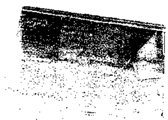


REPASEMOS LAS TABLAS

José Colera

Cada vez son más los profesores que,en su deseo de conseguir que sus alumnos hagan Matemáticas de forma autónoma,les proponen problemas abiertos y les animan y orientan a que les dediquen tanto tiempo como necesiten.

Estos problemas,tan distintos de los simples ejercicios de aplicación directa de la teoría que se les acaba de explicar,requieren concentración para indagar,buscar caminos,elaborar y contrastar conjeturas,... Deben ser,pues,suficientemente atractivos como para despertar la atención del alumno de modo que acepte el reto que suponen. Asequibles, para que no se desalienten a los primeros intentos. Y con una adecuada dificultad,para que no les resulten triviales.

No es fácil encontrar situaciones con estas características. Cuando aparece una especialmente interesante se difunde con rapidez. No es extraño,por tanto,que una misma idea nos llegue por distintos conductos.

Algo de esto ocurrió en el simposio "La enseñanza de la Matemática a debate" (Madrid,28-V a 1-VI 1984) con el siguiente problema :

"Hay una gran cantidad de puertas alineadas y numeradas 1,2,3, 4,5,6,.....Están todas cerradas. Pasa un chico y las abre todas. Pasa otro y las va cerrando cada dos (la 2,la 4,etc). Pasa un tercero y va cambiando la posición cada tres (cierra la 3,que estaba abierta ; abre la 6,.y así sucesivamente con las 9,12,...). Un cuarto chico procede de

igual forma con las puertas 4,6,8,..: abrir las cerradas y cerrar las abiertas. Y así, abriendo y, nos imaginamos, dando portazos, hasta que hayan intervenido en el juego tantos muchachos como puertas hay. ¿Cuáles son las puertas que, finalmente, quedan abiertas?"

En dicho simposio, el profesor Alan H. Schoenfeld lo propuso, con un sugestivo enunciado, entre una larga lista de problemas. Más tarde, la profesora Marisa Carrillo, del Grupo Cero de Valencia, aportó muy interesantes ideas didácticas obtenidas del trabajo de sus alumnos en este problema, entre otros. Y yo, que también tenía intención de referirme a él, hube de dejarlo, pues mi intervención fue posterior y ¡hubiera sido demasiado!

Conocí este curioso problema a través del profesor Claude Gaulin, durante las IV Jornadas de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton", celebradas en 1982. También fue él quien nos sugirió que en las tablas de sumar y multiplicar se pueden descubrir interesantes propiedades. Paso, a continuación, a desarrollar esta idea.

INVESTIGANDO EN LA TABLA DE SUMAR ....

La situación de partida suele ser insignificante, de modo que la riqueza de contenido que se aprecia posteriormente sorprende por lo inesperada. Se parte, simplemente, de la tabla de sumar y se trata de encontrar regularidaes, propiedades, ..., enunciarlas y demostrarlas. Debo confesar que mi primera impresión fue de perplejidad, por lo simplón que esto parece. Pero, conforme empecé a indagar, me entusiasmó ver la cantidad de posibilidades que contiene. Creo que debe conocerse. (Compañeros profesores, alumnos de CAP, alumnos del Instituto y hasta hijos, sobrinos y chiquillería varia, podrían dar fe de lo aficionado que soy a dar la paliza al respecto).

La búsqueda propuesta puede resultar asequible e interesante desde a chicos de 8 años hasta a matemáticos. Veamos algunas de las propiedades que pueden descubrirse. Las primeras que enunciaremos son sencillas, evidentes; pero no lo son tanto para los chicos. El detectarlas, primero, formularlas después y, por último, justificarlas, puede ser de mucho interés para alumnos de los últimos cursos de E.G.B. o primero de Medias.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	[illegible]	11	12	13	14	15	16
8	9	10	[illegible]	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

. En filas y columnas los números son consecutivos.

