Rev. Acad. Canar. Cienc., XIX (Núms. 1-2), 73-92 (2007) (publicado en septiembre de 2008)

IMPRE LAKATOS: MATEMÁTICO Y FILÓSOFO

Nácere Hayek
Universidad de La Laguna (Spain)
E-mail: nhayek@ull.es

Abstract
In this paper a biographical outline of the mathematician and philosopher Imre Lakatos is presented. We mainly focus on the methodology of his scientific research programmes appearing in some of his most relevant works. In particular, a careful analysis of his fundamental contribution "Proofs and refutations", is also given.

Resumen
En este artículo se expone un perfil biográfico del matemático y filósofo Imre Lakatos. Nos ocupamos principalmente de la metodología de sus programas de investigación científica de algunos de sus trabajos más importantes. En particular, se realiza un cuidadoso análisis de su obra fundamental "Pruebas y refutaciones".

1. Perfil biográfico.

Imre Lakatos (1922-1974), matemático y filósofo de la ciencia, nació en Debrecen (Hungría). Era de familia judía, y se licenció (1944) en matemáticas, física y filosofía en la Universidad de Debrecen. Cambiaría su nombre (registrado Imre Lipschitz, por el de Imre Molnár) para evitar la persecución nazi. Militó en el partido comunista húngaro durante la Segunda Guerra Mundial, y al acabar la misma completó su educación (1948) en Debrecen, alcanzando el grado de Philosophical Doctor (Ph. D). Por su oposición al nazismo, fue encarcelado (1950) y al ser liberado años después (1953), regresó a la vida académica. Al poseer Lakatos una sólida formación filológica, el matemático Rènyi le conseguiría trabajo (1954) en el Instituto de Investigación Matemática de la Academia Húngara de Ciencias, en cuya institución tradujo obras matemáticas al húngaro, entre ellas *How solve to it* de G. Pólya. En 1956 (año en el que tuvo lugar en Noviembre la invasión rusa de Hungría) huyó a Viena. Más tarde (1960), después del alzamiento de su patria y con la ayuda de una beca Rockefeller que le concedieron, se exiliaría a Cambridge (Inglaterra) en cuya

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

Universidad realizó un doctorado Ph. D. En un posterior encuentro personal que tuvo con Pólya, pudo cultivar sobremanera su conocimiento matemático para dar origen a la creación (1963 y 1964) de un sobresaliente trabajo, que años más tarde se convertiría en una extraordinaria obra, *Pruebas y refutaciones*, plena de erudición y originalidad (de la que luego nos ocuparemos) y que representaría una filosofía nueva (y cuasiempírica) de las matemáticas. El filósofo que más influyó sobre sus ideas, fue Karl Popper, asociado a la London School of Economics (LSE). En la LSE ingresó Lakatos, donde ascendería rápidamente al ocupar el puesto para la enseñanza de la Lógica (1969). Allí acabaría su vida como profesor y maestro.

2. El método deductivo y el razonamiento inductivo. Las matemáticas informales.

Lakatos vivió en una época del siglo XX, en la que la actividad más profunda de las matemáticas había sido la investigación de sus propios fundamentos. A principios de ese siglo, una imperiosa circunstancia que puso en primera línea la problemática de los fundamentos fue el descubrimiento de contradicciones, como asimismo el de la consistencia de las matemáticas mismas, en las que prevalecía la ausencia de una prueba firme de consistencia. Cuando las antinomias dejaron claro que la demostración lógica de la época no era infalible, B. Russell (1872-1970) expresaría (1906) que "siempre ha de quedar un elemento incertidumbre; aún no se ha concedido la infalibilidad a los mortales"[1] . Las grandes controversias fundacionales reflejadas en los programas filosóficos de las corrientes del formalismo, el intuicionismo y el logicismo, habían tenido como objetivo construir cimientos seguros del conocimiento matemático. Unas tres décadas más tarde surgió un período en el cual la preocupación por los fundamentos de las matemáticas se convertiría en estado de emergencia, cuando las ideas básicas comenzaron a tambalearse y los matemáticos se vieron forzados a examinarlas. Los problemas que entonces tuvieron que afrontar, no sólo concernían a la naturaleza de las matemáticas, sino a la validez de la matemática deductiva y en particular, al papel de la lógica en la matemática; hasta el extremo de que se cuestionara el propio concepto de demostración (considerado entonces un proceso claro e indiscutible), el cual tuvo que depender del criterio de la escuela filosófica a la que uno se adhiriera. En la filosofía de la ciencia ya se habían acusado

---

[1] Morris Kline, *La pérdida de la certidumbre*, Editorial Siglo XXI, Madrid, 1985, cap. 14.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

antes de la mitad del siglo, las secuelas que todo ello había ocasionado; un período en el que el *positivismo lógico* constituiría la escuela que estaba predominando en dicha filosofía. Era el llamado *Círculo de Viena* de esos positivistas (Hahn, Gödel, Carnap, Wittgenstein,…) que abogaba por una ciencia unificada, codificada en un cálculo lógico formal y con un único método deductivo. Para ellos, el formalismo representaba el baluarte de su filosofía, al sostener que la formalización había de ser el objetivo a lograr en todas las teorías científicas. Que el formalismo no fuera compatible con el modo de pensar de muchos matemáticos, no supuso problema alguno para los filósofos positivistas, cuya filosofía condujo preferentemente al formalismo en la filosofía de las matemáticas; aunque, al no existir criterios universalmente aceptables, abundaron muchos casos en que se tuvo que admitir que la lógica conllevaba incertidumbres que limitaban la mente humana[2] .

Tras muchos siglos en que los matemáticos estuvieran vagando en un páramo de incertidumbres y razonamientos sin un adecuado fundamento lógico, se tuvieron que ampliar algunos principios de este último para que pudieran abarcar tipos de razonamientos que se habían estado usando informalmente. En la corriente formalista, como estilo dominante, la filosofía analítica tendería a perpetuar durante gran parte de la segunda mitad del siglo XX, la identificación de las matemáticas con la lógica y el estudio de los sistemas formales. Ante esa perspectiva, se quedó materialmente oculto un problema de gran trascendencia para el matemático, como sería el de conseguir una descripción filosófica real del desarrollo de las matemáticas habituales, que no eran otras que las del aula y el seminario; descripción ciertamente obligada a incluir un análisis de la relación de las matemáticas con la formalización y en qué medida las afectara[3] . La influencia del positivismo lógico en la filosofía de la ciencia, decayó más tarde, en cuanto aparecieron nuevas tendencias. Entre las opciones existentes, prevalecería como buena alternativa la generada por las contribuciones filosóficas del austriaco Kart Popper (1902-1994), uno de los principales lógicos destacado por sus aportaciones y sobretodo por su gran esfuerzo en definir el concepto de ciencia. Sería el creador del *falsacionismo*, y si bien próximo al positivismo de la escuela de Viena, Popper desplegaría una importante crítica de algunos de sus postulados,

---

[2] Un gran número de lógicos siguieron a R. Carnap (1891-1970), destacado filósofo alemán y defensor implacable del positivismo lógico, cuando éste matizó que la lógica se había de ocupar de la transmisión de la verdad y no de cadenas de símbolos conforme a la posición formalista (R. Carnap, *The logical sintax of language*, New Cork, 1937; traducida por Springer, 1984).

