NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas
Volumen 41, marzo de 2000, páginas 13-21

Cuadrados mágicos perfectos (orden impar no múltiplo de tres)

Florencio Brook Jiménez

Hace años, de una forma casual, se despertó en mí la afición por los cuadrados mágicos.

Después de una primera fase en la que me interesé por algunos cuadrados mágicos normales propuestos por conocidos matemáticos buscando métodos alternativos para su construcción, de los que podríamos hablar en otro momento, decidí dedicarme a la búsqueda de los cuadrados mágicos perfectos de lado múltiplo de cuatro, de los de lado impar no múltiplo de tres, y de los algoritmos que permitieran hacerlos tan grandes como se desee y con la mayor facilidad posible.

En las Jornadas Matemáticas celebradas en Castellón en marzo del 91 tuve la oportunidad de exponer parte de mis investigaciones en este tema, incluyendo a título de curiosidad un cuadrado mágico perfecto de 40 000 números (200 x 200), cuyo mayor mérito, a mi modo de ver, estriba en el tiempo que tardé en confeccionarlo (28 horas), ya que cuando se conoce el algoritmo adecuado ni su construcción ni su tamaño ofrecen dificultades apreciables.

Dicho lo anterior como somera introducción, ampliable en otro momento, permítaseme entrar en el tema que nos habíamos propuesto al iniciar este escrito.

Cuadrado mágico perfecto de lado impar no múltiplo de tres

Hemos utilizado en varias ocasiones la expresión “cuadrado mágico perfecto” sin haberlo definido aún, por lo que subsanaremos esta omisión diciendo que cuadrado mágico perfecto es aquel que, cumpliendo las condiciones de un cuadrado mágico normal en los que tanto las filas como las columnas y las diagonales principales dan la misma suma (o producto en su caso), también se verifica el mismo resultado en sus diagonales complementarias.

Llamamos diagonales complementarias a las líneas que en sentido diagonal, paralelo por tanto a las diagonales principales, unen por arriba y por debajo de éstas un número de celdas o casillas igual a las de una fila, columna o diagonal principal.

Ejemplos de diagonales complementarias

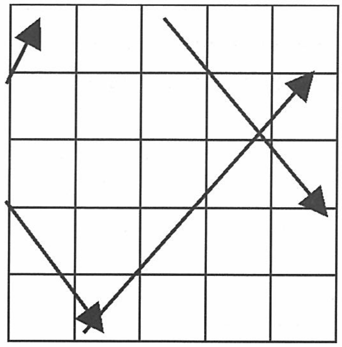


Fig. 1

El primer cuadrado mágico perfecto posible de lado impar no múltiplo de tres es el de 5 x 5 que es el que vamos a utilizar como modelo.

La serie empleada será la aritmética del 1 al 25.

Podemos adelantar que la serie puede formarse con cualquier clase de números: enteros, fraccionarios, irracionales, positivos, negativos, etc., incluso puede estar constituida por tantas miniseries como filas tenga el cuadrado con la única condición de que la "distancia" entre ellas sea la misma, por ej.: 2 - 4 - 6 - 8 - 10; 15 - 17 - 19 - 21 - 23; 28 - 30 - 32 - 34 - 36..., etc. cuya distancia entre una y otra es 5.

Una vez escrita la serie en la cuadrícula correspondiente puede cambiarse el orden de una o más filas, o columnas, o filas y columnas al mismo tiempo, lo que daría 5! al cuadrado combinaciones diferentes (14 400).

Un ejemplo podría aclarar esto último que se ha dicho. Coloquemos la serie del 1 al 25 en una cuadrícula de 5 x 5

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Fig. 2. Serie sin modificar (a_1)

Cambiamos la primera columna al cuarto lugar, la segunda al primero, la quinta al tercero, la cuarta al segundo y la tercera al quinto; trasladamos la primera fila al tercer lugar, la quinta al primero, la tercera al quinto dejando la segunda y la cuarta en su sitio, con lo cual resulta la siguiente serie

22	24	25	21	23
7	9	10	6	8
2	4	5	1	3
17	19	20	16	18
12	14	15	11	13

Fig. 3. Serie modificada

Aplicando cualquiera de las variantes del algoritmo que presentaremos más adelante, obtenemos un cuadrado mágico perfecto de ambas series.

5	6	12	18	24
17	23	4	10	11
9	15	16	22	3
21	2	8	14	20
13	19	25	1	7

23	7	4	20	11
19	15	21	8	2
6	3	17	14	25
12	24	10	1	18
5	16	13	22	9

Fig. 4

Sumando las filas, columnas y diagonales principales vemos que el resultado en todas ellas es el mismo (65).

