NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 77, julio de 2011, páginas 85–98

Un análisis del uso de la tecnología para el cálculo de primitivas

Juan Carlos Ponce Campuzano (Cinvestav-IPN. México)
Antonio Rivera Figueroa (Cinvestav-IPN. México)

Fecha de recepción: 22 de octubre de 2010
Fecha de aceptación: 17 de enero de 2011

Resumen En el presente documento planteamos y analizamos situaciones matemáticas que surgen cuando contrastamos resultados obtenidos usando un Sistema de Cómputo Algebraico con la teoría matemática. En particular, damos ejemplos en el caso del cálculo de primitivas. Trabajar con este tipo de situaciones puede ser provechoso para la reflexión y la enseñanza de contenidos matemáticos.

Palabras clave Primitiva, Integral definida, Teorema Fundamental del Cálculo, CAS.

Abstract In this paper we introduce and analyze mathematical situations that arise when we contrast results obtained by using a Computer Algebraic System with mathematical theory. In particular, we give examples in the case of the calculation of primitives. Working with this kind of situations can be helpful for reflection and teaching of mathematical topics.

Keywords Primitive, Definite integral, Fundamental Theorem of Calculus, CAS.

1. Introducción

Los sistemas de cómputo algebraico (CAS, por sus siglas en inglés: Computer Algebraic System) son un tipo de software que nos permite manipular expresiones algebraicas, dibujar funciones y operar con números. En el caso del cálculo diferencial e integral existe software especialmente poderoso y de gran ayuda tanto para el aprendizaje de las matemáticas como para el mismo quehacer matemático. En general, los algoritmos utilizados en estos programas son eficientes métodos que en ocasiones entrañan relaciones matemáticas mejor conocidas por los expertos programadores que por los matemáticos.

También suele ocurrir que los CAS empleen métodos que producen resultados más complejos a los obtenidos con lápiz y papel o incluso llegan a producir resultados erróneos aún en casos simples. Nuestra experiencia y capacidad de análisis en ocasiones supera a los ordenadores y nos ayuda a elegir mejores métodos para casos específicos.

Las capacidades numéricas, gráficas, simbólicas y de programación de las nuevas herramientas tecnológicas, juegan un papel importante en el futuro de la enseñanza de las matemáticas, no sólo como ayuda pedagógica sino como un vehículo para nuevas aproximaciones (Lagrange, 2005). A continuación, analizamos casos particulares del cálculo de primitivas usando diferentes tipos de CAS.

2. El Cálculo de primitivas: CAS vs Teoría

Un teorema importante dentro del Cálculo diferencial e integral es el famoso Teorema Fundamental del Cálculo, el cual establece relaciones de reciprocidad entre los procesos de integración y diferenciación. Antes de citarlo, primero recordemos que una función $G:[a,b]\to\mathbb{R}$, derivable en todo $[a,b]$, es una primitiva de la función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ si cumple que $G'(x)=f(x)$ para todo $x\in[a,b]$.

Teorema Fundamental del Cálculo: *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *una función continua y sea* $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ *dada por*

$$F(x)=\int_c^x f(u)du\text{, con } c\in[a,b].$$

Entonces

1. F *es derivable en cada* $x\in[a,b]$ *y además* $F'(x)=f(x)$ *para toda* $x\in[a,b]$.
2. *Si* $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ *es una primitiva de* f, *se tiene que*

$$\int_a^b f(u)du=G(b)-G(a).$$

Observación 1: La función $F(x)=\int_c^x f(u)du$ del inciso 1, llamada integral indefinida, es una primitiva de f.

Observación 2: El teorema anterior se puede encontrar de distintas formas, en diversos libros de Cálculo avanzado. Incluso se puede encontrar de manera más general para funciones Riemann integrables (ver por ejemplo Apostol, 1998 y Spivak, 1996). Sin embargo, es suficiente citarlo aquí para funciones continuas.

La fórmula

$$\int_a^b f(u)du=G(b)-G(a)$$

nos ofrece una herramienta para calcular integrales en un intervalo, razón por la cual resultan importantes los famosos *Métodos de Integración*, que no son otra cosa que métodos para encontrar primitivas de funciones.