[3] P. Davis y R. Hersh, *The Mathematical Experience*, Birhäuser, Boston, 1981, cap. 7.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

defendiendo que la ciencia operaba por *falsación* y no por inducción. Suscribió con gran énfasis que "el razonamiento matemático es jamás verificable sino solamente *falsable*. Toda proposición científica tiene que ser susceptible de ser falsada"[4] . Una vez que la verdad matemática se viera oscurecida por las fuertes discrepancias de las escuelas fundacionistas de principios de siglo, el conflicto desencadenado recondujo indefectiblemente al dogma tradicional de la "lógica inductiva" (i.e., extracción de experimentos particulares y observaciones, de las leyes generales), un contexto problemático que ponía en tela de juicio toda ciencia racional que se basara en razonamientos inductivos. Al responder la filosofía de Popper a dicho problema, defendiendo que la ciencia no podía avanzar mediante observaciones, sino demostrando que contradicen la experiencia (ese era su significado de la *falsación*)[5] , se produjo una reacción que revolucionaría la filosofía de la época acerca del conocimiento científico.

Popper reafirmaría también que los teoremas matemáticos no tenían garantía alguna, porque la seguridad en la corrección había sido prácticamente inalcanzable[6] . Una situación confusa, porque involucraba significativos conceptos (entre ellos, los de "demostración rigurosa" y "rigor absoluto") difícilmente analizables, al representar nociones ideales que "no ocupan un lugar en el mundo matemático. Al no existir criterios universalmente aceptables, hubo de admitirse que, en realidad, la lógica conllevaba incertidumbres que limitaban la mente humana". Debemos aquilatar además, que debido a la importancia que se dio a la axiomatización al sobrepasar su impacto sobre las pruebas, ninguna teoría matemática pudo librarse de ser axiomatizada[7] ; así como hacer hincapié en que, entre las diversas cuestiones alejadas en extremo de las abstracciones matemáticas, se encontraban en especial, las relativas a matemáticas *informales* (con mayores posibilidades de introducir más axiomas y reglas, que las matemáticas formalizadas sujetas a un parco conjunto de estas últimas).

---

[4] K. Popper, *La lógica de la investigación científica*, Edit. Tecnos, Madrid, 1971 (versión castellana V.de Zabala, 1962).

[5] "Si una teoría no puede ser refutable (i.e. demostrarse que no sea verdadera o falsa) mediante ningún experimento imaginable, no es científica. Y si se somete a pruebas y las sobrevive, puede considerarse provisionalmente establecida, pero nunca *demostrada*". (K. Popper, *La lógica de la investigación científica*, **ibid**.).

[6] Añadiría asimismo que, si nos guiamos por la historia habrán nuevos fundamentos, al quedar constatado como los intentos de erigir las matemáticas sobre bases indestructibles, habían terminado en un fracaso" (M. Kline, *La pérdida de la certidumbre*, **ibid**, cap. 14).

[7] Al representar la formalización sólo una posibilidad abstracta que no podía justificar la existencia de todas sus entidades esenciales, la presentación axiomática de algunas teorías quizás pareciera secundaria y nada plausible ante la experiencia matemática ordinaria.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

Para K. Popper, las matemáticas informales constituían una ciencia que evolucionaba a través de un proceso de crítica y refinamiento sucesivo del avance de teorías nuevas que competían entre sí y que no se aferraban a las pautas deductivas de las matemáticas formalizadas[8] . En tanto Popper y otros pensadores transformaban la filosofía de la ciencia, la filosofía de las matemáticas permanecía relativamente estancada.
La filosofía popperiana, comenzó a diluirse sin que ello afectara del todo a su análisis histórico-crítico. Imre Lakatos, ofreció una alternativa radicalmente diferente en cuanto al establecimiento de una base para la indubitabilidad matemática. Consciente, al igual que Popper, de que los dogmas del positivismo lógico resultaban perjudiciales para la historia y filosofía de las matemáticas[9] , puso toda su atención en las matemáticas informales. Consideraría no obstante, *ingenuo* al falsacionismo popperiano, reformulando una nueva versión que se denominó "falsacionismo *sofisticado*", con el propósito de escapar de la falsación. Acabó cuestionando a Popper, en cuanto se adhirió a las refutaciones historiográficas de Thomas Kuhn (1922-1996)[10], quien había destacado la importancia de la historia de la ciencia, para mostrar que la falsación no era una acción cotidiana de los científicos como Popper defendía. Influido por las tesis de Kuhn, ponderaría asimismo los argumentos de otros filósofos disconformes con el método epistemológico de Popper, entre ellos, los del alemán P. Feyerabend (1924-1994), quien consideraba (al igual que Lakatos) que cualquier nueva teoría que se propusiera para sustituir a una teoría refutada, no era en el fondo más que una teoría *ad hoc*[11] .
Lakatos caracterizó el falsacionismo de Popper como metodológico, realizando una adaptación del popperiano con la aportación de ciertos conceptos definitorios para forjar un falsacionismo más refinado. Propuso como unidad de análisis epistemológico, un conjunto de directrices que

---

8 P. Davis y R. Hersh, *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston, 1981, cap. 7 (pp. 252 y sigs.).

9 "Bajo el actual dominio del formalismo, uno se ve tentado a parafrasear a Kant: la historia de las matemáticas que carezca de la guía de la filosofía se ha vuelto *ciega*, mientras que la filosofía de las matemáticas que vuelva la espalda a los más intrigantes fenómenos de la historia de las matemáticas, se ha hecho *vacía*". (I. Lakatos, *Pruebas y refutaciones:La lógica del descubrimiento matemático*, Cambridge University Press, 1976; ed. cast. Alianza Editorial **206**, Madrid, 1978; p. 18).

10 T.S. Kuhn, *The structure of scientific revolution*, Universidad de Chicago Press, 1962.

11 El lógico Feyerabend colaboró con Lakatos para la realización de una obra que se llamaría *For and against method*, pero la muerte de Lakatos acabó con el proyecto conjunto, y Feyerabend publicaría su parte en un libro titulado *Contra el método* (1974), donde criticaría la lógica del método científico racionalista apoyada en episodios claves de la historia de la ciencia.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

describía las líneas maestras para desarrollar un *programa de investigación científica* [12], que estuviese provisto de un denominado núcleo central defendido contra las refutaciones por un cinturón protector de hipótesis auxiliares, que supuestamente pudiera explicar fenómenos previamente conocidos, así como predecir fenómenos nuevos. La reconstrucción racional de ese programa debería quedar reflejada en dos ámbitos: una historia interna (que reconstruyera el desarrollo del programa_siguiendo una serie de ajustes teóricos y de hipótesis que lo configuran) y otra historia externa, suplemento de la primera (que suministra explicaciones del ritmo y localización de acontecimientos históricos, con una explicación empírica de cualquier divergencia entre las dos historias). Ambas historias, interna y externa, habrían de ser finalmente contrastadas con la historia real.