Para que este cuadrado pueda considerarse perfecto, como hemos dicho anteriormente, también deben sumar 65 las diagonales complementarias, comprobémoslo

5	+	19	+	8	+	22	+	11	=	65	23	+	16	+	10	+	14	+	2	=	65
17	+	6	+	25	+	14	+	3	=	65	19	+	7	+	13	+	1	+	25	=	65
9	+	23	+	12	+	1	+	20	=	65	6	+	15	+	4	+	22	+	18	=	65
21	+	15	+	4	+	18	+	7	=	65	12	+	3	+	21	+	20	+	9	=	65
13	+	2	+	16	+	10	+	24	=	65	5	+	24	+	17	+	8	+	11	=	65

Con lo cual queda demostrado que de ambas series podemos obtener un cuadrado mágico perfecto.

Vamos, por fin, a presentar el algoritmo básico y todas sus variantes para la construcción de estos cuadrados mágicos perfectos y que aparecen en las figuras de la a_1 a la b_4.

En la figura 2 las casillas de la primera fila están numeradas del 1 al 5 (en este caso) de izquierda a derecha, y en este orden se van formando las series de 5 elementos, en las que el elemento inicial de cada una de ellas es el número que aparezca en estas casillas y los siguientes elementos, hasta completar cinco son los que vayan apareciendo en la dirección de las flechas.

Para mayor comprensión veamos un ejemplo.

Serie formada por los veinticinco primeros números pares

2	4	6	8	10
12	14	16	18	20
22	24	26	28	30
32	34	36	38	40
42	44	46	48	50

Fig. 5

Vamos a llamar cabeza de serie a los números 10, 8, 6, 4 y 2. Las series que se forman siguiendo lo anteriormente dicho son

10 - 12 - 24 - 36 - 48

8 - 20 - 22 - 34 - 46

6 - 18 - 30 - 32 - 44

4 - 16 - 28 - 40 - 42

2 - 14 - 26 - 38 - 50

Estas series se colocan en un nuevo casillero, de manera que los cabeza de serie ocupen los lugares que indicamos con una X (obsérvese la disposición en salto de caballo del ajedrez) y a continuación, el resto de los números de cada una de ellas hasta completar las filas, una a una.

X				
		X		
				X
	X			
			X	

Fig. 6

El resultado final es el cuadrado mágico perfecto

10	12	24	36	48
34	46	**8**	20	22
18	30	32	44	**6**
42	**4**	16	28	40
26	38	50	**2**	14

Fig. 7

Si a la misma serie le aplicásemos la variante b_3 tendríamos otro cuadrado mágico perfecto diferente:

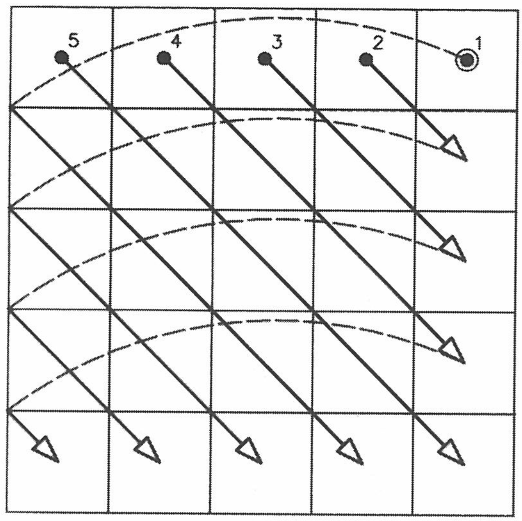
50	32	24	16	8
14	6	48	40	22
38	30	12	4	46
2	44	36	28	20
26	18	10	42	34

Fig. 8

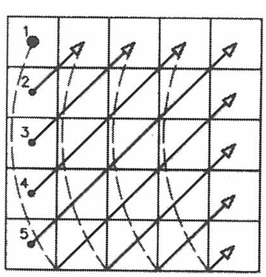
Las ocho variantes se obtienen a partir de la a_1 y de su imagen especular b_1 imprimiéndoles sucesivos giros de 90º en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj.

Podríamos utilizar solamente la a_1 y su imagen b_1, pero en este caso es la serie la que habría que girar, también de 90 en 90 grados. El resultado sería idéntico.

