CÁLCULO SIMBÓLICO, CÁLCULO FORMAL, ÁLGEBRA COMPUTACIONAL: QUÉ ES Y PARA QUÉ SIRVE.

Tomás Recio

Ideas sobre el álgebra computacional

Cálculo simbólico, cálculo formal, álgebra computacional... son distintos nombres para señalar una misma cosa. La mayor o menor difusión de cada una de estas denominaciones responde al origen de la misma (del inglés Computer Algebra o Symbolic Computation, del francés Calcul Formel). Según una definición ya clásica de R. Loos, “el álgebra computacional es aquella parte de las ciencias de la computación que diseña, analiza, implementa y aplica algoritmos algebraicos”. Es cuestionable, en esta definición, que el álgebra computacional se considere una parte de las ciencias de la computación, posiblemente lo era más en la época en la que se acuñó esta descripción (principios de los ochenta). En todo caso, es evidente que su autor hace referencia a *algoritmos algebraicos* como la tarea característica del álgebra computacional y, naturalmente, esto establece una conexión directa con las matemáticas.

Puede que el lector piense, con toda razón, que esa definición es casi circular. Al fin y al cabo, suena casi igual decir álgebra computacional o algoritmos algebraicos. Así pues, ¿qué debe entenderse por algoritmos algebraicos? 96
Si alguien preguntase por un ejemplo paradigmático y sencillo de algoritmo algebraico, una posible respuesta sería el algoritmo de Euclides de cálculo del máximo común divisor de números o polinomios. En definitiva, los algoritmos algebraicos del álgebra computacional son los procesos constructivos de un álgebra con símbolos... De ahí que al álgebra computacional también se la denomine cálculo simbólico.

Así el cálculo simbólico trabaja muchas veces en contextos algorítmicos alejados del álgebra tradicional. Por ejemplo, cuando en un programa informático como Maple o Mathematica calculamos la integral de una función racional, el algoritmo que está detrás es, por definición, un algoritmo de álgebra computacional... o cálculo simbólico, aunque las integrales, tradicionalmente, no sean álgebra. O cuando calculamos con esos programas un límite o cuando sumamos una serie... ha tenido que hacerse mucha álgebra computacional para obtener el resultado que aparece en la pantalla.

En la figura aparece una sesión típica (pero muy sencilla) de Maple, un popular programa de álgebra computacional. En el primer párrafo se solicita al programa que calcule la integral de una función racional. La respuesta muestra una función de la variable x, con dos logaritmos neperianos (simbolizados por las letras *ln*) y un arco tangente. En el segundo párrafo tratamos de hallar la diferencial del output del párrafo anterior (el símbolo % hace siempre refe-

```
> int ((x^3+x-1)/(x^4-1), x);
```

$$\frac{1}{4}\ln(x-1)+\frac{3}{4}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\arctan(x)$$

```
> diff(%,x);
```

$$\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}+\frac{3}{4}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{x^3+x-1}{(x-1)(x+1)(1+x^2)}$$

```
> simplify((x^3+x-1)/(x^4-1)-%);
```

$$0$$

```
> solve(denom((x^3+x-1)/(x^4-1)),x);
```

$$1, -1, I, -I$$

```
> limit(((x^3+x-1)/(x^4-1)), x=infinity);
```

$$0$$

rencia, en el lenguaje de Maple, al último output), con respecto a la variable x. El resultado es una suma de tres fracciones. Naturalmente, si simplificamos esta suma (tercer párrafo), el resultado es una fracción cuyo denominador tiene grado 4. Para estar seguros de que la derivada de la integral es la función dada, en el cuarto párrafo se pide a Maple que simplifique la diferencia entre la función dada y el resultado de derivar la integral obtenida. El resultado es cero, como cabía esperar. En el quinto párrafo se muestra otra de las posibilidades de Maple: se le pide que resuelva la ecuación dada por el denominador (*denom*) de la fracción que estamos usando en este ejemplo. La respuesta incluye la unidad imaginaria (que Maple escribe con mayúsculas) y su opuesta. En el último párrafo Maple calcula el límite de esa fracción cuando x tiende a infinito.

Una perspectiva histórica

La historia del cálculo simbólico es reciente o antigua, según se mire. La idea de manipular símbolos matemáticos de forma automática es antiquísima: cualquier libro de historia hace referencia a los sueños de Leibniz, por ejemplo, de construir un lenguaje formalizado con el que una máquina de cálculo pudiera deducir todos los teoremas y resultados apetecidos. El conde de Stanhope, en el siglo XVIII, trata de desarrollar una máquina para resolver silogismos, que en definitiva, es una máquina de cálculo simbólico.

En muchos sentidos, detrás del invento de los ordenadores actuales está C. Babbage, como es bien sabido. Pues el mismo Charles Babbage escribe, en julio de 1836, en su libro de notas: "Hoy tuve por primera vez una concepción general, pero muy confusa, sobre la posibilidad de hacer una máquina que realice desarrollos algebraicos; es decir, sin ninguna referencia a los valores de las letras...". Estas notas y muchos otros detalles que aparecen en los escritos de Ada Byron avalan la tesis de que Babbage, de un modo bastante preciso, puede considerarse un precursor del cálculo simbólico. Y, unos años después, en 1895, nuestro compatriota L. Torres Quevedo presenta su trabajo "Sur les machines algebriques", en las *Actas* de la Academia de Ciencias de París (que encarga al famosísimo H. Poincaré la revisión del mismo, quien señala "En resumen, el señor Torres ha dado una solución teórica general y completa del problema de la construcción de relaciones algebraicas y trascendentes por máquinas...") versando sobre una variante del mismo problema que había ocupado a Babbage, es decir, la construcción de un lenguaje simbólico que describiese de modo mecánico unos procesos (analógicos, en su caso, por las limitaciones de la técnica de aquellos días) para el cálculo algebraico.

