Tecnología

Escrito por David Martín de Diego

jueves, 14 de abril de 2005
Recibido: lunes, 28 febrero 2005

---

tecnología ::
matematicalia
revista digital de divulgación matemática
Vol. 1, no. 1 (abr. 2005)

Buscando lo óptimo: de la reina Dido a la carrera espacial

David Martín de Diego
Departamento de Matemáticas
Instituto de Matemáticas y Física Fundamental
Consejo Superior de Investigaciones Científicas
e-mail: d.martin @ imaff.cfmac.csic.es
página web: http://www.imaff.csic.es/mat/david/index.htm

Introducción

En este artículo nos detendremos en uno de los más fascinantes problemas de las matemáticas: la *búsqueda de lo óptimo*. Observaremos que en los procesos naturales, así como en los elementos fabricados usando la más moderna tecnología, aparece un principio común: la optimalidad de su diseño.

La rama de las matemáticas que estudia estas formas optimales es el *cálculo de variaciones*. Nos centraremos en problemas fundamentales, llenos de una rica historia, que dieron inicio a esta bella teoría matemática. Desde el *problema isoperimétrico*, a la solución detallada del problema de la *braquistócrona* (examinando, por ejemplo, en detalle, la maravillosa demostración dada por Johann Bernoulli), que posteriormente dio lugar a la formalización del cálculo de variaciones de Euler y al maravilloso e intrincado mundo de las películas de jabón o *superficies minimales*).

Para terminar por este paseo, nos situaremos en tiempos más recientes, en los que ya no nos bastará con observar las leyes de la Naturaleza, sino que ahora pretenderemos modificarlas. Aparecen así la *teoría del control* y la *teoría del control óptimo*. Nuestros vehículos, tripulados o no, requieren un control si queremos que sigan un comportamiento adecuado o una planificación prefijada. En el caso de un vehículo con ruedas los controles nos permiten frenarlo, acelerarlo, llevarlo por la dirección requerida... Estos controles se activan manualmente, por radio control o automáticamente, o los diseña nuestro sistema (vía feedback). Pueden actuar llevando nuestro sistema de un punto a otro o evitando desviaciones de la trayectoria que queremos seguir. En muchos casos el sistema es inestable y necesitamos introducir controles para evitar grandes perturbaciones del mismo. La aplicación no se reduce a problemas de mecánica, sino que tiene un ámbito mayor: teorías del crecimiento económico, ecología, planificación comercial, medicina, robótica...

La Naturaleza ya optimizaba

Es frecuente observar en la Naturaleza, tanto a su nivel macroscópico como microscópico, maravillosas y bellas configuraciones y construcciones, la mayor parte de ellas basadas en la simetría y/o en la optimalidad de su diseño. Estas configuraciones aparecen, por ejemplo, en el movimiento de los cuerpos celestes, en las agrupaciones de organismos microscópicos en maravillosas colonias de simetría esférica (esta simetría se podría justificar en términos de principios óptimos, pues la esfera es la superficie que a igual volumen requiere menos área superficial?) Esta sorprendente simetría llegó a fascinar a los antiguos griegos, llegando al extremo, como Jenófanes en el año 500 a.C., de proponer un dios esférico, eliminando así todos los antiguos dioses de la mitología griega (ideas que posteriormente fueron recogidas por Aristóteles).

Figura 1. Cuerpos celestes.

El problema isoperimétrico

En la *Eneida* de Virgilio encontramos una referencia a una interesante propiedad optimal de la circunferencia. La historia, eliminando su belleza poética, es la siguiente:

> En el siglo IX antes de Cristo, huyendo la princesa fenicia Dido de su hermano Pigmalión, que había asesinado a su marido, llega a las tierras del Norte de África (Túnez) donde alcanza un acuerdo con sus habitantes. Al querer la princesa Dido comprar tierra para establecerse con su pueblo, el rey de aquellas gentes solamente le consiente comprar la parcela de tierra que pueda ser cubierta por la piel de un toro. Dido cortó la piel en finas tiras formando una larga cuerda (de unos 1000 ó 2000 metros) y la dispuso de manera que cubriese la mayor parte de terreno posible?

