TIC y la resolución gráfica de diferentes ecuaciones utilizando diversos programas informáticos.

Secuencia de actividades, tareas, etc	Instrumentos de evaluación	Sesiones	Agrupamiento	Recursos utilizados
Se recuerda los casos de ecuaciones de 1er grado y 2º grado. Todas las situaciones que se pueden dar		2	Gran grupo	Teoría y resolución de problemas: <b>Anexo 1</b>
Trabajo por parejas para la resolución de los problemas que deben presentar		2	parejas	Dossier problemas <b>Anexo 2</b>
Resolución de problemas por parejas	Exposición de problemas	5	parejas	Dossier problemas <b>Anexo 2</b>
Explicación del funcionamiento de los diferentes programas informáticos y ejemplos		1	Gran grupo	Aula medusa (Informática)
Presentación de las ecuaciones para resolver con programas como Geogebra, Winfun, Wiris, etc.		2	parejas	Aula medusa (Informática) <b>Anexo 5</b>
Resolución de ecuaciones dadas en forma gráfica	Prueba escrita	1	Individual	<b>Anexo 4</b>
Prueba sobre resolución de problemas algebraicos	Prueba escrita	1	Individual	<b>Anexo 3</b>

Tabla 1

### 3.1. Primera y segunda sesión

Se explica con detenimiento en qué consiste la resolución de problemas y las partes de las que consta. Una vez terminada se hace un repaso de los contenidos y se empieza a resolver ecuaciones de 1º y 2º grado con todas las situaciones teóricas con las que se pueden encontrar. Algunos ejemplos de ecuaciones con las que se pueden trabajar las mostramos en el ANEXO 1.

Las soluciones de las ecuaciones se calculan tanto de forma algebraica como utilizando programas tecnológicos como Winfun, GeoGebra, Wiris, etc... Incluso haciendo uso de programas que no necesitan instalación y que se encuentran fácilmente en la red como el enlace que mostramos a continuación:

<http://www.disfrutalasmaticas.com/graficos/grafico-funciones.php>

Dificultades encontradas: Algunos aspectos relevantes que debemos hacer constar respecto a estas dos sesiones son las dificultades que encontramos a la hora de resolver diferentes ecuaciones, sobre todo de primer grado. Pasamos a describirlas.

- Quitar denominadores y continuar trabajando sólo con los numeradores.
- Sumar fracciones con diferentes denominadores sin sacar el mínimo común múltiplo.
- No tener en cuenta el signo negativo delante de una expresión racional.
- El trabajo con los números racionales.
- Mal uso de las Identidades notables.

En algunos de estos casos se presenta un buen momento para hablarles de la relación que existe entre los números decimales y fraccionarios. También es fundamental la utilización de la aproximación, en casos determinados, para la resolución y la comprobación. Por ejemplo, si estamos trabajando con la ecuación de la Figura 1, y ponemos la ecuación de la forma siguiente  $0.5x+1-1=6$  esto facilita enormemente su resolución.

$$\frac{x+2}{2} - 1 = 6$$

Figura 1

### 3.2. Sesiones de tercera a cuarta

El alumnado se dispondrá en parejas y abordarán cinco de los problemas planteados que les asignará el profesor. Esto garantiza que cada pareja trabaje con problemas de todos los tipos, con identidades notables, incompletas, etc... De esta manera, hay que observar que los grupos tienen problemas que se repiten. Para la resolución de estos, tendrán dos sesiones de clase como máximo (podrán realizar todas las preguntas oportunas en esas dos sesiones y se resolverán todas las dudas planteadas).

En el ANEXO 2 se muestran la base de problemas con la que se trabaja y de los que cada pareja debe abordar 5. Es importante hacer notar que cada alumno tendrá que defender, en la exposición, un problema de estos 5 y que le será asignado por el profesor.

Dificultades encontradas:

- Bloqueo inicial ante el problema: "No sé por dónde empezar". En general, no están acostumbrados a abordar problemas de este tipo con cierta autonomía.



## El Álgebra no puede esperar

J. Rodríguez González

- No identificar la ecuación con la que hay que trabajar.
- Sustituir la variable correcta por el valor correspondiente.
- Dificultades a la hora de despejar ecuaciones de 1º grado.
- Aplicación de las soluciones de la ecuación de 2º grado.

### 3.3. Sesiones de quinta a novena

Cada pareja expone el problema que se le ha asignado ante el grupo-clase y responde a todas las preguntas y dudas que surjan. Para ello dispone de 10 minutos a 15 minutos (según dificultad) y debe realizar la explicación sin ningún recurso escrito.

