KURT GÖDEL "Revolucionador de la metamatemática"

Los siguientes artículos explicando la aportación científica de Gödel los realizó, pocos días después de la muerte de Gödel, en 1978, el profesor Fernández-Brida para el periódico EL PAÍS.

Kart Gödel con A. Einstein en Princeton, 1950

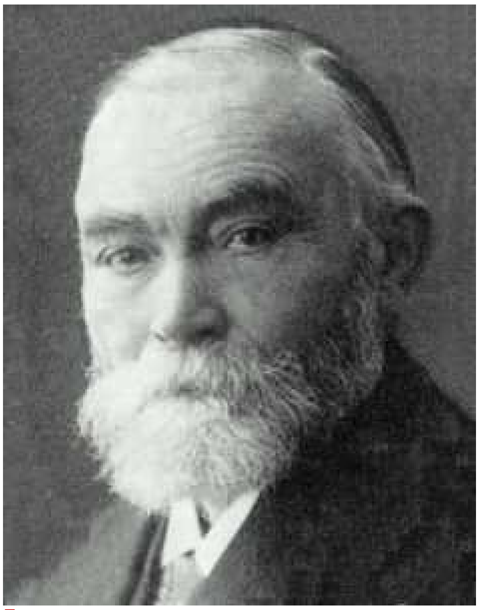
Por el Dr. José Fernández-Prida*
Extracto de EL PAIS, 17 Febrero de 1978

Los Comienzos de la lógica moderna

Si bien los primeros intentos de desarrollar una lógica simbólica se remontan a Leibnitz, que concibió la idea de construir un álgebra universal en la que fueran demostrables todas las proposiciones matemáticas verdaderas -idea que habla pasado ya por la mente de Llul en pleno siglo XIII-, fue sin embargo Gottlob Frege, profesor de la Universidad de Jena, quien alrededor de 1880 sentó las bases en que habrían de apoyarse todas las investigaciones posteriores en el campo de la lógica formal y los fundamentos de la matemática.

Leibniz

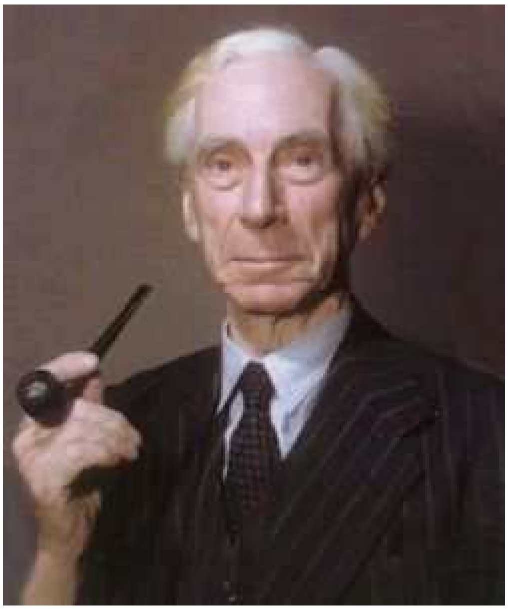
Frege fue quien desarrolló por primera vez un lenguaje formal-bidimensional, por cierto- en el que pueden formalizarse todas las proposiciones matemáticas, residiendo la clave del éxito en la introducción de los símbolos de cuantificación existencial y universal, el "para todo" y el "existe del lenguaje matemático.



Frege

Para este lenguaje formal definió Frege un sistema de reglas lógicas que permitía reducir la actividad del matemático a un complejo juego de símbolos consistente en derivar unas expresiones (teoremas) a partir de otras iniciales (axiomas), utilizando exclusivamente las reglas del sistema.

Tras el desarrollo y simplificación de los sistemas formales, en los que tuvieron singular relevancia las investigaciones de Giuseppe Peano, los matemáticos ingleses Whitehead y Russell comenzaron la ingente tarea de reconstruir una parte considerable de. la matemática en un sistema formal, labor que en parte llevaron a cabo en los Principia mathematica, obra ciclópea que fue apareciendo entre 1910 y 1913.



Bentrand Russell

El método logicista

El nuevo método logicista planteaba, sin embargo, nuevos problemas, tres de los cuales presentaban singular relevancia. El primero de ellos hacia referencia a la consistencia y se enfrentaba con el interrogante de si el sistema formal sería o no contradictorio, como por cierto había resultado serlo el desarrollado por Frege. Para no tropezar con una cadena sin fin de problemas, la demostración de la consistencia deberla realizarse con métodos finitistas.