El objetivo fundamental de Lakatos apuntaba a que el verdadero desarrollo de las matemáticas no consistía sólo en acumular verdades eternas e infalibles , sino en ser constantemente refutadas, reemplazadas por otras, y concebidas en el sentido de Popper con respecto a las teorías científicas.

Debemos señalar que para que las matemáticas informales pudiesen parangonarse con la ciencia natural, en la doctrina de Popper se dependía directamente de la existencia objetiva del mundo de la naturaleza y se tenían que localizar sus "objetos", donde pruebas y ensayos motivadores de crítica y refutación de teorías, vienen dados por unos enunciados encuadrados como una especie de "falsadores potenciales". En este punto, Lakatos reitera que se considera "cuasi-empirista, puesto que, a diferencia de los de la ciencia natural, los falsadores potenciales y enunciados básicos de las matemáticas, no representan enunciados singulares (espacio-temporales) como los anteriores.

Ante la decisión de aceptar o rechazar un sistema de axiomas que se nos pudiera proponer para ciertas teorías (como, por ejemplo, la de conjuntos), Lakatos dice que cabe también optar por modificar nuestra teoría informal y cual debe ser el camino a tomar[13]

Tanto la metodología de conjeturas y refutaciones, como la que se refiere a la de los programas de investigación científica, no eran naturalmente sino unos firmes propósitos de alcanzar la racionalidad del desarrollo de las matemáticas y de la ciencia.

---

[12] Para Lakatos un programa de investigación debe contener unas "reglas metodológicas", algunas de las cuales instruyeran sobre las vías que debieran evitarse (heurística "negativa") y otras que se refirieran a los caminos que hay que seguir (heurística "positiva"). Para más detalles, véase cap. 2 (pp. 134-179 de la obra *La metodología de los programas de investigación científica*, que nos ocupa en el parágrafo **4**.

[13] Para más detalles, véase P. Davis y R. Hersh, *The Mathematical Experience*, **ibid**, cap. 7.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

Las contribuciones de Lakatos, así como las de Popper, mostraron que la filosofía moderna era capaz de aceptar la veracidad de la experiencia matemática, lo cual comporta la legitimidad de las matemáticas tal cuales son: factibles, corregibles y provistas de significado[14] .

3. Lakatos y su obra *Pruebas y refutaciones.*

Imre Lakatos se consagraría como personalidad filosófica en su tiempo después de la publicación de su obra maestra *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*[15]. Estaba basada en su tesis doctoral (*Essays in the logic of mathematical discovery*), cuyo tema (en que se trata la historia de la fórmula de Euler-Descartes) le fue sugerido por G. Pólya. Fue leída en la Universidad de Cambridge (1961). Dicha obra ejerció una decisiva influencia sobre una nueva filosofía de la ciencia, escenificando el rechazo del enfoque formalista de las matemáticas al identificarlas con su abstracción axiomática formal, y a la filosofía de las matemáticas con la metamatemática[16] .

Las matemáticas, lo mismo que las ciencias naturales, son falibles y no indubitables, y según Lakatos crecen como antes se dijo, gracias a la crítica y a la corrección de teorías no siempre libres de errores, ambigüedades u omisiones. En *Pruebas y refutaciones*, partiendo de un problema o una conjetura[17] , pueden indagarse, al propio tiempo, demostraciones y contraejemplos[18] . Nuevas demostraciones explican los contraejemplos

---

14 P. Davis y R. Hersh, **ibid**, cap. 8, p. 411.

15 *Pruebas y refutaciones: La lógica del descubrimiento matemático* (J. Worrall y E. Zaher, eds; Cambridge Univ. Press, 1976; edición castellana, Alianza Univ., **206**, 1978). Este trabajo ya había sido reflejado en un brillante ensayo (dividido en cuatro partes) de Lakatos, el cual apareció con anterioridad en *The British Journal for Philosophy of Science*, **14**, 1963-64, siendo impreso en forma de libro por Cambridge University Press después de su muerte.

16 Para la escuela formalista las matemáticas constituían una colección de sistemas formales, donde cada uno de ellos construye su propia lógica y tiene sus propios conceptos; y donde la metamatemática representa la "teoría de la demostración" formulada por Hilbert para probar la consistencia de cualquier sistema formal examinando "a priori" el alcance que podían tener las demostraciones matemáticas.

17 Desde muchos años antes, los matemáticos habían aceptado que las conjeturas (o teoremas conjeturados) debían preceder a las pruebas en el orden heurístico, lo cual seguía del hecho de la precedencia heurística del "análisis" sobre la "síntesis", ateniéndose a la estima que tenían los griegos por la *reductio ad absurdum*: les ahorraba el trabajo, habiendo probado el caso sólo con el análisis.

18 El contraejemplo representa una especie de crítica, y las conjeturas no pueden desinteresarse de los contraejemplos. Lakatos llamó contraejemplo local, al ejemplo que

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

viejos y los nuevos minan y socavan las demostraciones anteriores. No es tarea fácil hablar de matemáticas con el rigor y claridad que se requiere, debido al concepto equivocado que habitualmente se tiene de ellas. Lakatos en este contexto de matemática informal, aplica en su obra un análisis epistemológico, no a las matemáticas formalizadas sino a las *informales*[19] . Para él, cuando la sociedad evoluciona, es natural que también las matemáticas hayan de transformarse, por lo que se deben exponer argumentos para fundamentar sus resultados o teoremas, o sea, tiene que aportarse una prueba. Estima que la "prueba" no significa un procedimiento mecánico que conlleve la verdad en una cadena inquebrantable de hipótesis a conclusiones. Para un mejor desarrollo de las matemáticas informales, Lakatos considera que el objetivo de la prueba ha de concentrarse en "la incesante mejora de las conjeturas, gracias a la especulación y a la crítica, y seguir la lógica de su "método" de pruebas y refutaciones", dando a entender que la prueba involucra explicaciones, justificaciones, elaboraciones que pueden hacer la conjetura más plausible y más convincente, mientras se convierte en más detallada y segura bajo la presión de contraejemplos. En muchas ocasiones, Lakatos llamó a su filosofía *cuasi-empiricismo*.