¡Éste es el problema que nos interesa!

Dido resolvió el siguiente problema: ?Encontrar, entre todas las curvas cerradas de longitud fijada, aquella que delimita la superficie más grande?.

Su solución es obvia: la **circunferencia**, pero la demostración completa de esta propiedad necesitó siglos de esfuerzo matemático.

Dejando un poco aparte la leyenda, vamos a pasar a reflexionar algo sobre el problema isoperimétrico y su rica y fructífera historia. Este problema está unido a otro, tan o más antiguo que el problema isoperimétrico: ¿cuál es la curva de longitud mínima uniendo dos puntos fijados del plano? La respuesta a ambos es obvia, pero no tan fácil es dar una demostración rigurosa (siglo XIX para el isoperimétrico y siglo XVIII para el geodésico).

La relación entre área y perímetro causó algunas confusiones en tiempos de los griegos. Por ejemplo, buscaban conocer el área de una isla por medio de la duración de un circuito de barco a lo largo de la costa.

Figura 2. La reina Dido.

También *Polibio* (Megalópolis 208 a.C. - 126 a.C.) relataba esta confusión en sus *Historias*, donde contaba la sorpresa que producía a eminentes políticos y altos mandos del ejército, que, por ejemplo, la ciudad de Megalópolis tuviese 50 estadios de perímetro, mientras Esparta solamente 48 y, sin embargo, Esparta fuese dos veces más grande que Megalópolis.

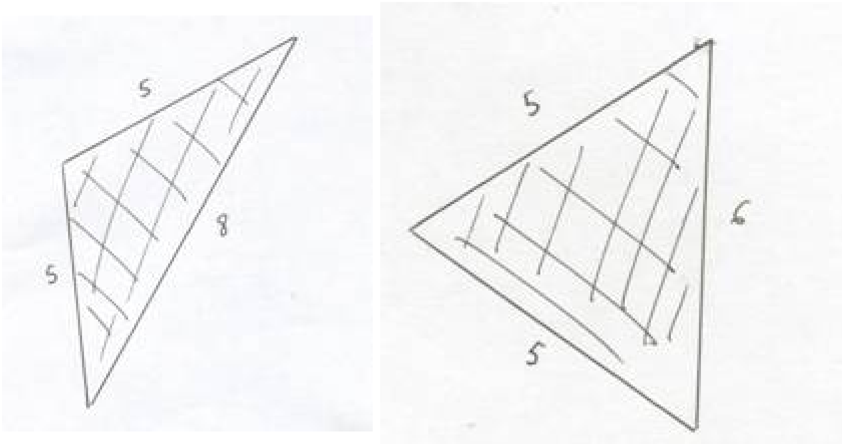

Figura 3. El ejemplo de Proclo.

Proclo ya observa esta propiedad, y pone un ejemplo interesante de dos triángulos isósceles, uno con lados 5, 5 y 6 y otro con lados 5, 5 y 8, que tienen distinto perímetro.

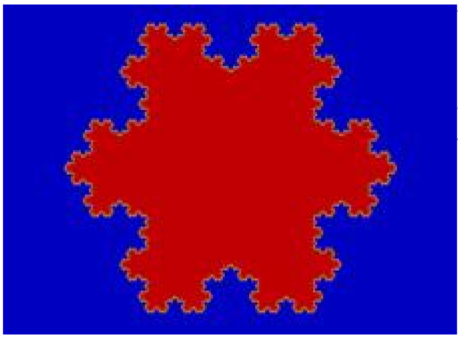

Figura 4. Curva de Koch.

Yendo más allá, el matemático sueco *Helge von Koch* (1870-1924) encontró una curva, llamada curva de Koch o *copo de nieve de Koch*, que tiene longitud infinita pero área finita, al ? vivir? en una región acotada del plano. Se comienza con un triángulo equilátero, con lados de longitud 1 y en la primera iteración, dividiendo en tres cada lado, se reemplaza la parte de en medio por los dos lados de un triángulo equilátero de lados ahora 1/3. Este proceso se itera hasta el infinito.