Algunos de los métodos de integración más populares que suelen estudiarse en los primeros cursos de Cálculo son:

1. Identificación de integrales inmediatas.
2. Integración de funciones racionales, mediante la descomposición en fracciones simples.
3. Integración por partes.
4. Cambio de variable.

Para el caso del cálculo de primitivas el CAS resulta ser una herramienta eficaz ya que en la práctica puede facilitar cálculos engorrosos. Camacho (2005) comenta, por ejemplo, que:

> …el uso del software (Derive y Maple) proporciona un importante instrumento para que los estudiantes puedan librarse de memorizar fórmulas o procedimientos de cálculo, aunque es fundamental tener en cuenta que los estudiantes necesitan un cierto tiempo para madurar y desarrollar una comprensión conceptual segura de los conceptos. Necesitan prestar atención al proceso de transformación y relación que pueden establecerse entre las representaciones gráficas, algebraicas y numéricas. (Camacho, 2005, pp. 108)

Sin embargo, existen casos donde los resultados del CAS difieren a los obtenidos con lápiz y papel usando la teoría, lo cual puede influir de diversas maneras. Lo idóneo es analizar el porqué de esta diferencia.

En la siguiente sección ilustraremos con algunos ejemplos, situaciones matemáticas relacionadas con el cálculo de primitivas en donde los resultados obtenidos con el ordenador difieren de aquellos obtenidos de "manera natural" con lápiz y papel. Estas situaciones pueden servir para analizar y profundizar conceptos matemáticos específicos del Cálculo tales como: *cálculo de primitivas, integral definida, constante de integración, continuidad de funciones y el Teorema Fundamental del Cálculo.*

Para nuestro análisis hemos utilizado tres herramientas de CAS: los programas **Derive 6.0** y el **Scientific Work Place 4.0** y el sitio de acceso libre **WolframAlpha** (basado en **Mathematica**: para mayor información acerca de este sitio consultar la página http://www.wolframalpha.com/). Es importante señalar que no se trata de casos aislados, sino de ejemplos particulares de una familia de situaciones que muestran fenómenos similares.

2.1. Situación matemática I

Como primer ejemplo consideremos el problema de calcular

$$\int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx\,.$$

Es posible que esta integral sea uno de los primeros ejercicios de integrales inmediatas en un curso de cálculo elemental. No se requiere mucha experiencia para mirarla en la forma

$$\int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx = 2\int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}\,dx\,,$$

así que alguien que inicia sus estudios de métodos de integración, seguramente escribirá

$$\int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx = 2\int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}\,dx = \log(\operatorname{sen} 2x) + C\,.$$

Alguien con más información o más reflexivo escribiría

$$\int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx = 2\int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}\,dx = \log|\operatorname{sen} 2x| + C\,.$$

En la Tabla 1 se muestran los resultados obtenidos utilizando el CAS.

CAS	Resultado
Derive	#2: $\int \frac{\mathrm{COS}(2\cdot x)}{\mathrm{SIN}(x)\cdot \mathrm{COS}(x)}\, dx$ #3: $2\cdot \mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(x)) - \mathrm{LN}(\mathrm{TAN}(x))$
WolframAlpha	$\int \frac{\cos(2\,x)}{\sin(x)\cos(x)}\, dx = \log(\sin(x)) + \log(\cos(x)) + \text{constant}$
Scientific WorkPlace	$\int \frac{\cos(2x)}{\sin x \cos x} dx = \frac{1}{2}\ln(2-2\cos 4x)$
Resultado teórico	$\int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x \cos x} dx = \log \lvert \operatorname{sen} 2x \rvert + C$

Tabla 1. Diferentes resultados del CAS para el cálculo de una primitiva

Además de las diferencias de forma en estas respuestas, también hay diferencias de fondo. Primero veamos las diferencias de forma: ¿Nos encontramos ante cuatro expresiones diferentes del mismo resultado? ¿De los cuatro, hay algún mejor resultado? ¿En qué sentido sería un mejor resultado?