El segundo problema se enfrentaba con la axiomatizabilidad de las teorías matemáticas. ¿Existirla para toda teoría un conjunto finito o, al menos, recursivamente definible de axiomas a partir de los cuales fuesen formalmente derivables todos los teoremas de la teoría en cuestión? ¿Existiría, por ejemplo, un tal conjunto de proposiciones aritméticas, a partir de las cuales pudiesen ser obtenidas todas las sentencias válidas de la teoría de números mediante la aplicación reiterada de unas determinadas reglas lógicas de inferencia?

David Hilbert

El tercer problema hacía referencia a la decidibilidad del sistema -e "Entscheidungsproblem"- y consistía en encontrar, caso que fuese posible, un procedimiento efectivo -un algoritmo en su sentido más amplio- que permitiese decidir en un número finito de pasos si una expresión era o no formalmente derivable a partir de un conjunto de axiomas.

Kurt Gödel en Princeton, 1969

La resolución de estos tres problemas constituyó el núcleo del famoso programa propuesto por David Hilbert a la Academia de Matemáticas de Hamburgo en 1927. Algunos resultados obtenidos en 1915 por el alemán Leopold Löwenheim, extendidos por el noruego Thoraf Skolem hacia 1920 -desarrollo de un procedimiento de decisión mediante un método de eliminación de cuantificadores-, parecían indicar la viabilidad del programa de Hilbert, aun cuando no sea difícil extraer resultados negativos relativos a ciertos sistemas formales a partir del más famoso de los teoremas de Stolem.

Por el Dr. José Fernández-Prida*

Primer gran teorema de Gödel: la completitud del cálculo de predicados

En 1930 surge en escena un estudiante de la Universidad de Viena, Kurt Godel, nacido en 1906 en la ciudad de Brno de la actual Checoslovaquia (más actual República Checa), pero en aquel entonces parte integrante del Imperio Austro-Húngaro. En su tesis doctoral Gödel demuestra la completitud del cálculo de predicados de primer orden, un sistema de axiomas y reglas que permite derivar formalmente todas las proposiciones tautológicas de un lenguaje lo suficientemente expresivo como para que en él puedan ser formalizadas una parte muy considerable de las expresiones matemáticas.

El teorema de completitud, poco conocido fuera de ámbitos especializados, entraña, sin embargo, sorprendentes resultados de incompletitud de otros sistemas.

Uno de ellos es la incompletitud del cálculo de predicados de segundo orden, basado en un lenguaje de mayor poder expresivo que el de primero, lo que permite dar en él una descripción completa de los números naturales. Puesto que iodo teorema de completitud de un cálculo conduce a otro de finitud (o compacticidad) y puesto que éste implica que en el lenguaje del cálculo no puede darse una descripción completa de los números naturales (ya que del teorema de finitud se sigue la existencia de conjuntos cuyos elementos satisfacen, aparte de las propiedades descritas, otras que los números no verifican), el cálculo de predicados de segundo orden, en el que los números naturales pueden ser caracterizados, no es posible quesea completo.


Kurt Gödel en un aula de la Universidad de Princeton, en 1961

Otro resultado de incompletitud que, también a través del teorema de finitud, se deriva de la completitud del cálculo de predicados de primer orden, es la paradoja que ya había sido encontrada por Skolem. Esta en esencia consiste en el resultado, sólo aparentemente contradictorio, de que existen modelos de la teoría de conjuntos que sólo poseen un conjunto numerable de elementos (conjuntos), pese a que en la referida teoría sea un teorema que existe un conjunto no numerable de conjuntos.

En fin, una tercera consecuencia del teorema de completitud, íntimamente relacionada con las anteriores, es la existencia de un análisis "no standard", calificado por Gödel como el análisis del futuro, en el que existen elementos mayores que todo número real y, como consecuencia, otros elementos infinitamente pequeños. El análisis "no standard", desarrollado por Robinson a partir de 1961 se ha utilizado con éxito para simplificación de las pruebas de algunos teoremas clásicos e incluso ha permitido encontrar resultados nuevos. En la actualidad se investiga en su aplicación a la demostración automática de teoremas y las perspectivas parecen ser alentadoras.

Uno de los teoremas más famosos de la historia

La prueba de la completitud del cálculo de predicados afianzó a los matemáticos que trabajaban en el campo de los fundamentos en idea de que el programa de Hilbert sería viable. Sin embargo, un año después, en 1931, el propio Gödel echó por tierra todas esas esperanzas con la publicación de su escrito Sobre proposiciones indecidibles en los Principia Mathemática y sistemas afines. Este trabajo, uno de los más famosos de la historia de la matemática y seguramente el más controvertido (se han dado más de cien vanos intentos de refutación) pasó sin embargo inadvertido a la mayor parte de los matemáticos de su tiempo, desconocedores en su casi totalidad de las nuevas técnicas introducidas por los lógicos. Afortunadamente, Gödel tuvo ocasión de discutir sus hallazgos con Von Neumann y a través suyo en el mismo

John Von Neumann

1931 los nuevos resultados pasaron a ser conocidos en Princeton por Alonzo Church, Berkley Rosser y Stefan Kleene, que tan gran papel habrían de jugar en el desarrollo posterior de la lógica matemática.