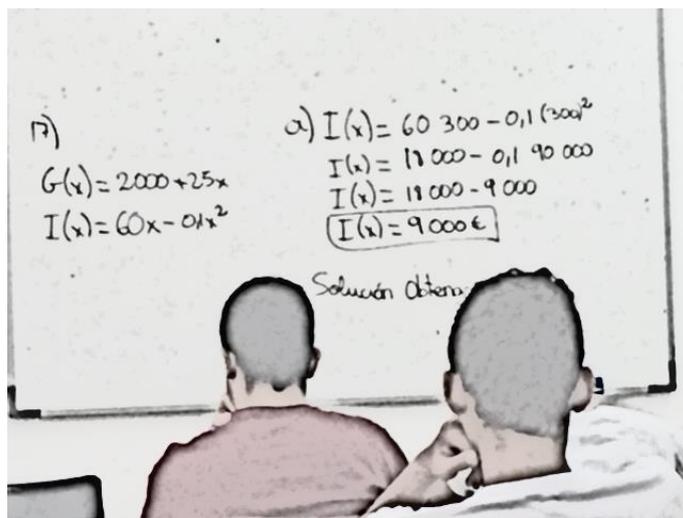


Imagen 1

Dificultades encontradas:

- El alumnado que por timidez o falta de trabajo se niega a exponer el problema.
- La falta de estrategias propias de la exposición oral: tono de voz, lenguaje corporal, control del tiempo, etc. Realmente también tenemos que decir en este apartado, que la experiencia a lo largo de las sesiones hace que vayan mejorando considerablemente las exposiciones.



Imagen 2

### 3.4. Décima sesión

Resolución de diferentes ecuaciones por el método gráfico y con la ayuda de diversos programas informáticos como Winfun, GeoGebra, etc...

Desde el aula medusa de informática empezamos a estudiar cómo resolver las ecuaciones mediante determinados programas informáticos, Instalamos el programa winfun y explicamos su funcionamiento (además nos servirá para representación de funciones). Mostremos algunos ejemplos:

**Ejemplo 1:** Queremos calcular las soluciones de la ecuación  $x^2+2x+1=4$ .

En la ventana Entrada de datos escribimos los dos miembros de la ecuación y obtenemos gráficamente las soluciones  $x=-3$  ;  $x=1$  de la ecuación.

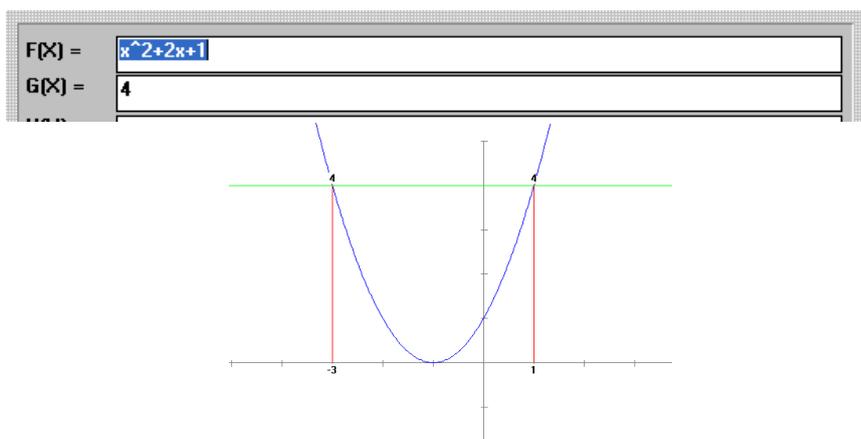


Figura 2

**Ejemplo 2:** Otros ejemplos utilizando la web <http://www.disfrutalasmaticas.com> y resolviendo la siguientes ecuaciones:

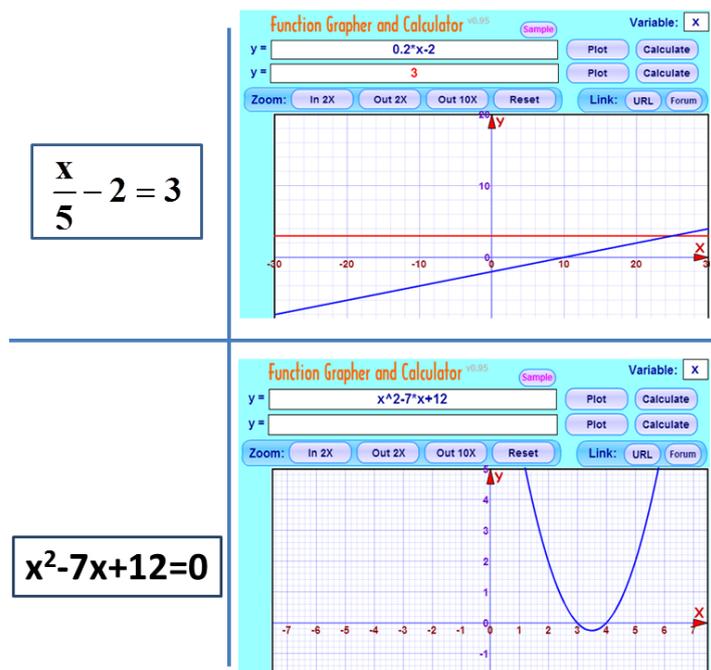


Figura 3



### 3.5. Decimoprimer y decimosegunda sesión

Después de explicar el funcionamiento de los diferentes programas y las explicaciones correspondientes de cuáles son las soluciones empezamos a trabajar con las ecuaciones que se encuentran en el ANEXO 5. Utilizando el aula de informática tenemos que verificar si las soluciones de las diferentes ecuaciones que aparecen son verdaderas. En la gráfica no salen las soluciones numéricas, para ello nosotros tendremos que calcular las raíces y realizar las diferentes operaciones para contrastar con la gráfica mostrada. También hay que tener en cuenta que el programa no da la solución como raíz sino como un n° decimal aproximado, es por ello que el alumnado debe calcular y resolver estas operaciones dadas en la solución para saber si son ciertas. Por ejemplo en la ecuación 6 de la Figura 4.

$$6.- \quad x(x-1)+1 = \frac{5}{6} + \frac{x(2x-1)}{3} \qquad \text{sol: } x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Figura 4

Dificultades encontradas:

La mayor dificultad es a la hora de expresar la solución.

- Algunos alumnos, después de encontrar el punto de corte, es decir, la solución visual, no son capaces de buscar su coordenada de abscisas (eje OX).
- Otros eligen el valor del eje de ordenadas (eje OY) como solución.

Realmente estas dificultades no se presentan en la mayoría del alumnado y creemos que se deben a falta de concentración. Las dos últimas sesiones están relacionadas con las pruebas escritas, una de resolución de problemas escritos y otra en resolución de problemas gráficos.

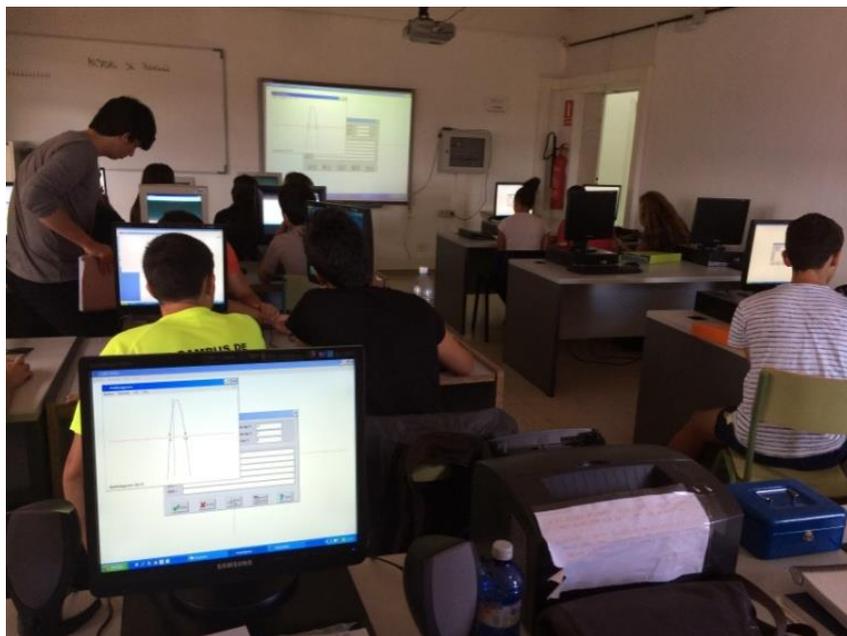


Imagen 3

#### 4. Evaluación

Antes de hablar de la calificación de la actividad recordemos el criterio de evaluación sobre el que estamos incidiendo. Criterio de evaluación 3 de 4º ESO Opción A. (BOC de 7 de junio 2007)

**Resolver problemas de la vida cotidiana utilizando métodos numéricos, gráficos o algebraicos, cuando se basen en la utilización de fórmulas conocidas o en el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer o de segundo grado, o de sistemas sencillos de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.**

Se trata de confirmar si el alumnado ha desarrollado la capacidad de comprender la situación planteada en un problema, descubriendo regularidades, pautas y relaciones, aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales, utilizar algún método para encontrar la solución y contrastar el resultado obtenido con la situación de partida. El método algebraico no se plantea como el único método de resolución y se combina también con otros métodos numéricos y gráficos y mediante el uso adecuado de las tecnologías de la información.