Quizá al principio pueda parecer un problema difícil, pues podría considerarse como un problema de equivalencias de expresiones en donde, para probarlas, se requiere cierta destreza en el manejo de identidades trigonométricas para transformar cada una de ellas en cualquier otra. Una estrategia, quizá la más simple, sea derivar todos los miembros de la derecha y mostrar que en todos los casos se obtiene el integrando. La insuficiencia de este procedimiento radica en que además deben analizarse los dominios de las funciones involucradas.

Al derivar y simplificar (también se puede utilizar el CAS para simplificar esta laboriosa tarea) los resultados anteriores obtenemos:

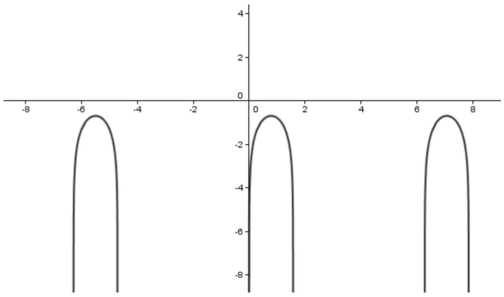
$$\frac{d}{dx}\left(2\log(\operatorname{sen} x) - \log(\tan x)\right) = 2\cot x - \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} = 2\cot 2x = \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\log(\cos x) + \log(\operatorname{sen} x) + C\right) = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

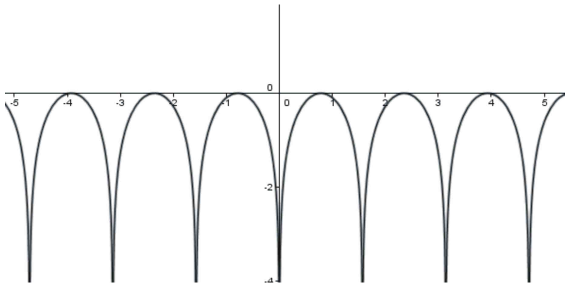
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\log(2 - 2\cos 4x)\right) = 2\cot 2x = \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\log\lvert\operatorname{sen} 2x\rvert + C\right) = \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

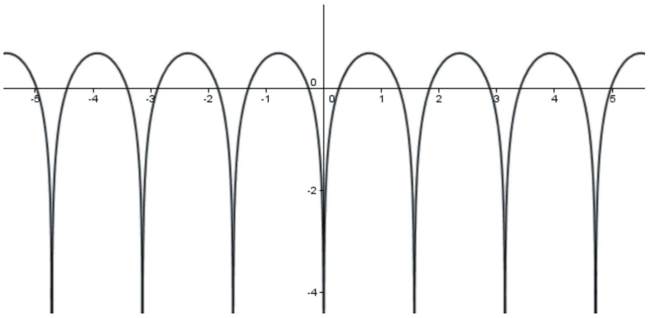
Lo anterior podría convencernos de que los resultados son correctos, ya que las derivadas de las funciones del miembro derecho son iguales al integrando. Probablemente no es una respuesta que nos deje satisfechos, pues quizá algunos deseen verificar que ciertamente cada resultado es transformable en cualquier otro. No es una tarea fácil, por el contrario, pueden presentarse algunas dificultades, pero ofrecen una magnífica oportunidad para revisar algunas relaciones trigonométricas y propiedades de los logaritmos. La transformación de un resultado en otro requiere del importante concepto de constante de integración, ya que los resultados, deberán ser funciones que difieren en una constante. En este momento aparece la constante de integración como un concepto relevante.



a) $\log(\cos x)+\log(\operatorname{sen} x)$
$2\log(\operatorname{sen} x)-\log(\tan x)$



b) $\log(|\operatorname{sen} 2x|)$



c) $\frac{1}{2}\log(2-2\cos(4x))$

Figura 1. Gráficas de los diferentes resultados: a) WolframAlpha y Derive, b) Teórico y c) ScientificWorkplace

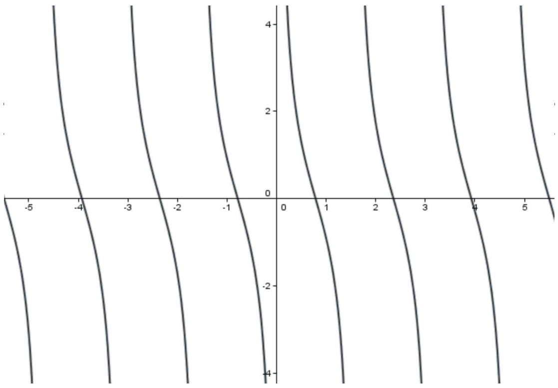


Figura 2. Gráfica de $\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x \cos x}$