El primer resultado negativo que se sigue del escrito de Gödel implicaba la imposibilidad de encontrar un sistema de axiomas del que pudiesen derivarse formalmente todas las proposiciones válidas de la teoría de números, base de gran parte de la matemática. Una consecuencia inmediata de la imposibilidad de axiomatizar completamente la aritmética era la no existencia de un algoritmo de decisión, ya que toda teoría decidible es axiomatizable. Gödel probó incluso el carácter esencialmente indecidible de cualquier teoría construida a partir de una aximática parcial de la aritmética, siempre que el sistema de axiomas cumpliese un mínimo de requisitos, sin los que infinitud de proposiciones aritméticas elementales no podrían ser demostradas. Por lo demás, todos estos resultados podían ser extendidos a la teoría formal de conjuntos.

Con objeto de dar una idea, siquiera superficial, de la forma en que Gödel logró demostrar su famoso teorema, comenzaremos estableciendo la distinción básica que existe entre una teoría matemática formal y su metateoría.


Caricatura de Kurt Gödel

Mientras una teoría -por ejemplo, la geometría euclídea, la aritmética, el análisis- tiene por objeto el estudio de las propiedades de los objetos que pretende describir -puntos, rectas, planos... en la geometría, los números naturales en la aritmética, los reales en el análisis-, la correspondiente metateoría tiene como objeto el estudio de las propiedades de la teoría en cuestión. Así, por ejemplo, la metaaritmética no versará sobre los números, sino sobre las propiedades de la teoría de números. Los teoremas de la metaaritmética serán, por tanto, proposiciones relativas a la consistencia, axiomatizabilidad, decibilidad, existencia de modelos, etcétera... de la teoría de números.

La idea de partida de Gödel consiste en hacer corresponder a cada fórmula aritmética un número natural, para lo cual comienza asignando un número natural a cada símbolo del lenguaje en que la aritmética se describe. De esta forma, si por ejemplo, a los símbolos "x",." = " y "0" corresponden los números ocho, siete y uno, entonces Gödel asigna a la fórmula "x = 0" el número 28. 37. 51 (dos, tres, cinco son los tres primeros números primos).


Gödel, en 1968

Iterando el procedimiento, Gödel hace corresponder también un número natural a toda sucesión infinita de fórmulas. De esta manera, ciertos predicados metamatemáticos tales como "ser una fórmula", "ser una demostración", "ser demostrable", etcétera, dan lugar a predicados numéricos. Así, por ejemplo, "ser una fórmula" da lugar al predicado que verifican aquellos números naturales que son el número de una fórmula. Por otra parte, ciertos predicados numéricos elementales -llamados técnicamente recursivos- pueden ser definidos mediante una fórmula aritmética. Así, por ejemplo, el predicado "ser igual o menor que" viene definido por la fórmula (Ez) (x + z = y). De esta forma, proposiciones metaaritméticas de carácter elemental entran en correspondencia con fórmulas aritméticas. Y la clave de la famosa prueba de Godel estriba en haber encontrado una fórmula metamatemática de que ella misma era indemostrable. Entonces, siguiendo los argumentos de la paradoja de Richard, Gödel prueba que ni esa fórmula ni su negación pueden ser un teorema, a menos que el sistema sea inconsistente (W-consistente, en términos técnicos más precisos). La prueba, sencilla, parte de una hipótesis metamatemática, de ella infiere que tiene que verificarse un cierto teorema aritmético, que a su vez implica la validez de una proposición metamatemática..., hasta lograr probar que la fórmula autorreferente no podría ser demostrada ni refutada.

Consecuencias

Una consecuencia del teorema de imcompletitud, basada en que el razonamiento rpetamatemático que conduce a la demotración de la proposición "si la aritmética es consistente, entonces la fórmula que expresa su propia indemostrabilidad no puede ser probada" utiliza únicamente reglas de deducción que son válidas dentro de la aritmética, es la imposibilidad de dar una prueba de la consistencia de la aritmética que sea reproducible dentro del formalismo aritmético. Lamentablemente, este genial teorema ha sido frecuentemente mal interpretado, habiéndose extrapolado sus consecuencias al terreno de la filosofía e incluso al de la mente humana.