. La tabla es simétrica.

. Las diagonales / están formadas por números iguales.

. Las diagonales \ son progresiones aritméticas de diferencia 2.

. Números pares e impares se alternan en filas y columnas como las casillas de un tablero de ajedrez.

. La suma de los números de cada fila o columna es un múltiplo de 9.

. La de los números de las diagonales \ es múltiplo de 10.

. La suma de los números de las nueve primeras diagonales / es de la forma n(n+1).

Y veamos otras, menos triviales :

. Tomemos un cuadrado formado por cuatro números. Por ejemplo,

Obsérvese que 5 + 7 = 6 + 6 .¿Es válida la propiedad para cualquier cuadrado de 2x2 casillas? Enunciarla y justificarla.

. ¿Es cierta también si tomamos los cuatro números de dos filas y dos columnas no contiguas? Estos, por ejemplo:

7	11
9	13

¿Y para cuadrados de 3x3 casillas? :

5	6	7
6	7	8
7	8	9

. Obsérvese que en el caso anterior, no sólo coinciden las sumas de los elementos de las dos diagonales principales; también se obtiene la misma suma tomando otros tres números:

5 + 7 + 9 = [illegible]

7 + 7 + 7 = 21

6 + 6 + 9 = 21

¿Cuántas sumas coincidentes hay ahora? ¿Cómo se enuncia la propiedad? Búsquese una demostración.

. Los resultados anteriores, ¿son válidos para cuadrados 3x3 tomando líneas no consecutivas? . Por ejemplo,

7	9	12
8	10	13
11	13	16

. ¿Se puede generalizar esto para cuadrados cualesquiera? :

+	2	4	6	7	9
1	3	5	7	8	10
3	5	7	9	10	12
5	7	9	11	12	14
...	...	...	...	...	...
8	10	12	14	15	17

¿Cuántas sumas idénticas hay en este caso? ¿Por qué coinciden?¿Cuánto valdrá cada suma en el cuadrado 9x9, esto es, en la tabla inicial?

......Y EN LA DE MULTIPLICAR

Las primeras propiedades que detactamos son del mismo tipo que las encontradas en la tabla de sumar :

. Es simétrica.

. Unas líneas están formadas por números pares; otras, por números alternativamente pares e impares.

. Las sucesivas filas son progresiones aritméticas de diferencias 1,2,3,., respectivamente.

. La suma de los términos de cada línea es un múltiplo de 45.

. El producto de los términos de cada diagonal / es un cuadrado perfecto.

. Los números de la gran diagonal \ son cuadrados perfectos.

. Del mismo modo que en la tabla aditiva, aparecen ahora coincidencias al multiplicar elementos de un cuadrado nxn. Por ejemplo :

2 . 9 . 30 . 56 =

6 . 3 . 40 . 42 =

12 . 24 . 15 . 7 =

16 . 9 . 30 . 7 = 30240

Pero, en esta tabla, aparecen nuevas propiedades :