Ahora veamos el problema de fondo: Los resultados obtenidos por los distintos programas nos ofrecen respuestas diferentes. Una manera de convencernos de estas diferencias es mediante las gráficas que los mismos programas nos proporcionan (ver Figura 1). Como podemos observar, la solución teórica es mejor que las de **WolframAlpha** y **Derive**, pues las respuestas de estos últimos no están definidas en el mismo dominio que el integrando (Figura 2). Por otra parte, **Scientific WorkPlace** ofrece una solución que difiere solamente en una constante.

2.2. Situación matemática II

Consideremos ahora el cálculo de

$$\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)} dx .$$

Un estudiante que ya ha adquirido un poco de experiencia con integrales inmediatas, podrá darse cuenta que la integral anterior es de este tipo, ya que puede escribirse en la forma

$$-\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx$$

Al realizar los cálculos de manera inmediata es posible llegar al siguiente resultado:

$$\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)} dx = -\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = -\log(u(x)) + C = -\log(\log(\cos x)) + C .$$

La respuesta que presentan **Derive** y **WolframAlpha** es la misma (Tabla 2).

CAS	Resultado
Derive	#5: $\int \frac{\mathrm{TAN(x)}}{\mathrm{LOG(COS(x))}} \mathrm{dx}$ #6: − LN(LN(COS(x)))
WolframAlpha	$\int \frac{\tan(x)}{\log(\cos(x))} dx = -\log(\log(\cos(x))) + \text{constant}$

Tabla 2.

Al parecer usan el mismo algoritmo y aparentemente todo está correcto, pero analizando cuidadosamente el integrando, observamos que está definido solamente cuando $0 < \cos x \le 1$ y además en este caso se tiene $\log(\cos x) \le 0$, así que no está definido $\log(\log(\cos x))$ en los números reales. Esto significa que es incorrecta la respuesta

$$\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)} dx = -\log(\log(\cos x)) + C .$$

Para precisar lo anterior, la función $u(x)=\log(\cos x)$ tiene por dominio un conjunto

$$I=\bigcup_{n\in \mathbb{Z}}\left(\frac{4n-1}{2}\pi,\frac{4n+1}{2}\pi\right)$$

(ver Figura 3). Pero lo más importante es que sus valores son negativos, por lo que la función $F(x)=-\log\left(\log\left(\cos x\right)\right)$ tiene por dominio el conjunto vacío.

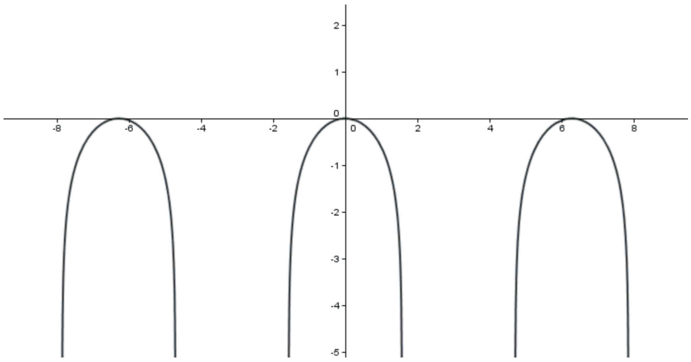


Figura 3. Gráfica de $u(x)=\log(\cos x)$

Por otra parte, la función $f(x)=\tan x/\log\left(\cos x\right)$ tiene por dominio la unión de intervalos de la forma

$$\left(\frac{4n-1}{2}\pi,\frac{4n+1}{2}\pi\right)$$

con excepción de los puntos $2n\pi$ (ver Figura 4). Es decir, el dominio de la función f es el conjunto

$$J=\bigcup_{n\in \mathbb{Z}}\left(\frac{4n-1}{2}\pi,\ 2n\pi\right)\cup\left(2n\pi,\ \frac{4n+1}{2}\pi\right).$$