Un riguroso análisis del teorema de Gödel lleva, sin embargo, a la conclusión de que su validez sólo es aplicable a sistemas formales que verifiquen prescripciones muy estrictas, algunas de carácter muy técnico, que impiden extender su validez fuera del campo de las matemáticas

CONSISTENCIA RELATIVA DE LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO

Con objeto de ilustrar el significado del último de los grandes teoremas de Gödel, empezaremos aclarando lo que quiere decir que un conjunto tiene un cardinal estrictamente menor que el de otro. En el caso en que ambos conjuntos sean finitos, lo que significa es que el primero tiene menos elementos que el segundo. En general, el cardinal de un conjunto es igualo menor que el de otro si los elementos del primero pueden ponerse en correspondencia con los de un subconjunto del segundo, de forma que cada elemento esté relacionado con uno solo. Y el cardinal de un conjunto es estrictamente menor que el de otro (o simplemente menor) si el del primero es igual o menor que el del segundo, pero el del segundo no es igual o menor que el del primero.

En su forma más simple, la hipótesis del continuo afirma que no existe ningún conjunto cuyo cardinal sea mayor que el del conjunto de los números naturales y menor que el de los números reales. Si esto es o no una consecuencia de los axiomas usuales de la teoría de conjuntos, era cuestión que ya se había planteado Cantor, pero que aún estaba por resolver en 1938. Tres eran las posibilidades: que de los axiomas de la teoría de conjuntos se siguiera la hipótesis del continuo; que se siguiese su negación; que no se siguiese ninguna de ambas.

Cantor

Kurt Gödel a los 69 años de edad

Así las cosas, Gödel excluyó la segunda posibilidad construyendo un modelo en el que se verificaban todos los axiomas de la referida teoría, incluido el de elección, y en el que también la hipótesis del continuo era válida. Para la demostración, altamente compleja, Gödel definió la llamada jerarquía de los conjuntos constructibles, cuya aplicación pronto se extendió a otras ramas de la matemática.

En 1963 Paul Cohen dio solución final al problema propuesto por Cantor, excluyendo la primera posibilidad. Cohen probó que la hipótesis del continuo no es consecuencia de los demás axiomas de la teoría de conjuntos, construyendo un modelo en el que todos estos axiomas se verificaban y en el que la hipótesis del continuo era falsa. Se trataba, pues, de una proposición indecidible dentro de la teoría de conjuntos, Sin embargo, quince años antes de que Cohen demostrara su teorema, Gödel había logrado ya probarlo, si bien el resultado jamás fue publicado. Esta información la obtuvo el autor de este artículo a través del profesor Gottlob Hassenjaeger, a quien Gödel comunicó su hallazgo en 1948.

Hito en la historia de la ciencia

A partir de Gödel el desarrollo de la lógica simbólica ha sido prodigioso. Las técnicas utilizadas por primera vez en la demostración de la incompletitud de la aritmética se han ido refinando y los nuevos conceptos que subyacen en esa y otras obras suyas - el de recursividad parcial y los conocidos bajo otras denominaciones técnicas de creatividad y productividad, entre otros han sido exhaustivamente estudiados y han dado lugar a una nueva rama de la matemática: la teoría de la computabilidad o de la recursividad generalizada, que permite abordar con gran abstracción el estudio de los sistemas formales.


Gödel a los 70 años

Además, a partir de Gödel los esfuerzos de los lógicos, en vez de encaminarse a demostrar propiedades afirmativas de los sistemas formales -el camino trazado por David Hilbert- se orientaron hacia la búsqueda de teoremas de indecibilidad, incompletitud y demás propiedades limitativas, lo que vino a arrojar gran luz sobre los problemas básicos de los fundamentos de la matemática. El desarrollo de las nuevas técnicas iniciado con Godel permite contemplar hoy como evidente y casi trivial lo que resultó absolutamente sorprendente a los mejores matemáticos del comienzo del siglo. De ahí que, como dijera Von Neumann al serle entregado a Gödel el premio Einstein, la obra de este lógico genial marca un hito en la historia de la ciencia.

*José Fernández-Prida de Carlos (1934-2003), diplomado en Filosofía y en Historia Antigua y Medieval, licenciado en Informática y doctor en Ciencias Matemáticas, fue uno de los fundadores de la especialidad de Ciencias de la Computación en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense, en la que impartió diversos cursos de Lógica Matemática, Fundamentos de la Matemática y Teoría de la Computabilidad. Fruto de su contacto con H. Hermes orientó su investigación hacia el ámbito de la Teoría de la Computabilidad, área en la que publicó la mayor parte de sus trabajos, y en la que puede ser considerado uno de los iniciadores de su cultivo en España. En la época que escribió los presentes artículos era miembro electo de la Asociación Alemana de Lógica y Fundamentos de la Matemática.