Para ver que el perímetro es infinito basta observar que en la iteración tenemos:

y, por tanto, su perímetro será

Una de las aproximaciones más interesantes a la solución del problema isoperimétrico fue dada por Jacob Steiner en 1841, pero en su demostración suponía que existía solución al problema (véase que esta suposición puede llevar a errores, como por ejemplo, en el problema de Kakeya). No fue hasta que se emplearon herramientas analíticas cuando se encontró una solución completa del problema.

La Helena de la Geometría

Muchos hemos visto una película de reciente estreno titulada *Troya*. Las motivaciones para verla pueden ser diferentes: la belleza de los actores y actrices (muchos), el brillante espectáculo (algunos), o conocer la historia de la guerra de Troya (unos pocos). Los que ya habían leído la *Ilíada* de Homero, después de ver la película habrán llorado amargamente. Pero no hemos venido aquí a hacer una crítica de cine; estamos interesados en *Helena*, la bella mujer causante de la guerra de Troya. Destacamos estas dos facetas, una maravillosa belleza y, también, la causa de muchos conflictos. La *Helena* sobre la que queremos hablar no es una mujer, pero, al igual que su tocaya, es bella y causante de muchos *líos*.

Figura 5. Helena de Troya.

¿Pero, entonces, quién o qué es esta nueva *Helena*?

Nuestra *Helena* es una **curva**.

¿Cómo se construye la curva que hemos llamado la *Helena de la Geometría*? La *Helena de la Geometría* es una curva que se llama la **cicloide**. Es muy fácil entender cómo se construye. Imagina la cubierta de la rueda de una bicicleta y pinta sobre ella un punto de color rojo de modo que la veas bien de lado. Este punto rojo describirá una curva a medida que la bicicleta se mueve por una carretera recta. La curva que va trazando es la que llamamos la **cicloide**.

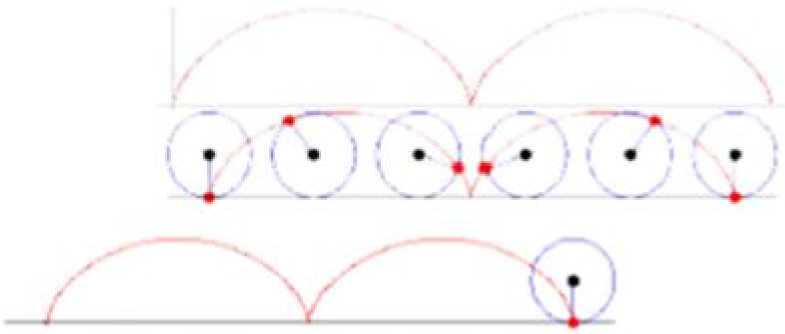

Figura 6. Trazado de la cicloide.

La **cicloide** tiene un montón de propiedades bellísimas que a muchos nos han sorprendido cuando las hemos descubierto y nos han llevado a amar las matemáticas. Además, no es descabellado decir que la **cicloide** está detrás de desarrollos que han dado lugar a descubrimientos científicos que nos han llevado a nuestra actual sociedad tecnológica. ¿Por qué la llamamos *Helena*? La belleza ya empezamos a descubrirla, pero, además, provocó tremendas disputas entre matemáticos?, peleas de celos por la prioridad de tal o cual propiedad de la cicloide, acusaciones de plagio?

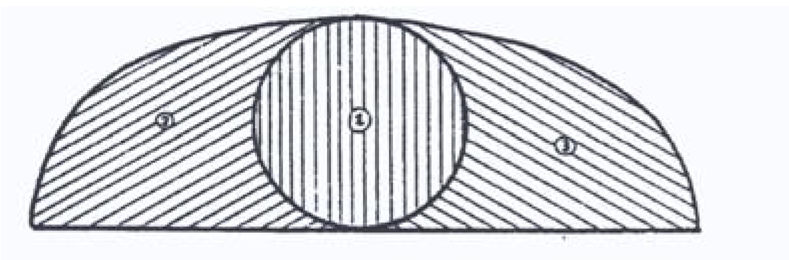

Figura 7. El problema de Galileo.