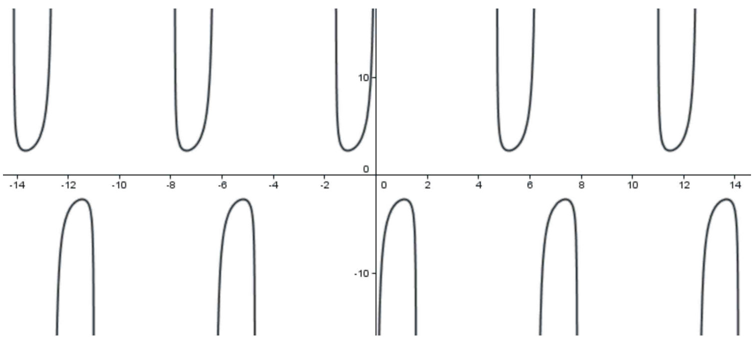


Figura 4. Gráfica de $f(x)=\dfrac{\tan x}{\log\left(\cos x\right)}$

La función f es continua en su dominio. Si se restringe a un intervalo cerrado $[a,b] \subset H$, el Teorema Fundamental afirma que existe una primitiva en dicho intervalo. El problema al cual nos podríamos enfrentar es el de poder expresar esa primitiva en términos de operaciones finitas de funciones elementales, es decir, es posible que la primitiva no sea elemental. Sin embargo, este no es el caso, porque podemos hallar una primitiva elemental, simplemente debemos utilizar de manera adecuada la expresión

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \log(u(x)) + C .$$

Es importante resaltar que la anterior expresión es válida cuando $u(x) > 0$. Para ser más precisos, debería escribirse de la siguiente manera

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \log|u(x)| + C$$

Considerando lo anterior, la respuesta a la que llegamos es la siguiente

$$\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)}dx = -\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = -\log|u(x)| + C = -\log|\log(\cos x)| + C$$

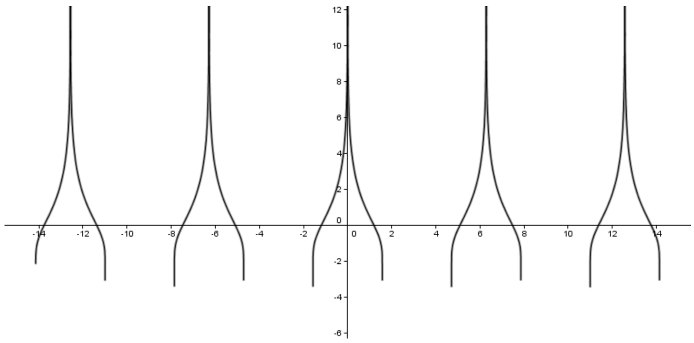


Figura 5. Gráfica de $-\log|\log(\cos x)|$

Como hemos observado, si se aplica un método para calcular primitivas de manera automática (usado como un algoritmo sin reflexión previa), podemos llegar a soluciones incorrectas. Además, en este caso, ni **Wolframalpha** ni **Derive** nos ofrecen una respuesta apropiada.

2.3. Situación matemática III

Otra situación interesante se presenta en el cálculo de primitivas de la forma $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$, donde $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es una función racional en las funciones seno y coseno.

Supongamos, por ejemplo, que deseamos calcular la integral definida

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos x}dx .$$

Para ello, es suficiente encontrar una primitiva del integrando y así hacer uso del Teorema Fundamental.

Usaremos el método de cambio de variable $u = \tan\frac{x}{2}$ (un método muy socorrido para este tipo de funciones, el cual suele encontrarse en diversos libros de Cálculo, ver por ejemplo: Granville, 1911, pp. 343-344; Hirst, 2006, pp. 195-196; Spivak, 1996, pp.531-532).

Con este método encontramos la "primitiva":

$$F(x) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right).$$

Por lo que, usando la segunda parte del Teorema Fundamental, tenemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos x}\,dx = F(2\pi) - F(0) = 0$$

ya que $\tan(2\pi) = \tan(0) = 0$ y $\arctan(0) = 0$.

