

# FRACTALES: ESOS ENTES CAPRICIOSOS

K. B. Sadarangani

Comenzamos describiendo una serie de fenómenos naturales cuyas modelizaciones matemáticas están íntimamente relacionadas con los fractales.

Pensemos en una frontera entre estados. Con el paso del tiempo, esta frontera se ve sometida a cambios debidos a enfrentamientos, acuerdos locales, pequeñas anexiones, etc., que hacen que el trazado de ésta vaya variando. El perfil de una costa sufre un proceso análogo al de una frontera. Los elementos en contacto, agua y tierra, están sometidos durante largos períodos a interacciones (erosiones eólicas y marinas, basculación continental, etc.), que modifican permanente la forma de la costa.

Los procesos de ramificación y subramificación de los árboles confieren a éstos una naturaleza de tipo fractal. Algo similar ocurre con los procesos relacionados con la red de afluentes de un río o con la red bronquial.

En lo que sigue, nos planteamos dar una definición operativa de lo que es un fractal. Un fractal viene a ser el resultado final que se crea a través de la iteración infinita de un proceso geométrico determinado. Por lo general, el proceso generador es de naturaleza muy simple y determina perfectamente el resultado final que, en la mayoría de los casos, debido a la repetición *infinita* que se ha realizado, tiene una complicación extraordinaria.

A continuación, daremos el proceso que genera el llamado conjunto de Cantor que es un típico ejemplo de conjunto fractal.

Partimos del intervalo unidad  $I = [0,1]$ . Dividimos este intervalo en tres partes iguales y consideramos los dos intervalos cerrados que contienen a los extremos

$$E_{11} = [0, \frac{1}{3}], E_{12} = [\frac{2}{3}, 1].$$

Cada uno de estos intervalos se divide a su vez en tres intervalos iguales, de los cuales prescindimos del intervalo central, obteniéndose

$$E_{21} = [0, \frac{1}{9}], E_{22} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}], E_{23} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}], E_{24} = [\frac{8}{9}, 1].$$

Si continuamos este proceso indefinidamente, en la etapa  $k$ -ésima habremos obtenido  $2^k$  intervalos cerrados  $E_{kj}$  ( $j = 1, 2, \dots, 2^k$ ), de longitud  $3^{-k}$  cada uno de ellos. Para cada  $k = 1, 2, \dots$  sea

$$E_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} E_{kj}$$

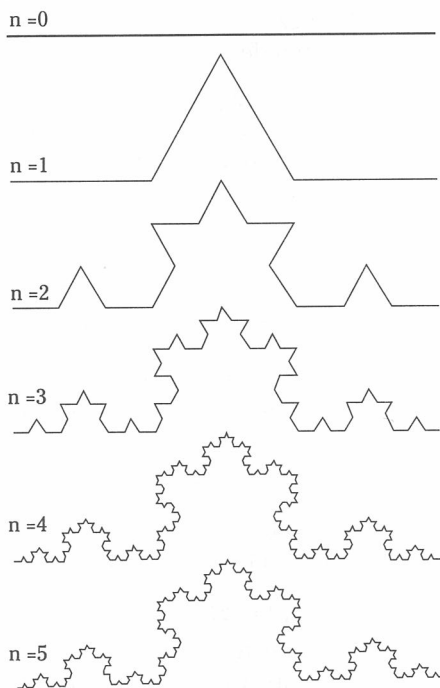
Es obvio que  $E_{k+1} \subset E_k$ . Se denomina *conjunto ternario de Cantor* a

12

$$E_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_{kj}$$

En el siguiente ejemplo, daremos el proceso que genera la llamada *curva de Koch*, construida por Helge von Koch en 1904. El proceso es el siguiente. Partimos del segmento unidad  $[0,1]$  y lo dividimos en tres partes iguales. Sustituimos la parte central por dos segmentos que con la parte desechada formarían un triángulo equilátero. Se obtiene así una poligonal  $P_1$  de longitud  $\frac{4}{3}$ . Con cada uno de los cuatro segmentos se repite la operación anteriormente descrita, obteniéndose una poligonal  $P_2$  de longitud  $\frac{16}{9}$ . Se itera indefinidamente este proceso y la curva límite a la que converge  $P_k$  cuando  $k$  tiende a infinito es la llamada curva de Koch.

Proceso de generación de la curva de Koch.



12

A continuación, mostramos cómo los llamados *sistemas dinámicos complejos* generan, de forma natural, conjuntos fractales.

El origen de la teoría de los sistemas dinámicos complejos se remonta a los trabajos de los matemáticos franceses Julia (1893-1978) y Fatou (1878-1929). Sus resultados pasaron al olvido y en las tres últimas décadas han recobrado valor por la fuerte presencia de los sistemas dinámicos en el mundo real (predicción del tiempo, dinámica de poblaciones, dinámica epidemiológica, etc.).

De modo general entenderemos por sistema dinámico a un par  $(X, f)$  formado por un conjunto no vacío  $X$  y una aplicación  $f: X \rightarrow X$ . Dado un punto  $x \in X$ , se llama *órbita de  $x$*  a la sucesión  $(f^n(x))$  donde  $f^n$  es la composición de  $f$  consigo misma  $n$  veces.

En un sistema dinámico  $(X, f)$  un punto  $a \in X$  se dice que es un punto fijo si  $f(a) = a$  y se dice *periódico* de período  $n > 1$  si  $f^n(a) = a$  y  $f^i(a) \neq a$  para  $n > i \geq 1$ .