Galileo Galilei (1564-1642) fue uno de los primeros que se interesó en esta curva. Una de las preguntas que se planteó era relacionar el área o superficie cubierta por un arco de cicloide con el área del círculo que está rodando. Construyó figuras de madera y las cortó, después las pesó y obtuvo un valor próximo a 3. Dado que de la circunferencia surge uno de los número más bellos de las matemáticas, el número (este número da la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro), Galileo supuso que la relación entre el área de la cicloide y del círculo debía ser . Pero se equivocó: un poco más tarde, Roberval y Torricelli demostraron que la relación es exactamente 3. Todo ello, por supuesto, entre disputas entre Roberval y Torricelli sobre quién había encontrado la demostración primero y mutuas acusaciones de plagio.

Otro matemático, Pascal, durante un terrible dolor de muelas y desesperado al no poder aguantarlo más, para no pensar en su dolencia se puso a meditar sobre nuestra Helena, la cicloide. Como por arte de magia, el dolor remitió y Pascal lo tomó como una señal y se dedicó con furia a estudiar las propiedades de la cicloide. Todo ello le llevó a escribir un libro titulado *Historia de la cicloide*. Por supuesto, que nadie tome esto como un alegato contra la higiene dental: ha habido más matemáticos que han hecho descubrimientos sin dolor de muelas que con dolor. Así que lavémonos los dientes tres veces al día, por lo menos.

Otra interesante propiedad, que se debe a Huyghens (Figura 8), es la *tautocronía* de la cicloide; es decir, si ponemos una cicloide vertical y colocamos dos canicas con la misma masa en ella, a diferentes alturas, entonces las dos llegan al punto más bajo al mismo tiempo. Esta propiedad le permitió a Huyghens mejorar la construcción y diseño de relojes.

Figura 8. C. Huyghens.

Figura 9. Comprobación experimental de la solución al problema de la braquistócrona.

La importancia de la cicloide y por lo que se ganó con justa fama el nombre de Helena, fue en el estudio de la curva de más rápido descenso o, como se conoce en el mundo científico, la búsqueda de la *braquistócrona.* Así de provocativamente se dirigió uno de los más famosos matemáticos del mundo para ver quién era capaz de resolver el problema siguiente: *Dados dos puntos y en un plano vertical, hallar la curva trazada por un punto bajo la única acción de la gravedad, que empieza en y alcanza en el mínimo tiempo.*

> Yo, Johann Bernoulli, me dirijo a los matemáticos más brillantes del mundo. Nada es más atractivo para las personas inteligentes que un problema honesto y estimulante, cuya solución dará fama y permanecerá como un monumento eterno para la posteridad. Siguiendo el ejemplo dado por Pascal, Fermat, etc. espero ganar la gratitud de toda la comunidad científica planteando a los más sagaces matemáticos de nuestro tiempo un problema que pondrá a prueba sus métodos y la fortaleza de su intelecto. Si alguno me comunica la solución del problema propuesto, le declararé públicamente digno de fama?

El problema solamente pudo ser resuelto por algunos de los principales científicos de la época, en particular, por Newton, Leibniz y los hermanos Johann y Jacob Bernoulli; en definitiva, por aquellos que disponían de una nueva herramienta matemática que surgió en aquella época: el **Cálculo Diferencial.** Podemos decir sin exagerar que con la aparición del Cálculo Diferencial se abrió el camino que nos ha llevado a nuestra actual sociedad tecnológica. La autoría del Cálculo Diferencial se atribuye conjuntamente a Newton y a Leibniz; pero claro, siendo uno inglés y otro alemán, hay quienes conceden la autoría a uno u otro, aunque todos se acusan de plagio. También, en esta enconada pelea, se encuentra nuestra Helena, pues la solución del problema de la braquistócrona es la cicloide. En un artículo de Leibniz, éste señala que solamente los que conocían el nuevo cálculo, que él había inventado, estaban capacitados para resolver el problema de la braquistócrona. Obviamente, esta información hacía pasar a Newton como un discípulo de Leibniz y, por supuesto, los ingleses no lo consintieron y acusaron formalmente de plagio a Leibniz, formándose un tremendo lío que todavía dura. Y nuestra Helena, en medio de todo?