Aquí surge un problema, debido a que el integrando es una función continua y positiva en el intervalo $[0, 2\pi]$, por lo que el valor de la integral debe ser positivo, lo cual es contradictorio al resultado obtenido (ver Figura 5). De hecho, el valor de la integral es

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

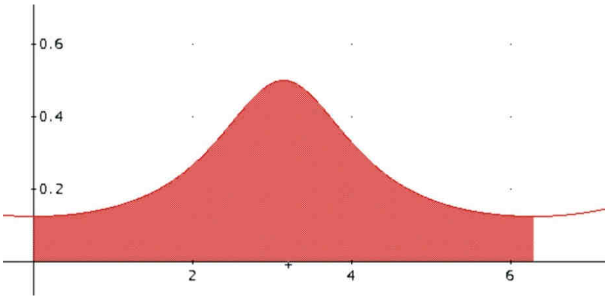


Figura 6. Área bajo el integrando

En este caso, la aparente contradicción se debe a que la "primitiva" F no está definida en los puntos de la forma $x = (2n+1)\pi$, con n un entero. En particular F no está definida en $\pi \in [0, 2\pi]$. Así que F no cumple con la condición $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in [0, 2\pi]$. Propiamente dicho, F **no es una primitiva** del integrando en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Podemos afirmar que F es una primitiva del integrando sólo si se restringe a ciertos intervalos cerrados, es decir, F es una primitiva en el intervalo cerrado $[a,b] \subset I$, donde

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left((2n-1)\pi, (2n+1)\pi \right).$$

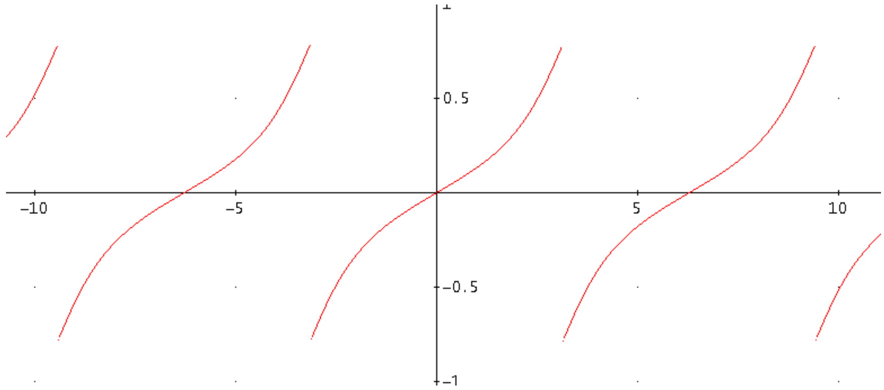


Figura 7. Gráfica de la función *F*

Ahora, utilicemos el CAS para calcular una primitiva. Por una parte, **WolframAlpha** nos muestra el siguiente resultado

$$\int \frac{1}{5+3\cos(x)}\, dx = -\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(2\cot\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \text{constant}$$

el cual tampoco nos sirve para evaluar la integral definida ya que la función

$$H(x) = -\frac{1}{2}\arctan\left(2\cot\frac{x}{2}\right)$$

no está definida en los puntos $x_1 = 2\pi$ y $x_2 = 0$. La función H no es una primitiva del integrando en el intervalo $[0, 2\pi]$.

