matematicalia
revista digital de divulgación matemática

PASATIEMPOS

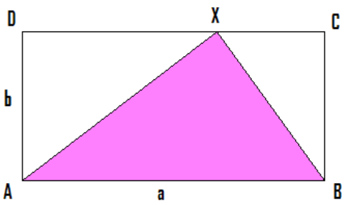
Volumen 7, núm. 1 (marzo 2011)
3 páginas

http://www.matematicalia.net
ISSN: 1699-7700

Recibido: 26 de enero de 2011
Publicado: 27 de junio de 2011

¿Qué pasaría si… *

… en un rectángulo $ABCD$ de lados a y b, marcamos un punto arbitrario X en el lado CD y consideramos el triángulo ABX , como muestra la figura?

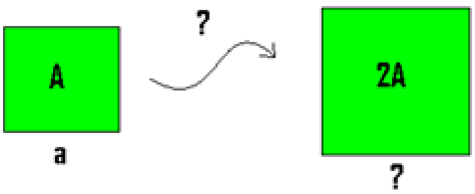


¿Cuál será el área del triángulo y cómo dependerá de la posición del punto X ?

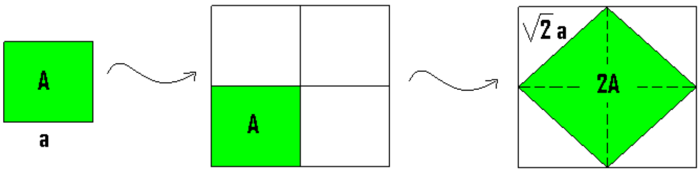
[La solución, en el próximo número]

Solución al problema anterior

… dado un cuadrado de lado a y área A, te pidiera que dibujaras otro cuadrado con área $2A$? ¿Cuál sería el lado del nuevo cuadrado? ¿Podrías construir este cuadrado con regla y compás?



Respuesta: El cuadrado con área $2A$ tiene que tener el lado igual a $\sqrt{2}\,a$ y sí se puede construir con regla y compás. En realidad, es suficiente usar una regla sin marcas:



Por cierto que esta solución incluye una prueba del teorema de Pitágoras para el caso de un triángulo isósceles. En efecto, mirando a uno de los cuatro triángulos verdes formados en la última figura, podemos escribir

$$2A = \left(\sqrt{2}a\right)^2 = 2a^2 = a^2 + a^2 ,$$

donde a es la longitud de cada uno de los lados del triángulo recto con hipotenusa $\sqrt{2}a$.

El problema de la duplicación del cuadrado aparece en *Menón,* uno de los *Diálogos* de Platón, desarrollados como conversaciones entre su maestro Sócrates y otros individuos, y quizá escritos entre los años 393 a.C. y 347 a.C. Se conocen 42 *Diálogos*, de los cuales probablemente 15 son apócrifos.

El problema de la duplicación del cuadrado es usado en *Menón* para mostrar que todo el conocimiento que podamos adquirir a lo largo de nuestra vida ya existe en nuestra mente, y que el proceso de aprender algo es, en realidad, un proceso de recordación.

La posibilidad de hacer ciertas construcciones con regla y compás ocupó un papel central en la geometría de la Grecia clásica. Especialmente tres problemas atrajeron la atención de los geómetras griegos:

1. La cuadratura del círculo: construir un cuadrado con la misma área de un círculo dado.
2. La duplicación del cubo: construir un cubo cuyo volumen es el doble del volumen de un cubo dado.
3. La división de un ángulo dado en tres partes iguales.

Los geómetras de la Grecia clásica no pudieron resolver ninguna de estas construcciones. En cada caso, mucho más tarde se probó la imposibilidad de hacer la construcción usando sólo un número finito de pasos. Esta imposibilidad puede formularse algebraicamente, aplicando propiedades de un cierto número.

Por ejemplo, en el problema de la cuadratura del círculo, si el círculo tiene radio r y área $A=\pi r^2$, el lado del cuadrado con la misma área deberá tener longitud

$$x=\sqrt{A}=\sqrt{\pi r^2}=\sqrt{\pi}r.$$

La cuadratura del círculo con regla y compás requiere entonces que el número $\sqrt{\pi}$ sea construible, es decir, que corresponda a un punto en la recta real que pueda ubicarse con regla y compás a partir de una unidad de longitud dada. Si un número es construible, debe de ser algebraico, es decir, debe de ser raíz de un polinomio no nulo con coeficientes racionales. Recordemos que los números que no son algebraicos se llaman trascendentes. En 1882, Ferdinando von Lindemann mostró que π es trascendente, de donde resulta que $\sqrt{\pi}$ no puede ser construible.

Reconocimientos

La idea de este *¿Qué pasaría si... ?* está inspirada en el capítulo 16 de la novela *Pythagoras' Revenge*, escrita por Arturo Sangalli y publicada en 2009 por Princeton University Press. En particular, la observación sobre la prueba del caso especial del teorema de Pitágoras aparece en las páginas 111-112.

Referencias

1. Lledó Íñigo, J. Calonge Ruiz y C. García Dual: *Platón. Diálogos. Introducción.* Obra completa en 9 vols. Editorial Gredos, 1981 [séptima reimpresión: 2003]. *Menón.* Vol. I, pp. 51-55.
2. E.W. Hobson: *Squaring the circle: A history of the problem*. Cambridge University Press, 1913 [reimpresión: Merchant Books, 2007].

Sobre la autora

Josefina (Lolina) Álvarez es Emeritus Professor of Mathematics en New Mexico State University (USA). Especialista en análisis armónico y funcional, se doctoró en Matemáticas por la Universidad de Buenos Aires (Argentina), bajo la dirección de A.P. Calderón. Ha ocupado diversos puestos y cargos académicos en la Universidad de Buenos Aires y en las estadounidenses de Princeton, Chicago, Florida Atlantic University y New Mexico. Ha sido investigadora del CONICET (Argentina). Ha dictado numerosas conferencias en congresos y sesiones especiales e impartido seminarios en Alemania, Argentina, Bélgica, Brasil, Canadá, Colombia, España, Estados Unidos, México, Perú, Polonia, Suecia y Venezuela. Ha pertenecido y en varias ocasiones presidido los comités organizadores de distintos congresos y minisimposia. Ha ejercido como evaluadora para prestigiosas revistas especializadas. Desde 2002 hasta 2007 ha sido Editora Asociada del *Rocky Mountain Journal of Mathematics*. Autora o coautora de numerosos artículos científicos y varias monografías en análisis armónico y funcional y directora de cinco tesis doctorales, ha desarrollado asimismo una intensa actividad en el campo de la educación matemática, habiendo recibido diversos galardones a la excelencia docente.

* Sección a cargo de Josefina Álvarez.