Solución de Johann Bernoulli

A continuación vamos a analizar, sin entrar en muchos detalles, la demostración dada por Johann Bernoulli, al encontrarse en ella reunidas una maravillosa combinación de belleza matemática y una magnífica intuición física.

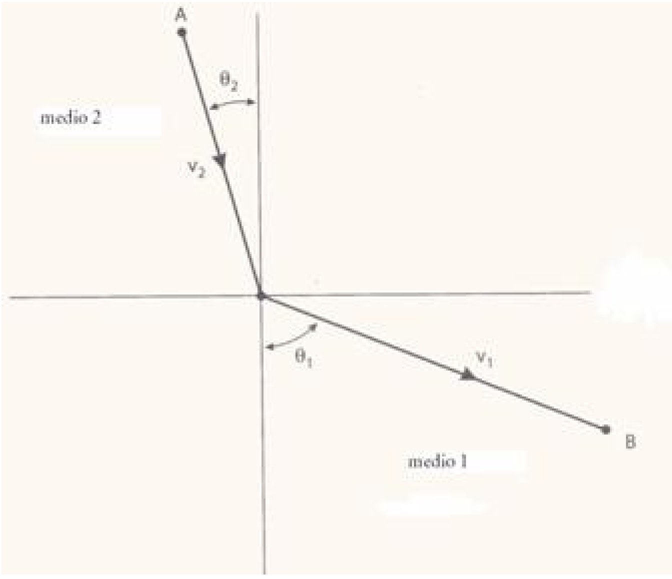

Figura 10. Ley de Snell.

Bernoulli conocía la ley de refracción de la luz (Ley de Snell), que indicaba que durante el proceso de refracción de la luz entre diferentes medios la razón entre los senos de los ángulos formados se mantiene constante. Este principio, justificado por Fermat en su principio del tiempo mínimo, señala que la razón entre los senos era equivalente a la razón entre la velocidad de la luz en los diferentes medios; es decir,

También Bernoulli conocía que la velocidad de caída de un cuerpo es proporcional a la raíz cuadrada de la distancia desde donde cae (Ley de Galileo). Así, la velocidad tras metros de caída es .

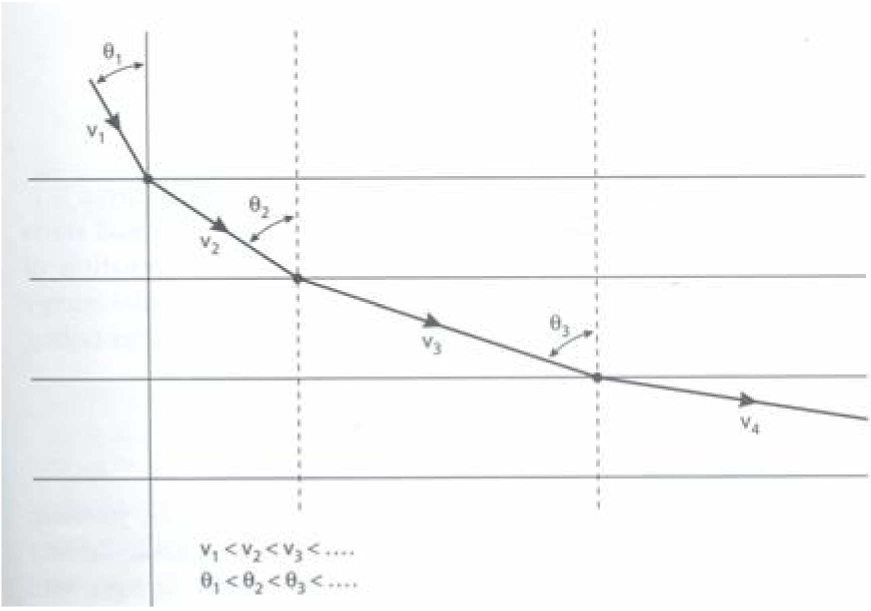

Figura 11.