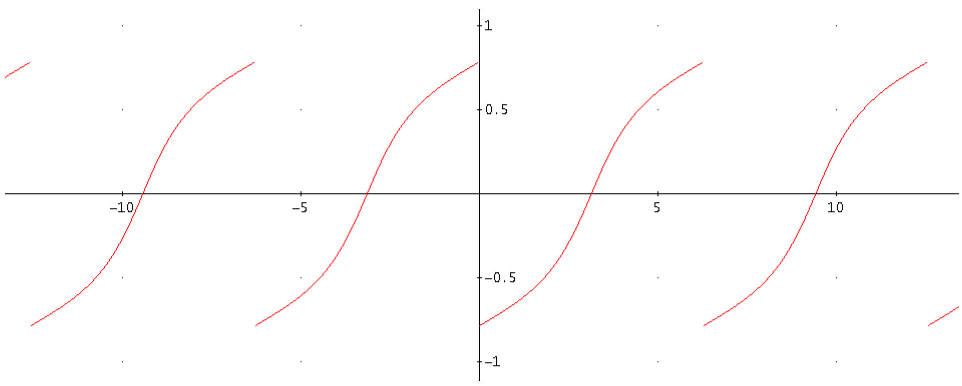


Figura 8. Gráfica de la función *H*

Observación 3: Es posible incurrir en una falsa creencia acerca de la continuidad de las funciones F y H (mencionadas anteriormente), debido a las gráficas que observamos en las Figuras 5 y 6. Como las gráficas están formadas por trozos, es posible pensar que estas funciones no son continuas. Sin embargo, esto no es así. Ambas funciones *son continuas* en sus dominios. No debemos olvidar que, en la definición de continuidad se consideran los elementos pertenecientes al dominio de la función (ver Apostol, 1998, pp 160-161 y Spivak, 1996, pp. 141-144). En este caso, es fácil ver que los dominios de F y H son

$$I=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left((2n-1)\pi,(2n+1)\pi\right) \text{ y } J=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(2n\pi,2(n+1)\pi\right),$$

respectivamente. Ciertamente, por ejemplo, si se definen las funciones F y H de la siguiente manera:

1. $F(x)=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right)$ para $x\neq(2n+1)\pi$ y $F(x)=0$ para $x=(2n+1)\pi$.
2. $H(x)=-\frac{1}{2}\arctan\left(2\cot\frac{x}{2}\right)$ para $x\neq 2(n+1)\pi$ y $H(x)=0$ para $x=2(n+1)\pi$.

Entonces, en este último caso, ambas tienen como dominio a $\mathbb{R}$ y además son discontinuas en los puntos $x=(2n+1)\pi$ y $x=2(n+1)\pi$, respectivamente.

Ahora continuemos con la búsqueda de una primitiva. Si utilizamos en esta ocasión **Derive,** este programa nos muestra lo siguiente:

#8: $$\int \frac{1}{5+3\cdot\mathrm{COS}(x)}\,dx$$

#9: $$\frac{x}{4}-\frac{\mathrm{ATAN}\left(\frac{\mathrm{SIN}(x)}{\mathrm{COS}(x)+3}\right)}{2}$$

Con este resultado, definimos la función $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ como

$$G(x)=\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+3}\right).$$

Esta función es una primitiva del integrando, la cual podemos utilizar para evaluar la integral definida ya que está definida en todos los reales y por lo tanto es posible aplicar el Teorema Fundamental:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\cos x}\,dx=G(2\pi)-G(0)=\frac{\pi}{2}$$

porque $G(2\pi)=\frac{\pi}{2}$ y $G(0)=0$.

Observación 4: Es posible utilizar la función

$$F(x)=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right)$$

para evaluar la integral definida en el intervalo $[0,2\pi]$ pero haciendo algunas consideraciones. Primero, utilicemos la propiedad aditiva de la integral para partirla en los intervalos $[0,\pi]$ y $[\pi,2\pi]$. Entonces tenemos

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\cos x}dx=\int_0^{\pi}\frac{1}{5+3\cos x}dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{5+3\cos x}dx.$$

Ahora, para poder evaluar las dos integrales definidas del lado derecho es necesario usar una versión, más general, de la segunda parte del Teorema Fundamental (Apostol, 1974, pp. 207-208):

Teorema 1: *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *una función continua y sea* $G:I\to\mathbb{R}$ *una función derivable tal que* $G'(x)=f(x)$ *para todo* $x\in I$, *con* I *un intervalo abierto o semiabierto. Entonces se cumplen los siguientes casos*

1. *Si* $I=(a,b)$ *y los límites* $G(a+)=\lim_{x\to a^+}G(x)$ *y* $G(b-)=\lim_{x\to b^-}G(x)$ *existen, entonces* $\int_a^b f(x)dx=G(b-)-G(a+)$.
2. *Si* $I=[a,b)$ *y el límite* $G(b-)=\lim_{x\to b^-}G(x)$ *existe, entonces* $\int_a^b f(x)dx=G(b-)-G(a)$.
3. *Si* $I=(a,b]$ *y el límite* $G(a+)=\lim_{x\to a^+}G(x)$ *existe, entonces* $\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a+)$.