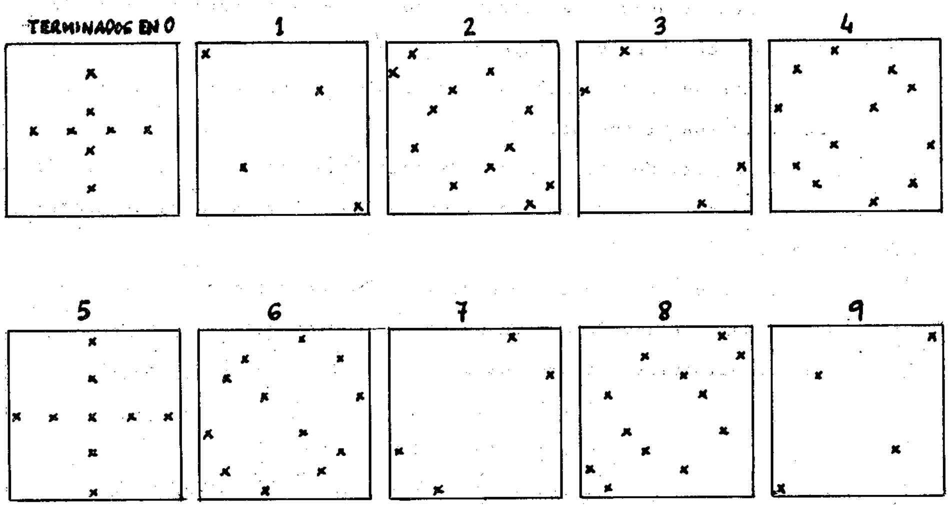
. Si multiplicamos los cuatro números de un cuadrado 2x2, se obtiene un cuadrado perfecto ; multiplicando los nueve elementos de un cuadrado 3x3, un cubo perfecto ; etc. ¿Cuál es la raíz cuadrada del primero? Y la raíz cúbica del segundo? ...¿Y la raíz novena del producto de los 81 números de la tabla completa?

. En los cuadrados que identificará el lector por las igualdades que siguen, se observa una diferencia de una unidad entre la suma corespondiente a la diagonal \ y la relativa a la / . ¿Es esto general? ¿Por qué? ¿Y si las filas y columnas no fueran contiguas?

8 + 15 = 23	42 + 56 = 98
10 + 12 = 22	48 + 49 = 97

La propiedad que sigue es muy curiosa,pues parece tener que - ver con el sistema de numeración en que se expresan los números. La des cubrió Magadalena Cordero,una alumna del CAP del curso 83-84. La enuncio tal como ella lo hizo :

. Señalamos las casillas ocupadas por los números 0,1,2,3,...

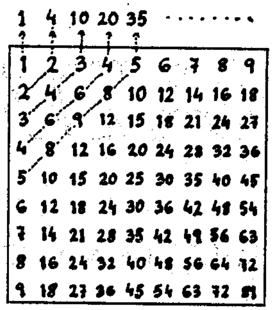


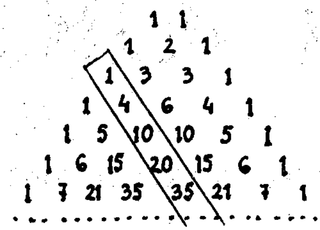
Todas estas tablas son doblemente simétricas. No sólo lo son- respecto a la diagonal \\ ,que,por la comutatividad de la multiplicación, era de esperar,sino también respecto a la otra.

Inténtese enunciar esta propiedad más fácilmente. Y justifí - quese. ¿Qué pasaría si utilizaramos otro sistema de numeración?

Y,para terminar,una propiedad bastante fuerte :

. Sumemos todos los términos de cada una de las diagonales /. Los resultados son 1,4,10,20,35,....Resultan conocidos;nos suena haber- los visto en el triángulo de Tartaglia. Veamos:





¿Se cumple para las demás diagonales? En caso afirmativo, enúnciese la propiedad utilizando una nomenclatura adecuada. Demuéstrese por inducción. ¿Sabría el lector dar una demostración más constructiva?

Estas son, sólo, algunas de las propiedades que se pueden encontrar. Estoy seguro de que cada persona que indague hallará regularidades nuevas. Es un auténtico problema abierto, con posibilidades ilimitadas y acordes con el nivel matemático de cada cual.

VI JORNADAS

DE LA

SOCIEDAD CANARIA DE PROFESORES DE MATEMATICAS

"ISAAC NEWTON"

TEMA:

LA REFORMA DE LAS ENSEÑANZAS

BASICA Y MEDIAS

ORGANIZACION:

COMUNICACIONES Y EQUIPOS

DE TRABAJO

SANTA CRUZ DE LA PALMA

1 al 4 de Mayo de 1985