Nos ocupamos ahora de los sistemas dinámicos complejos estudiados por Julia y Fatou. Estos sistemas dinámicos son  $(C, f_c)$  donde  $C$  es el campo complejo y  $f_c: C \rightarrow C$ , para un número complejo  $c$ , viene dada por

$$f_c(z) = z^2 + c.$$

Julia y Fatou se plantearon el problema de determinar qué sucede con un punto  $z \in C$  cuando se le aplica iteradamente la transformación  $f_c$ , es decir, el estudio de la órbita de  $z \in C$  en el sistema dinámico  $(C, f_c)$ . Observaron que, en ciertos casos (según los valores de  $c$ ), la órbita de los puntos en un entorno del origen converge a un punto fijo de la aplicación  $f_c$ , mientras que la órbita de los puntos más alejados del origen se va al infinito. Cada uno de esos dos tipos de puntos constituyen una región y en medio queda una frontera "infinitamente delgada" que se conoce con el nombre de *conjunto de Julia*. Estos conjuntos de Julia poseen una estructura fractal que con la ayuda de los ordenadores se han podido hacer visibles y nos han descubierto sus caprichosas formas.

Julia y Fatou probaron que los conjuntos de Julia asociados a las transformaciones  $f_c$ , para cualquier valor de  $c$ , pueden ser de dos tipos: conexos, o lo que es lo mismo, formados por una sola pieza, o completamente desconexos, es decir formados por puntos dispersos con una estructura parecida a los conjuntos de Cantor.

Mandelbrot definió el conjunto que lleva su nombre como el formado por los puntos  $c$  tales que el conjunto de Julia asociado a  $f_c$  está formado por una sola pieza.

Una representación gráfica de este conjunto no es operación sencilla. Para ello habría que ir tomando los distintos puntos del plano complejo  $C$  y estudiar la conexión o desconexión del conjunto de Julia asociado a  $f_c$ . Este problema se simplifica usando un resultado probado por Julia en el que se afirma que el conjunto de Julia asociado a  $f_c$  es conexo o completamente desconexo, según que la órbita de  $z = 0$  no diverja o sí diverja al infinito, respectivamente. Además, la teoría de iteraciones permite probar que la órbita de  $z = 0$  diverge a infinito si algún punto de esta órbita tiene módulo mayor o igual que 2. Por otra parte, se puede comprobar que si después de 1000 iteraciones los transformados de  $z = 0$  por  $f_c$  permanecen en módulo inferior a 2 entonces la órbita de  $z$  no diverge a infinito.

Finalmente, conjugando estos resultados y la potencia de los ordenadores actuales, se ha podido obtener una muy buena representación del conjunto de

Mandelbrot que se presenta como un maravilloso ente de naturaleza fractal y muy complicado.

Veamos ahora un clásico ejemplo de sistema dinámico como es el estudio de la dinámica de poblaciones. Robert May (1976) propuso un modelo para estudiar la evolución de ciertas poblaciones de insectos basado en la *ecuación logística*:

$$P(n+1) = kP(n)(L - P(n))$$

donde  $P(n)$  indica la población en la generación  $n$ ,  $L$  es la población máxima estimada y  $k$  una constante que depende únicamente de la especie de insectos. Dividiendo por  $L$  y haciendo  $x_n = \frac{P(n)}{L}$  obtenemos

$$x_{n+1} = Qx_n(1 - x_n)$$

donde  $Q = kL$  y  $0 \leq x_n \leq 1$ , pues  $x_n$  es el cociente de la población de la generación  $n$  y la población máxima estimada. La última expresión nos permite calcular la población de una generación determinada conociendo la de la generación anterior. Para que  $0 \leq x_{n+1} \leq 1$  siempre que  $0 \leq x_n \leq 1$  es necesario que  $0 \leq Q \leq 4$ , pues la parábola  $y = Qx - Qx^2$  tiene su máximo en el punto  $(\frac{1}{2}, \frac{Q}{4})$ . El proceso iterativo anterior se puede representar por medio de la función  $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ , dada por:

$$f(x) = Qx(1-x)$$

12

donde  $Q \in (0,4)$ . Esta función nos permite conocer, a partir de la población  $x$ , la de la generación siguiente  $f(x)$ . Por tanto,  $([0,1], f)$  es un sistema dinámico y la órbita de un punto  $x$  nos da la evolución en el tiempo de una población de insectos cuya población inicial es  $x_0$ .

Un comentario final: en esta nota se ha pretendido dar una somera e introductoria visión de este campo de las matemáticas, tan en boga hoy día, que es la teoría de fractales, en donde entran en juego campos de las matemáticas tan importantes como la teoría de la medida, sistemas dinámicos, teoría del caos, etc, sin olvidarse de unas herramientas fundamentales, sobre todo para los resultados empíricos que pueden dar luz sobre aspectos teóricos, como son los potentes ordenadores.

### Bibliografía

- Barnsley, M. F. y otros: *The sciences of Fractal images*. Nueva York, Springer Verlag, 1988.
- De Guzmán, M; Martín, M. A.; Morán, M. y Reyes, M.: *Estructuras fractales y sus aplicaciones*. Labor, 1993. [Este libro ha sido el texto que más se ha usado en la preparación de esta nota].
- Dewdney, A. K.: "Juegos de ordenador: paseos aleatorios conducentes hacia muchedumbres fractales". *Investigación y Ciencia* (febrero, 1989), pp. 86-89.
- Gadner, M.: "Juegos matemáticos: música blanca y música parda, curvas fractales y fluctuaciones del tipo  $\frac{1}{f}$ ". *Investigación y Ciencia* (junio, 1978), pp.104-114.