De esta manera, debido a que

$$F'(x)=\frac{1}{5+3\cos x}$$

para todo $x\in[0,\pi)\cup(\pi,2\pi]$ y además los límites $F(\pi-)$ y $F(\pi+)$ existen, entonces, por los incisos 2 y 3 del **Teorema 1,** tenemos

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\cos x}dx=F(\pi-)-F(0)+F(2\pi)-F(\pi+)=\frac{\pi}{2}$$

ya que $F(0)=F(2\pi)=0$, $F(\pi-)=\dfrac{\pi}{4}$ y $F(\pi+)=-\dfrac{\pi}{4}$.

De la misma forma, la función

$$H(x)=-\frac{1}{2}\arctan\left(2\cot\frac{x}{2}\right)$$

se puede usar para evaluar la integral definida porque

$$H'(x)=\frac{1}{5+3\cos x}$$

para todo $x\in(0,2\pi)$ y los límites $H(2\pi-)$ y $H(0+)$ existen. Por lo tanto, por el inciso 1 del **Teorema 1**, tenemos

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\cos x}dx=H(2\pi-)-H(0+)=\frac{\pi}{2}$$

porque $H(2\pi-)=\dfrac{\pi}{4}$ y $H(0+)=-\dfrac{\pi}{4}$.

3. Comentarios finales

Mucho se ha escrito sobre el gran potencial que ofrece el uso de los CAS en el aprendizaje de las matemáticas, pero poco se escribe sobre la problemática que se crea cuando estos sistemas no generan los resultados esperados o presenta resultados aparentemente incorrectos. La existencia de estas situaciones tiene su parte positiva porque pueden aprovecharse como una oportunidad para profundizar en los contenidos matemáticos.

Los ejemplos aquí expuestos muestran situaciones interesantes en relación al cálculo de primitivas. En primera instancia, mostramos que en algunos casos los resultados del CAS no son apropiados, mientras que la teoría nos da mejores resultados (un hecho prácticamente obvio). En segundo lugar, las situaciones aquí presentadas dan pauta para considerar y analizar varios hechos importantes, por ejemplo: 1) no siempre existe primitiva de una función a pesar de que esta sea integrable (en el sentido de Riemann); 2) no siempre existe una fórmula para expresar una primitiva de una función con operaciones finitas de funciones elementales y 3) no siempre se pone atención a los dominios de las primitivas.

Por último, en la tercera situación, hemos observado que al usar la teoría nos encontramos con un resultado inadecuado mientras que, usando la tecnología (en este caso **Derive**), obtenemos un resultado mucho mejor el cual podemos utilizar para calcular una integral definida. El uso del CAS hace que surja una problemática antigua existente pero que no está explícita en los libros de Cálculo: *el método de integración que se refiere al clásico cambio de variable* $u=\tan x/2$ *no es válido para ciertos intervalos*. El problema radica en que nos proporciona una función (aparentemente una primitiva) que no está definida en el mismo intervalo del integrando y por esta razón resulta **no ser**

una primitiva y este hecho puede ser usado para analizar las condiciones necesarias para aplicar el *Teorema de Cambio de Variables*. Esta revelación solamente es una de varias que pueden presentarse mientras se estudia matemáticas con el uso del CAS.

Bibliografía

Apostol, T. M. (1974). *Análisis Matemático: Introducción Moderna al Cálculo Superior*. España: Editorial Reverté.

Apostol, T. M. (1998). *Calculus.* Vol. I. México: Editorial Reverté.

Camacho, M. (2005). La enseñanza y aprendizaje del análisis matemático haciendo uso de CAS (computer algebra system). En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática: Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*. 97-110.

Granville, W. A. (1911). *Elements of the Differential and Integral Calculus.* Ginn and Company. USA.

Hirst, K. E. (2006). *Calculus of one variable.* Springer-Verlag London Limited.

Lagrange, J. (2005). Transposing computer tools from the mathematical sciences into teaching. In D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators.* New York: Springer, 67-82.

Spivak, M. (1996). *Cálculo infinitesimal.* México: Editorial Reverté.

Juan Carlos Ponce Campuzano, Estudiante de Doctorado en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Antonio Rivera Figueroa, Investigador Titular del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.