Asumiendo ahora que el plano vertical está compuesto por capas de grosor infinitesimal con densidades variables, Bernoulli identifica el problema de la curva de mínimo tiempo de descenso con el problema equivalente de encontrar la trayectoria que seguiría un rayo de luz con dirección cambiante al pasar de una capa a otra aplicando la ley de Snell (Figura 11). Infinitesimalmente, estamos diciendo que la curva buscada verificará que, en todo punto, el seno del ángulo entre la tangente a la curva y el eje vertical será proporcional a la velocidad. Matemáticamente,

y así

lo que lleva finalmente a una ecuación diferencial: , cuya solución es la cicloide.

Basta de observar. ¡También queremos optimizar nosotros!

En esta sección nos centraremos más en detalle en técnicas matemáticas que nos permiten acercarnos a lo más ?beneficioso? para nosotros: aquello que nos permita llegar en mínimo tiempo, nos resulte más barato, consuma menos combustible, más saludable... En este caso elegiremos entre los controles disponibles admisibles (si éstos existen) aquél o aquéllos que minimicen o maximicen una cierta función (o funcional) de coste. En definitiva, debemos utilizar el control que consideremos más óptimo. Aquí nos detendremos en algunos ejemplos sencillos de aplicación en ámbitos muy diferentes: ecología, medicina, robótica, control de un vehículo lunar, economía... para, de este modo, señalar la omnipresencia de la teoría del control en todos los ámbitos de la ciencia.

Leibniz utilizó la palabra óptimo basándose en la palabra latina ?óptimus?, que significa ?lo mejor?. La palabra latina deriva del nombre de la diosa romana *Ops*, diosa de la abundancia agrícola (de su nombre se deriva la palabra *opulencia*, *operaciones*, *operador*...). La teoría del control óptimo surgió ante la dificultad que se encontró para aplicar el cálculo de variaciones tradicional cuando los controles están restringidos a tomar valores en un cierto conjunto (incluso cerrado) y se les permite ser funciones continuas a trozos. La culminación de la nueva teoría la lograron Pontryaguin y sus colaboradores a finales de los años cincuenta del siglo XX.

Los elementos que intervienen en la descripción formal de un problema de control son:

- El **tiempo**. Medido continuamente en los modelos que vamos a estudiar. Se suele definir en un intervalo que abarca desde un tiempo inicial hasta un tiempo final no siempre conocido.
- Las **variables de estado**. Son números reales que caracterizan el estado del sistema en el intervalo temporal:

.

- Las **variables de control** o **inputs**. Son números reales que caracterizan las elecciones o decisiones que se pueden hacer y llevan el estado desde una condición inicial a una condición final:

.

- Las **variables observables** u **outputs**. Frecuentemente, no van a ser conocidas las variables de estado sino ciertas relaciones entre ellas y las variables de control:

.

- Ecuaciones del sistema de control. Son un conjunto de ecuaciones diferenciales que caracterizan la evolución en el tiempo (trayectoria) de las variables de estado:

para cada .

- Y, un funcional que hay que minimizar o maximizar entre todas las trayectorias admisibles (aquellas que verifican el sistema de ecuaciones anteriores) fijados un tiempo inicial y :

ó .

Algunos ejemplos

Llegada óptima a una posición fijada

En el proceso de fabricación de microchips es frecuente encontrarse con el problema de llevar un objeto diminuto de una posición a otra. Obviamente, esto no puede hacerse con las manos ni con herramientas usuales; es necesario utilizar pequeños chorros de aire, campos magnéticos, eléctricos...