Una primera y tosca clasificación en tres tipos, de las pruebas matemáticas aceptadas como tales en las actividades de los matemáticos o lógicos, fue dada por Lakatos en un capítulo de otra de sus obras[20] , en el cual expone en forma grosera un breve resumen al respecto[21] . Acto seguido a dicha clasificación, agrega que los formalistas acuden a criterios que caracterizan a sistemas formales que sean "interesantes" o "aceptables", mientras que de

---

refuta un lema, sin refutar necesariamente la conjetura principal; y contraejemplo global, al que refuta la propia conjetura principal.

[19] Las matemáticas "informales" a las que aplicó ese análisis son "las que se encuentran en proceso de crecimiento y descubrimiento, que son, obviamente, las que los matemáticos y estudiantes de matemáticas conocen por *matemáticas*" (véase P. Davis y R. Hersh, **ibid**, cap. 7, para más detalles).

[20] I. Lakatos, *Mathematics, science and epistemology* (edición castellana, *Matemáticas, ciencia y epistemología*, Alianza Edit., Madrid, 1981, cap. 4). Se amplía más información sobre esta obra en nuestro parágrafo **4.** El capítulo corresponde a un artículo publicado entre 1959 y 1961, y según una Nota al pie de los editores de la obra, Lakatos cambiaría después de opinión sobre algunas observaciones que hizo.

[21] Los tipos son: 1) Pruebas pre-formales; 2) Pruebas formales, y 3) Pruebas post-formales. De ellas, 1) y 3) son tipos informales: "El primero y el tercer tipo prueban algo sobre el material tratado, a veces claro y empírico, a veces vago y "cuasi-empírico", que constituye el objeto real, aunque bastante evasivo, de las matemáticas. Esta especie de prueba está siempre expuesta a cierta incertidumbre respecto a la explicación de posibilidades no previstas hasta el presente". Y para Lakatos, "el segundo tipo de prueba matemática era absolutamente fiable".

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

lo que se debería hablar es de sistemas formales sólo si constituyen formalizaciones de teorías matemáticas establecidas. "No hay necesidad de ningún criterio adicional. En realidad, no existe ninguna teoría formal "respetable" que no tenga en un sentido u otro, un antepasado informal respetable".

En la obra que nos ocupa *Pruebas y refutaciones* [22], se comienza con un diálogo [23] en un aula imaginaria entre un profesor y su clase que se interesan por la historia de un problema, el de la fórmula de Euler-Descartes, V-A+C = 2 (V=vértices, A=aristas y C= caras) para poliedros regulares, donde el poliedro es desarrollado sobre el plano, mientras la demostración tradicional es seguida de constantes contraejemplos exhibidos por los alumnos. La fase de *conjeturar* y *contrastar* reclamaba una heurística de problemas a probar[24]. En este contexto, lo que se estimó en la obra de Lakatos fue que el objetivo *real* de un problema a demostrar, debería ser el de *mejorar* la *conjetura ingenua* para hacerla un *teorema* genuino [25]. Una historia que se somete a un examen crítico de reconstrucción de lo que durante el siglo XIX se había discutido acerca de la validez de la inicial *conjetura ingenua* de Euler referente a la relación entre vértices, caras y aristas de un poliedro. La conjetura ingenua era "todos los poliedros son eulerianos". El teorema se obtiene reinterpretando los términos de la conjetura ingenua y recurriendo al método de *exclusión* de monstruos [26], un método que requeriría de la

[22] Para S. Feferman, *La lógica del descubrimiento matemático* que acompaña al título, no es psicología ni lógica, es una disciplina independiente llamada "heurística" (*The logical of mathematical discovery vs. The logical structure of mathematics*, PSA II, 309-327 (1978). Las tres fuentes ideológicas más importantes de la obra de Lakatos fueron la heurística de Pólya, la dialéctica de Hegel y la filosofía crítica de Popper. Dicho fundamento ideológico procedía de su tesis doctoral y constituyó los primeros capítulos de dicha obra, en la que se destaca cómo se aborda la prueba (de Cauchy) de la conjetura (de Euler-Descartes); o en términos más rigurosos, la prueba de una fórmula de topología algebraica sobre las propiedades de los poliedros.

[23] Lakatos culmina la Introducción de su obra, diciendo: La forma dialogada refleja la dialéctica de la narración: una historia real, documentada y racionalmente reconstruida, representada por las Notas al pie, cuya mayoría es de tal resonancia, que deben ser consideradas como parte orgánica del ensayo (p.21).

[24] A la precedencia heurística del resultado sobre el argumento, del teorema sobre la prueba, G. Pòlya (*Mathematics and Plausible Reasoning*, Oxford Univ., London, vol. **1,** 1954), objetaría que "se tiene que conjeturar un teorema matemático antes de probarlo".

[25] I. Lakatos, *Pruebas y refutaciones* , **ibid**, p. 58 (alumno Alfa). Al desarrollarse las matemáticas por un proceso de "prueba" de la conjetura (i.e. reducirla a otras subconjeturas) se pueden producir contraejemplos, no sólo para el teorema conjeturado, sino en los diferentes pasos de la prueba.

[26] En defensa del teorema, la exclusión de monstruos significó un patrón importante en las matemáticas informales (I. Lakatos, *Pruebas y refutaciones*, **ibid**, p. 60, Nota pie 56).

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

incorporación de otro excluidor de *excepciones*, debido a la introducción de un elemento extraño al argumento, la *convexidad*. Esto implicó un teorema mejor enunciado: "todos los poliedros convexos son eulerianos"

Con el teorema modificado, la demostración corregida y reelaborada, se encontraron nuevos contraejemplos, se produjeron diversas refutaciones y se requirieron necesarios ajustes. Para Lakatos, la planificación de toda esa estructura ejemplificaba la validez de su planteamiento.

Se debe insistir en que cada paso de la prueba sería materia misma de crítica, que quizás fuese un mero escepticismo o el producto de un contraejemplo a un caso particular. Ante los varios puntos de vista enfrentados, la discusión que sobreviene a veces penetra en niveles de refinamiento matemático y lógico cada vez más profundos. Siendo un libro de historia y filosofía interna de las matemáticas, el trabajo que se realiza puede resultar generalmente para el lector, difícil de abarcar en su totalidad. Desde el principio, parece aturdir al lector al sumergirlo en una especie de galimatías (o mejor, un laberinto), en donde se acomete una creciente colisión de opiniones, razonamientos y refutaciones, que conlleva una gran complejidad argumental, y con tal aguda polemística, que sorprende a quien siga adentrándose en ella para intentar asimilarla.

Para aclarar algunos puntos de la exposición que se viene haciendo, agregamos una visión resumida de una Nota incluida en la obra de Lakatos[27]:

Nota.