La historia moderna del álgebra computacional arranca en la década de los cincuenta con sendas tesis sobre diferenciación automática (de nuevo, ¡el sueño de Leibniz!) en la universidad de Temple (Filadelfia) y en el M. I. T. (Massachusetts Institute of Technology). Tiene luego un lento desarrollo durante los sesenta e irrumpe en los setenta con la presentación de los primeros programas de cálculo simbólico de carácter general (Macsyma) y comercial (Reduce). Los ochenta contemplan la generalización de los ordenadores personales y el éxito consiguiente para programas tan populares como Mathematica, Maple o Derive. La inclusión de algunos programas de Cálculo Simbólico en calculadoras de bolsillo no llega hasta la década de los noventa.

¿Y el futuro? Es difícil de predecir: hace tan solo diez años, un panel de expertos de Álgebra Computacional reunido en Washington D.C. afirmaba que para la mitad de la década de los noventa "...cualquier estudiante de enseñanza secundaria tendrá acceso a un ordenador de al menos un megabyte de memoria principal (RAM) y 100 megabytes de almacenaje secundario (disco duro)..." , cuando es bien sabido que, tal vez no todos, pero sí bastantes estudiantes emplean desde hace años ordenadores domésticos con cifras de megabytes de memoria, tanto principal como en disco, que multiplican por diez las que visionaban los expertos...

Es bastante evidente que ahora estos programas de cálculo simbólico ya no son de conocimiento restringido por unos pocos investigadores universitarios. Hay miles de copias de los mismos registradas oficialmente en todo el mundo —y hay muchas más que son usadas sin licencia— frente a las trescientas personas, aproximadamente, que pueden llamarse propiamente investigadores de álgebra computacional. Un reciente estudio de un autor inglés señalaba que en esta faceta España se encontraba en un segundo grupo de naciones, junto a países como Bélgica o el Reino Unido, estando en el grupo de cabeza los pesos fuertes: EE. UU., Alemania, Francia, Canadá...

Por otra parte parece que, con la popularización del uso de estos programas y su capacidad para incorporar otras facetas distintas al cálculo algebraico propiamente dicho (incorporación de procesadores de texto, de programas de dibujo de figuras geométricas, o de cálculo numérico, etc.), estos programas empiezan a denominarse, de modo genérico, programas de cálculo científico o de cálculo matemático, y el gran público empieza a olvidar, para bien o para mal (igual que nos olvidamos de que hay ingenieros que hacen posible el mercado del automóvil) que es justamente el álgebra computacional lo que está detrás de los mismos.

El álgebra computacional en la educación

Hoy día casi todas las matemáticas que se enseñan desde la etapa infantil hasta el primer ciclo universitario de una carrera de ciencias o ingeniería (inclusive) están incorporadas a los programas de cálculo simbólico. Y ¿para qué puede servir esto?

Una primera respuesta es la tradicional: sirven para mejorar, mediante los ordenadores, la enseñanza de las matemáticas tradicionales. Hace años, con ocasión del ICME 92 (International Congress on Mathematics Education) el autor de este artículo presentó un póster en el que se resolvían varias de las cuestiones del test CSMS mediante Maple. Curiosamente, había una evidente correlación entre la dificultad para el alumno en obtener la respuesta a determinadas preguntas y la dificultad, para la máquina, en hallar la misma respuesta, lo que ponía de manifiesto que había un problema intrínseco, y no meramente calculístico, en algunas preguntas. Si un alumno tratase de resolver las mismas cuestiones con una programa de cálculo simbólico, resulta evidente que se concentraría en las dificultades más *nobles* del aprendizaje y no se perdería en los cálculos rutinarios (aunque los mismos también tienen su papel en la educación matemática: pero no todo el protagonismo).

96

Pero hay otras razones, además de las metodológicas, para abogar por un mayor uso de los programas de álgebra computacional en la enseñanza de las matemáticas. En efecto, estos programas acabarán siendo las herramientas de cálculo científico del mañana, como lo eran las tablas de logaritmos o la escuadra y el cartabón ayer... ¿Va el curriculum escolar a seguir de espaldas a las realidades científicas y tecnológicas del hoy y del mañana? No hay que olvidar que enseñamos determinadas matemáticas porque éstas respondían a las necesidades técnicas. ¿Y cuando cambian estas necesidades...? Va siendo hora de pensar en que la revolución informática no sólo ha de servir para enseñar mejor las matemáticas, sino para cambiar las matemáticas que hay que enseñar.

Bibliografía

International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education.
http://www.tech.plym.ac.uk/maths/CTMHOME/ijcame.html
Recio, T: *Cálculo Simbólico y Geométrico.* Editorial Síntesis. Madrid, 1998.