Consideremos el problema de llevar un objeto en una línea (eje de abscisas , por ejemplo). Como sabemos el estado del sistema está determinado por la posición y la velocidad del objeto, por eso introducimos una nueva variable representando la velocidad; constituyen las variables del sistema. La fuerza es la magnitud controlable y la designaremos por la variable . Como función de coste consideramos el problema de minimizar el tiempo (también podríamos considerar el gasto energético). La formulación matemática de este problema es la siguiente:

Las ecuaciones de estado ligando las variables de estado con los controles son:

Para que el problema sea realista supongamos que la variable de control está acotada entre y :

El tiempo inicial puede ser 0 y el tiempo de llegada debe ser minimizado:

con El coste a minimizar es

Tratamiento de la diabetes

De un modo simplificado, la cantidad de glucosa en la sangre es controlada por la presencia de insulina producida por el páncreas. La insulina hace que el exceso de glucosa se deposite en el hígado. Tras la ingestión de glucosa en la comida, el paciente sano aumenta el nivel de insulina en la sangre. La insulina degenera tras un proceso metabólico y, por tanto, es necesario producir más cantidad. Una falta de respuesta adecuada del páncreas a las necesidades de insulina en la sangre puede provocar consecuencias fatales. Si el mecanismo natural falla es necesario inyectar ciertas cantidades de insulina en el flujo sanguíneo. La formulación matemática del problema es la siguiente:

Si denotamos las cantidades de glucosa e insulina a tiempo T por $G(t)$ e $H(t)$, respectivamente; entonces

$$\begin{aligned}\dot{G}(t) &= F_1(G(t),H(t))+P(t)\\ \dot{H}(t) &= F_2(G(t),H(t))+U(t)\end{aligned}$$

donde $P(t)$ denota la tasa de crecimiento de la glucosa debido a ingestión de alimentos y $U(t)$ la tasa de crecimiento de la insulina al ser inyectada. Las variables que controlamos son $P(t)$ (normalmente dieta) y $U(t)$ (medicación).

Supongamos que el estado saludables se alcanza en los valores G_0 e H_0. Tomando las nuevas variables describiendo las desviaciones del estado de salud:

$$g(t)=G(t)-G_0, \quad h(t)=H(t)-H_0$$

tenemos que linealizando las ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned}\dot{g} &= -c_1 g - c_2 h + p\\ \dot{h} &= -c_3 g + c_4 h + u\end{aligned}$$

con $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}_+$. En situaciones patológicas c_4 se reduce mucho o es igual a cero. Podemos suponer que $p(t) \equiv 0$. Las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned}g(0)=g_0, &\quad h(0)=h_0\\ g(T)=0, &\quad h(T)=0\end{aligned}$$

Solamente queda definir una función de coste para tener bien formulado un problema de control óptimo. Queremos reducir rapidamente el exceso de glucosa en la sangre, así como la cantidad de insulina inyectada por consideraciones monetarias y puesto que no es deseable un exceso de insulina en sangre. Se puede proponer la siguiente función:

$$J=\int_0^T \frac{1}{2}(g^2+k^2u^2)\,dt$$

donde k^2 distingue el peso que queramos dar a cada uno de los sumandos en la integral.

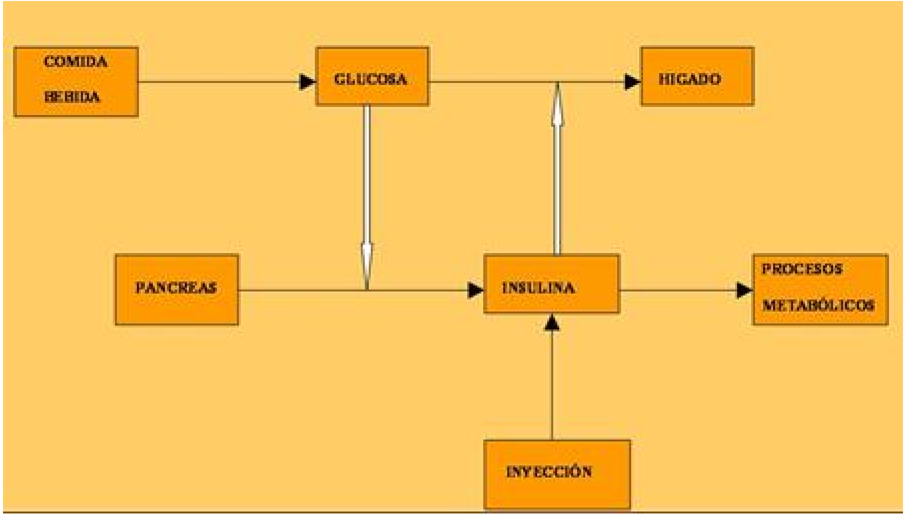

Figura 12. Metabolismo de la glucosa en el paciente diabético.