Desde el punto de vista histórico, la revolución del rigor fue una fuente fundamental para promover en el siglo XIX, *la unión de la lógica y de la matemática*, lo que motivó una indispensable atención sobre el análisis de la prueba. Al comienzo del XIX, el rigor de la prueba (construcción o experimento transparente) se contraponía al *argumento* confuso y a la generalización inductiva; y ya en el transcurso de dicho siglo, una oleada de contraejemplos trajo la confusión. Ello indujo a que la prueba y las refutaciones no pudieran situarse en compartimientos separados. En este orden de cosas, Lakatos realiza al respecto, un magistral discernimiento entre "prueba" y "análisis de la prueba" (una distinción que se consideró *crucial*), ponderándose asimismo "el rigor de la una y el de la otra". Al autopreguntarse, cómo puede ser verdadera o falsa una actividad, Lakatos sostiene que "sólo el pensamiento *articulado* puede tratar de alcanzar la verdad. La prueba no basta; se debe establecer también qué es lo que la prueba ha probado. La prueba significa sólo el estadio del trabajo del matemático que ha de ser seguido por el análisis de la prueba y las refutaciones, para conseguir el teorema riguroso. Por tanto, es preciso combinar el rigor de la prueba con el rigor del análisis de la prueba". No obstante advierte luego, que la

[27] I. Lakatos, *Pruebas y refutaciones*, **ibid**, Nota pp. 73 y 74.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

vaguedad del lenguaje hace inalcanzable *el rigor del análisis de la prueba*, porque podría convertir el teorema en un proceso sin fin; o dicho de otro modo, que un excesivo análisis del rigor conllevaba un contraejemplo que encamine a una falsedad del teorema conjeturado[28] . Tendría lugar asimismo una contrarrevolución "intuicionista" que condenaba el examen lógico-lingüístico del *análisis de la prueba*, inventando nuevas normas de rigor extremistas para las *pruebas*. El análisis de la prueba penetraba con mayor profundidad en las pruebas, hasta un límite que alcanzaba el *substrato* del conocimiento básico familiar, donde la intuición transparente, el rigor de la prueba, reina absolutamente, excluyendo toda crítica. Así, se hubo de reconocer que "cada una de las revoluciones del rigor difieren únicamente en el lugar en que se debe trazar la línea divisoria entre el rigor del análisis de la prueba y el rigor de la prueba, es decir, *acerca de donde debe detenerse la crítica y comenzar la justificación*".

Las observaciones, matizaciones y discrepancias que a lo largo de la obra se fueron produciendo entre el alumnado de aquella clase bastante adelantada y su profesor, recondujeron a examinar con un mayor rigor el análisis de una prueba (y su correspondiente teorema), hecho que dio lugar a una clasificación de *tres tipos de contraejemplos*: a) el contraejemplo local, el cual cuestiona algunos pasos del razonamiento; critica la prueba, aunque no a la conjetura (y ciertamente, no refuta el teorema); b) el contraejemplo global (debiendo ser tanto global como local), el cual contradice nó el razonamiento sino sus conclusiones (no requiere ninguna acción y lejos de refutar el teorema, lo confirma) y c) un tercer tipo que apuntaba directamente a la posible existencia de un contraejemplo global pero nó local, el cual podría refutar el teorema[29] .

Pondérese que el análisis de la prueba pudiera comenzar bajo la presión de contraejemplos globales, aunque también tras haber aprendido a mantenerse alerta contra pruebas "convincentes". Por otra parte, si las pruebas eran indubitables y transparentes, y algunas refutaciones (generadas por la prueba) condujesen a cuestionar la conjetura principal, lo más idóneo sería que se segregaran de aquellas pruebas. En realidad, la clasificación de contraejemplos no era absoluta, sino más bien relativa, porque dependía de lo que se dedujera del análisis de la prueba.

De todos modos, la admisión de la metodología diseñada por Lakatos, no quedó exenta de generación de otros problemas. Entre ellos y por ejemplo, una vez formulado un teorema, se tenía que proceder a un análisis más preciso de los términos en que se formulara, para saber donde se fallaba.

[28] Se refiere a un contraejemplo que es local y no global, un tipo de contraejemplo que podría presentarse y del que se ocupa en un examen crítico del mismo con anterioridad (**ibid**, pp. 69 y 71).

[29] En la historia real, el análisis de la prueba llegaría más tarde, y durante un largo período de tiempo los contraejemplos, o bien se ocultaron o bien se condenaron como monstruos o se incluyeron entre las excepciones (I. Lakatos, *Pruebas y refutaciones*, **ibid**, Nota 66).

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

Para abordar uno de los principales escollos que se suscitaron, la delimitación (reducción o ampliación) del dominio del teorema, se recurrió a la incorporación de lemas al teorema, e incluso a la sustitución (si el caso lo requería) de algún lema refutado por otro falsado [30]. Como las conjeturas no podían ignorar los contraejemplos, y se había sospechado de la posible existencia de algunos contraejemplos locales y no globales, y también de globales aunque no locales (que no sólo refutaban la conjetura ingenua sino asimismo incluso al teorema), se establecieron nuevas definiciones para estos últimos, algunos de los cuales involucraban el concepto de poliedro, y analizándose en especial, una clase de complejos poliédricos que habían sido ya con anterioridad propuestos por matemáticos excluidores de *monstruos* [31]. Obviamente, la clase citada no estaba constituida por poliedros en el sentido ordinario [32] .

En particular, una vez que se considerara como del tercer tipo, un sorprendente contraejemplo global y no local en el propio análisis de la prueba[33] , se convino en incorporar un nuevo lema, para conseguir que aquel figurara como un inocuo contraejemplo global y local del segundo tipo respecto al esquema del nuevo análisis de la prueba (y al correspondiente teorema nuevo) [34].

Finalmente, se concluye que el análisis de la prueba sería "riguroso" o "válido", y el correspondiente teorema matemático considerado como verdadero si, y solo si, no se hallaran contraejemplos del tercer tipo; dicho de otra manera, se tuvo que exigir que los contraejemplos globales, fuesen

---

[30] Esta última alternativa ante un contraejemplo, dio lugar a una regla heurística (propuesta por el alumno Lambda) para mejorar el análisis de la prueba.

[31] Algunos matemáticos utilizaron la exclusión de monstruos en defensa del teorema de Euler; así como también el ajuste de monstruos para explicar todo lo que no sea euleriano (I. Lakatos, **ibid,** Nota 48, p.56). Con el *método de exclusión de monstruos* se puede eliminar cualquier contraejemplo de la conjetura original, mediante una hábil aunque siempre *ad hoc* redefinición de poliedro (I. Lakatos, p. 40).

[32] En esa clase figuraban como contraejemplos, entre otros, un par de cubos encajado uno dentro del otro, un tipo de poliedro estelar (llamado *erizo*), destacándose la definición (contraejemplo 5) de un poliedro como un mero *cilindro*, el cual si bien satisfacía los lemas requeridos, no era euleriano (véase I. Lakatos, *Pruebas y refutaciones*, **ibid,** p. 37 (Nota 22) y pp. 39 y 60 (alumno Gamma)).