Para la evaluación, tenemos en cuenta la exposición con un 30% de la nota, la resolución de forma gráfica de las ecuaciones con un 20% (Anexo 4) y una prueba escrita e individual de resolución de problemas con un 50% (Anexo 3).

Instrumento de Evaluación	Valor
Exposición (parejas)	30%
Prueba resolución gráfica	20%
Prueba escrita	50%

Tabla 2

En el caso de la exposición, mostramos a continuación una idea de los ítems que podemos valorar. Esta puntuación se va realizando mientras el alumnado está exponiendo el problema. Hay que tener en cuenta que hay casillas que no son puntuadas siempre, la puntuación final será la media (hay que tener en cuenta que, [0,1) insuficiente, [1,2) (suficiente, bien) [2,3] (notable, sobresaliente))

Nombre:	0-3
<b>VALORACIÓN</b>	
Contenidos del problema, explicación de lo que va a hacer	
Identifica los datos del problema	
Utiliza los datos del problema	
Aplica los datos a la ecuación correspondiente	
Resuelve la ecuación	
Verifica los resultados con el problema de partida	
Explica los pasos que se van dando en la resolución del problema	
Responde las dudas que les surgen a los compañeros	
Admite las críticas en la resolución y las preguntas comprometidas	
Da respuesta a la resolución del problema por otro camino (p.e. ensayo y error..)	
Resuelve el problema en el tiempo estipulado	

Tabla 3



## 5. Conclusiones

Es indudable que tener que explicar verbalmente un problema ayuda en el proceso de aprendizaje de esta materia, es decir, ayuda a entender. En el caso de la resolución de problemas, es primordial verbalizar el proceso seguido y compartir este con los compañeros y compañeras. Para que todo esto se produzca es necesario incluir la realización de exposiciones orales como instrumento de evaluación que complementen las pruebas escritas.



Figura 5

Lo que ha quedado patente en esta experiencia es que el alumnado se ha sentido involucrado en el proceso de resolución de problemas, compartiendo sus ideas, asumiendo el error como parte del aprendizaje y generando en él la confianza necesaria para abordar esta parte del temario.

En cualquier caso, para que se produzca este aprendizaje hay que trabajar mucho las dinámicas de aula ya que el alumnado normalmente no está acostumbrado a realizar exposiciones y compartir sus reflexiones. Sin embargo, hemos observado que, aunque al principio les cuesta entender que deben hacer, con el paso de los minutos y las sesiones van perdiendo el miedo a hablar, a equivocarse y superan, en la mayoría de los casos, esta primera fase de bloqueo.

Para terminar, volvemos al currículo (BOC de 7 de junio 2007) que nos recuerda:

**“Las estrategias generales y técnicas simples de resolución de problemas, la perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a estos, la confianza en las propias capacidades para afrontarlos, y en las propias capacidades para resolverlos, el reconocimiento de lo aprendido y de lo que falta por aprender, contenidos íntimamente ligados a la construcción del pensamiento matemático”**

## Bibliografía

Proyecto Azarquiel, (2000). *Matemáticas 4º ESO*. Ediciones de la Torre Problemas PAU Gobierno de Canarias. Recuperado el 15 de diciembre de 2015, de [www.gobcan.es/educación/general/pww/scripts/materias.asp](http://www.gobcan.es/educación/general/pww/scripts/materias.asp)

## Anexos

### Anexo 1:

<https://www.dropbox.com/s/awxlc2ofthz5vrd/Ecuaciones%20de%201er%20y%202%C2%BA%20grado%20iniciales1.pdf?dl=0>

### Anexo 2:

<https://www.dropbox.com/s/1qk4hi28g0cakrr/problemas%20propuestos.pdf?dl=0>

### Anexo 3:

<https://www.dropbox.com/s/zmsofn0pfpleo2k/prueba%20de%20problemas%20de%20%C3%A1lgebra1.pdf?dl=0>

### Anexo 4:

<https://www.dropbox.com/s/c2dr2rnr77ayy06/prueba%20de%20resoluci%C3%B3n%20gr%C3%A1fica.pdf?dl=0>

### Anexo 5:

<https://www.dropbox.com/s/tkbpif3amrn53ec/Resoluci%C3%B3n%20de%20ecuaciones%20en%20geogebra.pdf?dl=0>

En estos enlaces mostramos materiales usados en la experiencia.

<http://www.disfrutalasmaticas.com>

<http://www.geogebra.org/>

**Javier Rodríguez González**, IES Ingenio, Las Palmas. Profesor de Enseñanza Secundaria (Matemáticas)