Aterrizaje en la Luna

La teoría de control y control óptimo se usó extensivamente en la planificación del aterrizaje de un módulo espacial en la superficie de la Luna en las misiones realizadas en 1966. En este caso, en vez de minimizar el tiempo es más importante encontrar la manera de minimizar el gasto de combustible. Por supuesto, se quiere realizar un aterrizaje ?suave? en la superficie del satélite; es decir, se desea llegar a la superficie con velocidad cero.

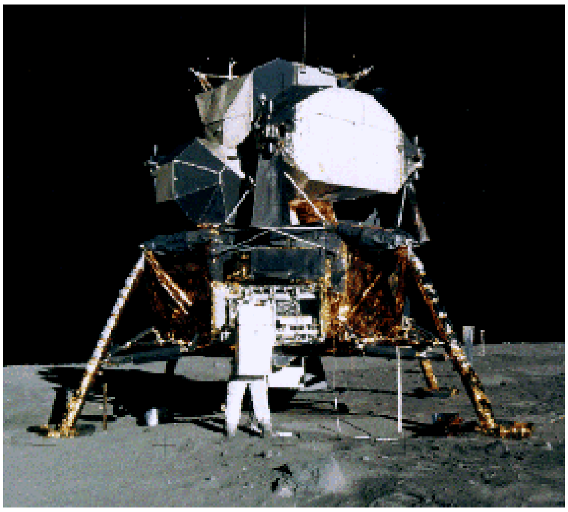

Figura 13. Módulo lunar.

Conclusión

Con este breve paseo matemático por el concepto de optimalidad se ha pretendido acercar al lector la belleza de estos problemas y su importancia, tanto histórica como en sus aplicaciones, no sólo en las matemáticas sino en todas las ciencias. Por supuesto, para una aproximación con más rigor se recomienda un nuevo paseo por la bibliografía reseñada.

Referencias

M. de Guzmán: *Construcciones geométricas con materiales diversos*,
http://usuarios.bitmailer.com/edeguzman/GeometLab/indice.htm

S. Hildebrandt, A. Tromba: *Mathématiques et formes optimales.* Pour la Science, Berlin, 1986.

L.M. Hocking: *Optimal control: An introduction to the theory with applications.* Clarendon Press, Oxford, 2001.

D.G. Hull: *Optimal control theory for applications.* Mechanical Engineering Series, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

P. Kunkel: *Whistler Alley Mathematics,* http://whistleralley.com/math.htm

P.J. Nahim: *When least is best.* Princeton University Press, Princeton, 2004.

C.R. Nave: *HyperPhysics,* http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hph.html

C. Sánchez Fernández, C. Valdés Castro: *De los Bernoulli a los Bourbaki, una historia del arte y la ciencia del cálculo.* Nivola, Madrid, 2004.

Differential Geometry web site in memory of Professor Alfred Gray, http://math.cl.uh.edu/~gray

La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, http://www.rsme.es/gacetadigital

Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles, http://www.cut-the-knot.org

The MacTutor History of Mathematics archive, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history

Mathworld, http://mathworld.wolfram.com

Sobre el autor

David Martín de Diego es autor de treinta y seis artículos en revistas internacionales recogidas en el *Journal Citation Reports* del *Science Citation Index* y de trece publicaciones en actas de congreso (con evaluador). Ha sido conferenciante invitado en congresos internacionales en seis ocasiones. Ha participado en cuatro proyectos de investigación nacionales y tres internacionales. Es Codirector de *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*. Entre sus principales líneas de investigación se encuentran las teorías de control óptimo y sus aplicaciones a la economía.