[33] Se trataba del *cilindro,* que ya se había aceptado como contraejemplo *genuino* del teorema.

[34] No se quiso omitir ese lema, para unirlo con otros "lemas *ocultos*" (defendidos por los alumnos Alfa, Beta y Gamma, que sospecharon de su existencia cuando aún no había aparecido ningún contraejemplo global (p. 66, Nota 66); fueron "ocultados", y se prosiguió con el análisis de la prueba)

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

también locales[35]. Este es el denominado principio de retransmisión de la falsedad: un principio en que la falsedad debería retransmitirse de la conjetura ingenua a los lemas, del consecuente del teorema a su antecedente. Si algún contraejemplo global pero no local, violara este principio, se restauraría añadiendo un lema conveniente al análisis de la prueba.

Lakatos presenta, por último, la programación de lo que se ha expuesto, como modelo de desarrollo del conocimiento matemático[36]. Enunció los aspectos principales de su "método denominado "de pruebas y refutaciones", mediante tres reglas heurísticas, en las que, partiendo de una conjetura, se debe realizar un análisis de la prueba, escrutando los contraejemplos (regla 1); de existir algún contraejemplo global que descartara la conjetura, se le tendría que rechazar y sustituir la conjetura por un lema "conveniente" que fuese refutado por dicho contraejemplo (regla 2); y si el contraejemplo fuese local, habría que comprobar si no era global, y si lo fuera, se aplicaría la regla 2 (regla 3).

Aún cuando el "método de pruebas y refutaciones" presumiblemente encarrilaba hacia un análisis riguroso de la prueba y, por tanto, a un teorema verdadero, el propio desarrollo del método siguió generando problemas a veces imprevistos. La reanudación de un posterior repaso crítico del análisis de la prueba mediante contraejemplos locales pero no globales, creó uno ciertamente importante: el problema del contenido[37].

Se analizaron nuevas posibilidades, una de las cuales consistía en la incorporación al teorema del lema, si bien se adoptó la alternativa de no estrechar el dominio del teorema con incorporar lemas, sino ampliarlo, sustituyendo el lema refutado por otro no falsado (regla 4); una regla que ofrecería claras dudas ante la crítica y que hubo de ser complementada por la siguiente:"ante contraejemplos de cualquier tipo, se debe tratar de hallar mediante conjeturas deductivas un teorema más profundo, respecto del cual ya no sean contraejemplos" (regla 5) (I. Lakatos,**ibid**, p. 95, alumno Dzeta).

---

[35] Se trata de un principio *regulativo* del análisis de la prueba *in statu nascendi*, mientras que un contraejemplo global pero no local sería un catalizador del desarrollo del análisis de la prueba (I. Lakatos, *Pruebas y refutaciones*, p. 65). El paso heurístico de los contraejemplos globales al análisis de la prueba (aplicación del principio que se llamaría de "retransmisión de la falsedad") era desconocido virtualmente en las matemáticas informales del XIX (I. Lakatos, **ibid**, p. 66, Nota 66).,

[36] P. Davis y R. Hersh (**ibid**, cap. 6), lo catalogan como un diálogo nuevo y esclarecedor que puede hacernos progresar en el problema fundamental de la verdad y el significado de la naturaleza del conocimiento matemático.

[37] Se trataba de un problema reflejado (en el diálogo) ante la advertencia al maestro del alumno Omega: "El análisis de la prueba, al aumentar la certeza, disminuye el contenido". Se debería poseer un contrapeso frente a la presión que hace el rigor hacia la disminución del contenido (I. Lakatos, *Pruebas y refutaciones,* **ibid,** sección 6, p. 75).

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

Hubieron otras estimaciones, como la de formación de conceptos mediante refutaciones, (insertas, entre otras, en la sección 8) y, finalmente, algunas discusiones acerca de cómo la crítica podía convertir la verdad matemática en verdad lógica (en la sección 9)..

Por último a la obra se agregan dos Apéndices. El primero de ellos denominado "Otro ejemplo del método de pruebas y refutaciones", pareció haberse constituido como un patrón heurístico general del descubrimiento matemático desde muchos años antes. Después de haberse comprobado que muchas pruebas distintas de una misma conjetura ingenua podría llevar a teoremas diferentes[38], se constató mediante diversas pruebas que se hicieron con la de Euler-Descartes, que la primitiva conjetura mejoraba con cada prueba tornándose en un teorema diferente. Esto conllevó a que la interpretación de la expresión usual "distintas pruebas del teorema de Euler", resultara confundible, ya que ocultaba el papel vital que desempeñaban las pruebas en la formación de teoremas.

En este apéndice **1**, el esqueleto del método que se expuso quedaría ilustrado con el ejemplo que dio Cauchy de la conjetura de Euler-Descartes. El bosquejo que hizo Lakatos se refiere al caso de un análisis de la prueba en análisis matemático, considerando la temática de "la defensa de Cauchy del principio de continuidad". La conjetura primitiva era "el límite de una serie convergente de funciones continuas, es a su vez continuo" (una verdad que se había dado por supuesta en el siglo XVIII). A la sazón, algunos grandes matemáticos (Abel, entre otros) intentaron constantemente mejorar sus conjeturas mediante exclusión de excepciones, aunque la idea de *mejorar* probando nunca se les ocurrió[39] .

En el segundo apéndice titulado "El enfoque deductivista frente al enfoque heurístico", Lakatos comienza presentando como estilo deductivista el desarrollado por la metodología euclídea, y muestra la ventaja de introducir elementos heurísticos en el estilo matemático. Analiza como ejemplos característicos, los conceptos de *convergencia uniforme*, el de *variación acotada* y el de *conjunto medible en el sentido de Carathéodory*. Señala en primer lugar que, en cierto modo, heurísticamente el concepto generado por la prueba de convergencia uniforme que se discute en el apéndice **1** anterior, se vincula técnicamente con el método de pruebas y refutaciones. Argumenta que en el enfoque deductivista, se comienza enunciando un conjunto de axiomas, a cuya lista siguen teoremas cuidadosamente

---

38 I. Lakatos, **ibid**, p. 83, apartado (c).

39 En el siglo XVIII, recibía el nombre de "prueba" un razonamiento inductivo. No había modo de mejorar ese tipo de pruebas, y fueron desechadas como pruebas no rigurosas, o sea, de que constituyan pruebas absolutas (para matemáticos como Cauchy y Abel, "riguroso" significaba deductivo, en cuanto opuesto a inductivo).