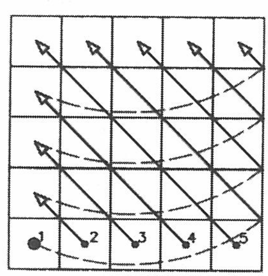
A continuación presentamos todas las variantes:



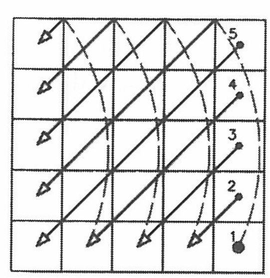
a_1



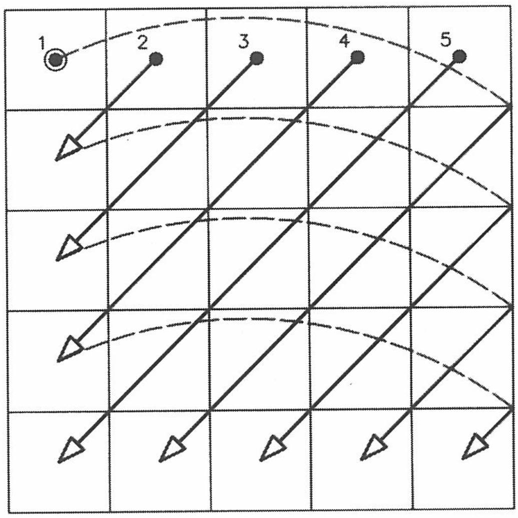
a_2



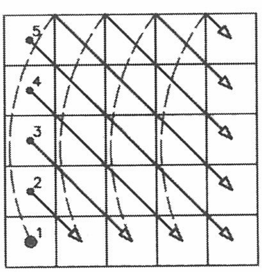
a_3



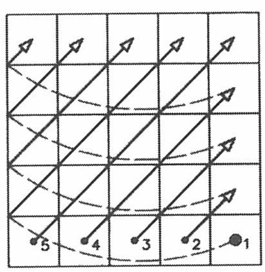
a_4



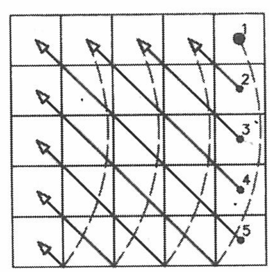
b_1



b_2



b_3



b_4

Veamos a título de ejemplo el cuadrado mágico perfecto de 121 elementos (11 x 11) a partir de la serie del 1 al 121 a la que se le ha aplicado la variante b_1

1	22	32	42	52	62	72	82	92	102	112
103	113	**2**	12	33	43	53	63	73	83	93
84	94	104	114	**3**	13	23	44	54	64	74
65	75	85	95	105	115	**4**	14	24	34	55
35	45	66	76	86	96	106	116	**5**	15	25
16	26	36	46	56	77	87	97	107	117	**6**
118	**7**	17	27	37	47	57	67	88	98	108
99	109	119	**8**	18	28	38	48	58	68	78
69	79	89	110	120	**9**	19	29	39	49	59
50	60	70	80	90	100	121	**10**	20	30	40
31	41	51	61	71	81	91	101	111	**11**	21

Fig. 9

A continuación un último ejemplo: cuadrado mágico perfecto de 7 x 7. partiendo de una serie modificada al haber colocado la primera columna en el séptimo lugar, la primera fila en el tercer lugar, la segunda en el quinto, la tercera en el primero, la cuarta en el segundo, la quinta en el cuarto, dejando en su lugar las dos últimas.

18	19	20	21	15	16	17
25	26	27	28	22	23	24
4	5	6	7	1	2	3
32	33	34	35	29	30	31
11	12	13	14	8	9	10
39	40	41	42	36	37	38
46	47	48	49	43	44	45

17	25	5	34	14	36	44
42	43	16	24	4	33	13
32	12	41	49	15	23	3
22	2	31	11	40	48	21
47	20	28	1	30	10	39
9	38	46	19	27	7	29
6	35	8	37	45	18	26

Fig. 10

Serie modificada — Cuadrado mágico perfecto

Combinaciones y comparaciones que rayan en lo increíble

Ya henos dicho que con una serie de veinticinco elementos podían construirse 14 400 cuadrados mágicos perfectos diferentes.

Con 49 números (cuadrado de 7 x 7) la cantidad de cuadrado mágico perfecto que se obtienen pasan de 25 000 000.

Para poder escribir todos los cuadrados mágicos perfectos que pueden formarse con 121 elementos (cuadrados de 11 x 11), suponiendo que cada número ocupara una superficie de 1 cm^2 se necesitaría una superficie total equivalente al doble de la de Europa.

Y para finalizar, algo verdaderamente increíble, si la serie fuera de 25 x 25 la superficie que ocuparían todos sus cuadrados mágicos perfectos posibles equivaldría a 26 408 000 planos longitudinales de nuestra galaxia.

Florencio Brook Jiménez, maestro jubilado y licenciado en Filosofía.