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

expresados[40]. Sin embargo, en la presentación de las matemáticas se ocultan contraejemplos, refutaciones e incluso la crítica. Los defensores del deductivismo pretenden que la deducción sea el patrón heurístico de las matemáticas y que la lógica del descubrimiento sea la deducción. Lakatos concluye afirmando que mientras en las matemáticas impera el patrón deductivista, en la ciencia se opera mediante el patrón inductivista.
En cuanto a los otros dos ejemplos tratados, en el caso de variación acotada Lakatos aduce que la introducción deductivista que se muestra de su concepto, puede catalogarse como autoritaria. Una presentación heurística probaría que los conceptos de la integrabilidad de Riemann-Stieltjes y el de variación acotada resultan estar generados por una misma prueba (la demostración de Dirichlet de la conjetura de Fourier[41]). En el ejemplo del conjunto medible, Lakatos advierte que el análisis del paso del enfoque deductivista al heurístico es complicado y hay que aceptar las definiciones de los conceptos como un acto de fe, por cuanto esas definiciones resultan ser dogmas y sólo las conclusiones de las mismas pueden proporcionar una nueva visión.
Lakatos finaliza este apéndice **2**, diciendo: "Es muy fácil poner ejemplos, en los que, enunciar la conjetura, mostrar la prueba y los contraejemplos, siguiendo el orden heurístico hasta el teorema, y la definición generada por la prueba habría de disipar el misticismo autoritario de las matemáticas abstractas, actuando como un freno de la degeneración. Un par de ejemplos de semejante degeneración, haría mucho bien a las matemáticas. Desgraciadamente, el estilo deductivista y la atomización del conocimiento matemático protegen en un grado considerable a los artículos *degenerados*"[42].

4. Referencias y acotaciones sobre otros trabajos de Lakatos.

Imre Lakatos escribió un buen número de diversos artículos sobre filosofía de las matemáticas, antes de desenvolverse en la filosofía de la ciencia en general.
Cuando en 1974 falleció Lakatos, muchos de sus amigos, colegas y discípulos decidieron compilar sus trabajos aparecidos en revistas o inéditos, e incluso algunos dispersos que parecían no haber sido elaborados con propósitos de publicación. Entre ellos, bastantes se encontraban también

[40] En los mismos, el teorema va seguido de la prueba. Asimismo, todas las proposiciones son verdaderas y todas las inferencias son válidas.
[41] I. Lakatos, *Pruebas y refutaciones*, **ibid**, p. 171.
[42] I. Lakatos, *Pruebas y refutaciones*, **ibid,** `p. 178.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

interesados en ver reunidos en forma de libro sus contribuciones en revistas y congresos.

Las contribuciones de Lakatos fueron recogidas y publicadas por Cambridge University Press (Cambridge) en el orden cronológico siguiente: Tras editarse en 1976, *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*, salieron con posterioridad al público otras dos obras que abarcaron dos volúmenes independientes (1977) en *Philosophical Papers* (Escritos filosóficos): El primero de ellos (vol. **1**) sería *The methodology of scientific research programmes* (versión castellana *La metodología de los programas de investigación científica*, Alianza Editorial, Madrid, 1977; ed. J. Worrall y G. Currie), que contenía diversos artículos sobre la filosofía de las ciencias; el segundo volumen (vol. **2**) comprendía la obra *Mathematics, science and epistemology* (ya citada anteriormente, con algunos comentarios) (versión castellana, *Matemáticas, ciencia y epistemología*, Alianza Editorial, Madrid, 1981, ed. J. Worrall y G.P. Currie), la cual reunía los trabajos de Lakatos de filosofía de las matemáticas y críticas a las diversas filosofías de las ciencias, así como varios textos acerca de la ciencia y la educación.

Se recogen seguidamente, referencias de las contribuciones de Lakatos que forman parte de los dos volúmenes mencionados de Escritos filosóficos. A un cierto número de esos trabajos, hemos añadido algunas acotaciones y un breve resumen inherente a la naturaleza de cada tema.

De los cinco capítulos monográficos que contiene el volumen **1**, el primero de ellos (cap. 1) "La falsación y la metodología de los programas de investigación científica", está compuesto de cuatro trabajos y un apéndice. Fue escrito en 1968-69 y publicado por primera vez en 1970[43]. El volumen viene precedido de un artículo introductorio titulado "Ciencia y Pseudociencia" escrito a principios de 1973 y dado originalmente a conocer mediante una conferencia por la radio; se trataba, según Lakatos, de una versión *mejorada* del artículo *Changes in the problems of inductive logic*, reimpreso como cap. 8 en el volumen **2** (Escritos filosóficos:*Mathematics, science and epistemology,* obra citada de la que nos ocuparemos luego). El artículo que se menciona, causó en su día un inusitado interés. Acto seguido, seleccionamos algunos de sus párrafos esenciales:

"¿Cuál es la distinción entre el conocimiento científico y la pseudociencia?(…) La demarcación entre *ciencia* y *pseudociencia* no es un simple problema de filosofía, sino que tiene una importancia social y política vital (…) En el razonamiento científico, las teorías científicas deben

[43] I. Lakatos y A. Musgrave (edit.), *Falsifications and the methodology of scientific research programmes* (1974), pp. 91-176; y ahora reimpreso en este volumen.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

ser confrontadas por los hechos (…) Las teorías que no fuesen probadas por los hechos, han venido siendo consideradas como pseudociencia pecaminosa; una herejía en el seno de la comunidad científica (…) Si todas las teorías científicas son igualmente incapaces de ser probadas, ¿qué distingue al conocimiento científico de la ignorancia y a la ciencia de la pseudociencia? (…) Los lógicos "inductivos" suministraron en el siglo XX una respuesta a esta pregunta (…) En 1934 el filósofo Popper defendió que la probabilidad matemática de todas las teorías científicas o pseudocientíficas, para cualquier magnitud de evidencia, es cero (…) Las teorías científicas no sólo son incapaces de ser probadas, sino que son también igualmente improbables. Se requería un nuevo criterio de demarcación y Popper propuso uno magnífico: una teoría puede ser científica incluso si no cuenta ni con la sombra de una evidencia favorable, y puede ser considerada pseudocientífica aunque toda la evidencia disponible le sea favorable (…) Una teoría es científica si podemos especificar por adelantado un experimento crucial (o una observación) que pueda falsarla, y es pseudocientífica si nos negamos a especificar tal "falsador potencial" (…) ¿Es el criterio de falsabilidad de Popper la solución del problema de la demarcación entre la ciencia y la pseudociencia? (…) Kuhn descubrió la ingenuidad del falsacionismo de Popper (…) La historia de la ciencia refuta tanto a Popper como a Kuhn. Lakatos acabaría diciendo: El problema de la demarcación entre ciencia y pseudociencia no es un pseudoproblema para filósofos de salón, sino que tiene serias implicaciones éticas y políticas".
El segundo monográfico (cap. 2, con dos artículos), "La historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales", fue publicado en 1971. En el tercero (cap. 3, con dos artículos), "Popper y los problemas de demarcación e inducción", escrito en 1970-71, reimpreso en el presente volumen) destaca su <u>criterio</u> <u>de</u> <u>demarcación</u> en la teoría sobre la racionalidad científica. El cuarto (cap. 4, con seis artículos), "¿Por qué superó el programa de investigación de Copérnico al de Tolomeo?", fue escrito por Lakatos y Elie Zahar en 1972-73 y publicado por vez primera en 1976; reimpreso como capítulo 11 del volumen **2** (Escritos filosóficos: *Mathematics*, *science and epistemology*)[44] , con un texto que se ocupa sólo del aspecto normativo del tema , sin tratar de abordar un estudio socio-psicológico de la revolución copernicana; y el último (cap. 5, con dos artículos), "El efecto de Newton sobre las reglas de la ciencia", cuyas primeras versiones fueron escritas en 1963-64, y se editarían también en el volumen **2** (que tratamos acto seguido).

[44] I. Lakatos, *¿Understanding Toulmin?;* Minerva **14** (1976), 126-143.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

El volumen **2**, cuyo contenido reiteramos que se trata de *Mathematics, science and epistemology*, se convirtió en un clásico de la filosofía de la ciencia. La obra está dividida en tres partes: I) Filosofía de la matemática; II) Escritos críticos, y III) Ciencia y educación.

La parte I) se compone de cinco capítulos:

1) "Regresión infinita y fundamentos de la matemática", un trabajo publicado por primera vez en *Aristotelian Society Supplementary*, vol. 36 (1962), en donde Lakatos señala, para quien conozca la materia, que apreciará el impacto de la filosofía de Popper a lo largo de todo el artículo; y en la cual también se reconocen muchas de las ideas reimpresas con anterioridad (en *Pruebas y refutaciones* y en vol. **1**). Del trabajo destacamos algunos párrafos ilustrativos:

"En la filosofía escéptica se ha enseñado durante más de dos mil años, que el significado y la verdad matemática, es el objetivo de los fundamentos(…) El argumento escéptico clásico se basa en el *regreso al infinito* (…) Fijar el significado de un término, definido mediante otros términos, representa un proceso que conduce a un regreso infinito; definición que también puede realizarse por medio de "términos muy bien conocidos" (…) ¿Cómo evitar el regreso infinito en las pruebas, aún cuando pudiéramos evitarlo en las definiciones? (…) ¿Cómo podemos *conocer*? (…) La controversia entre dogmáticos - quienes afirman que se puede conocer – y escépticos –quienes afirman que, o bien no se puede conocer o, al menos, no sabemos qué se puede y cuando es que conocemos -, constituye el tema básico de la epistemología (…) La filosofía matemática moderna está profundamente inmersa en la epistemología general y sólo en este contexto puede ser comprendida. (…) El regreso infinito para los escépticos es una empresa desesperada de encontrar los fundamentos del conocimiento. Tres grandes programas racionalistas se propusieron organizar el conocimiento para la *detención* de la regresión infinita en la ciencia (euclídeo, empirista e inductivista) y los tres lo hicieron en sistemas deductivos. (…) El falibilismo crítico de Popper toma en serio el regreso infinito en las pruebas y definiciones, y acepta la crítica escéptica de toda inyección de verdad infalible (…) La detención de la regresión infinita se intentó también por trivialización lógica de las matemáticas, como asimismo mediante una meta-teoría trivial. La metamatemática hilbertiana , al igual que la lógica russeliana, tiene su origen en la crítica de la intuición; y tanto los metamatemáticos como los logicistas, nos piden que aceptemos *su* intuición como prueba última, cayendo ambos en el mismo psicologismo subjetivista que en otro tiempo atacaron".

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

2) "¿Existe un renacimiento del empirismo en la reciente filosofía de la matemática?", un artículo que fue publicado en 1967 en *Problems in the Philosophy of Mathematics* (Ámsterdam).
3) "Cauchy y el continuo. La importancia del análisis no estándar para la historia y la filosofía de la matemática". Constituye un tema fascinante con un nuevo análisis, "no estándar", que revoluciona el modelo que tiene el historiador de la historia del desarrollo del cálculo infinitesimal. Subraya la reconstrucción racional de algunos problemas históricos, en especial el de Cauchy y la convergencia uniforme. Valora las teorías matemáticas informales y argumenta que la aproximación de Robinson a la historia del cálculo no puede ser explotada en el seno de la estructura formalista de las matemáticas (I. Lakatos, *Math.Intelligencer*, 1978, **1** 151-161). Ese trabajo fue leído en un Congreso Europeo en Hannover (1966) y luego aceptado por el *British Journal for the Philosophy of Science* (si bien Lakatos se había negado en su día a publicarlo).
4) "¿Qué es lo que prueba una prueba matemática?". Este artículo fue escrito entre 1959 y 1961 para un seminario realizado en Cambridge. Trata de la clasificación de las pruebas matemáticas en tres tipos diferentes: pre-formales, formales y post-formales (a las que ya anteriormente nos hemos referido). En su análisis de las características de las pruebas en las teorías informales, indica que la llamada prueba *informal* no es otra cosa que "una prueba en una teoría matemática axiomatizada, que ha adoptado ya la forma de un sistema hipotético-deductivo, si bien deja sin especificar su lógica adyacente", y agrega que "denominar a este tipo de prueba una prueba informal constituye una nomenclatura equívoca y errónea, y se la podría llamar mejor una prueba *cuasi-formal*".
5) "El método de análisis-síntesis", con un tema en que la conjetura de Cauchy de la conjetura de Euler-Descartes se somete a una nueva línea de ataque.

Parte II), que consta de seis capítulos:
6)" El problema de la evaluación de las teorías científicas: tres planteamientos".
7) "Necesidad, Kneale y Popper".
8) "Cambios en el problema de la lógica inductiva". Se trata de una parte integrante de las Actas de un Congreso Internacional sobre *Filosofía de la ciencia* celebrado en Londres (1965). Se publicó en 1968.
9) "Sobre la historiografía popperiana". Publicado a mediados de los años 1960.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

10) “Anomalías versus “experimentos cruciales”. (Una réplica al profesor Grünbaum)”. Una contribución a un debate entre Lakatos y Grünbaum sobre el “status” de los experimentos cruciales.

11) “Comprendiendo a Toulmin”. Este trabajo fue publicado como una revisión del libro de Stephen Toulmin, *La comprensión humana*, en *Minerva* **14**1, 26-143 (1976 eds.).

La Parte III), comprende tres capítulos:

12) “Carta al director de la London School of Economics”. Fue escrita durante los disturbios estudiantiles en la LSE en 1968.

13) “La enseñanza de la historia de la ciencia”. Reimpreso de A.C. Crombie (ed.), *Scientific Change*, 1963.

14) “La responsabilidad social de la ciencia”.

Nota: Algunos comentarios añadidos a los artículos precedentes, han sido extraídos de sus Notas al pie correspondientes.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017